# CURSO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

L.D. KUDRIÁVTSEV

1

3 s. antes de n.e.
ARQUÍMEDES

1596 R.DESCARTES 1650

1601 P. FERMAT 1665

1643 I.NEWTON 1727

1646 G. LEIBNIZ 1716

1707 L. EULER 1783

1685 B.TAYLOR 1731

1717 J. D'ALEMBERT 1783

1736 J.LAGRANGE 1813

1749 P. LAPLACE 1827

1777 C. GAUSS 1855

1772 J. FOURIER 1837

1789 A.CAUCHY 1857

1781 B.BOLZANO 1848

1792 N.I. LOBACHEVSKI 1856

1902 M.V. OSTROGRADSKI 1862

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

# КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том I

МОСКВА
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»

# CURSO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

L. D. KUDRIÁVTSEV

1

EDITORIAL MIR. MOSCÚ

Traducido del ruso por V. Fernández

Impreso en la URSS

На испанском языке

# Indice

## CAPÍTULO SEGUNDO

## Cálculo diferencial de funciones de varias variables

Pág.

CAPÍTULO TERCERO

**Cálculo integral de las funciones de una variable**

## CAPÍTULO CUARTO

### Series

# Prefacio

En el presente Curso de análisis matemático se exponen tanto los métodos clásicos tradicionales, como los modernos que han surgido en el transcurso de las últimas décadas. Los números reales se introducen axiomáticamente. Este camino permite exponer la información sobre los números, imprescindible para el análisis, en una forma más completa y compacta. Al mismo tiempo, dicho camino parece ser más perfecto desde el punto de vista lógico, pues, al recurrir a otros métodos de construcción de la teoría de números reales que se llaman corrientemente "constructivos" (cuando por base se toman fracciones decimales infinitas o secciones en el dominio de números racionales, o bien las clases de sucesiones fundamentales equivalentes de números racionales), de todas formas resulta necesario introducir el axioma de existencia (no contradicción) de un conjunto de números reales, en ausencia de los cuales las construcciones que se realizan están privadas de una terminación lógica. Por eso es más fácil, partiendo de la definición axiomática de los números reales, pasar en seguida al estudio del análisis matemático en el sentido propio de la palabra.

La exposición del material en el Curso se efectúa, en lo fundamental, sobre la base del método deductivo: todos los conceptos introducidos se estudian al principio, cuando sea posible, en las situaciones más simples y sólo después de haberse realizado su consideración detallada, sigue la generalización ulterior. Así, por ejemplo, el concepto de límite se estudia primeramente para las sucesiones numéricas y después, para las funciones de una sola variable, a continuación se introduce el concepto de límite según un conjunto en el espacio euclídeo, el de límite de las sumas integrales y, por fin, todo termina con la consideración de la noción general de límite según un filtro en un espacio topológico.

Los teoremas a demostrar no siempre se enuncian con la generalización máxima; a veces, con el fin de aclarar mejor la esencia de un problema que se considera, como también la idea de la demostración, la consideración se realiza sólo para las funciones suficientemente suaves. Tal punto de vista se justifica también por lo que, debido a la densidad de las funciones suaves en los espacios funcionales correspondientes, varios teoremas demostrados para estas funciones pueden extenderse, mediante un procedimiento único, consistente en el paso límite, a clases más amplias de funciones. Lamentablemente, esta idea no puede ser realizada hasta el fin sin que aumente considerablemente el volumen del libro, a consecuencia de lo cual la cuestión acerca de la densidad de las funciones "buenas" en diversos espacios funcionales se ha considerado en el Curso sólo para los casos más sencillos.

Una gran atención se presta en el libro a la resolución de problemas con ayuda de procedimientos basados en la teoría que se expone. Además, se recomiendan al lector, a título de trabajo individual, toda una serie de ejercicios y problemas. La resolución de problemas es muy útil para la asimilación activa del análisis matemático. No obstante, el surtido de los mismos, en lo que se refiere a su volumen, no puede sustituir ni mucho menos una recopilación de problemas. Algunos de los problemas ofrecidos son bastante difíciles. La resolución de éstos no es necesaria para dominar el material, exigiendo, sin embargo, mucho tiempo. Están asociados, por regla general, con hechos matemáticos interesantes y suficientemente profundos, para cuya exposición detallada faltaría lugar en el libro. La numeración de los ejercicios en el libro viene por separado en cada párrafo; la de los problemas, lo mismo que la de las figuras, es continua.

La exposición del análisis matemático se lleva a cabo a un nivel accesible para un amplio círculo de estudiantes. Las cuestiones que no integran los programas de matemáticas superiores para las especialidades de ingeniería y están dedicadas a un estudio más profundo de aquellos apartados del análisis que son indispensables para los estudiantes de las especialidades físico-matemáticas, se marcan con un asterisco. Gracias a esto, el manual puede utilizarse en los centros de enseñanza superior de distinto nivel de educación matemática. Una parte considerable del material reflejado en el libro se viene leyendo por el autor durante varios años en el Instituto físico-técnico de Moscú como un curso de conferencias del análisis matemático.

Especialmente para esta edición del manual en lengua española, el autor escribió de nuevo algunos de sus apartados. Esto se refiere, ante todo, a la exposición de la teoría de números reales, la de límite de las funciones y la teoría de integración de las funciones de una sola variable. La introducción de unas concepciones más generales en la teoría del límite e integración de las funciones hizo posible poner al lector al tanto de los problemas en consideración sin perjudicar la claridad, evidencia y sencillez de la exposición.

*Autor*

# CAPÍTULO PRIMERO

# CÁLCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE

## § 1. CONJUNTOS Y FUNCIONES. SÍMBOLOS LÓGICOS

### 1.1. CONJUNTOS. OPERACIONES SOBRE CONJUNTOS

En la matemática, los conceptos de conjunto, elemento y pertenencia de un elemento a un conjunto son conceptos primarios. Los conjuntos serán simbolizados con letras mayúsculas del alfabeto latino o de cualquier otro alfabeto: $A, B, \ldots, X, Y, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$, y los elementos de los conjuntos con letras minúsculas: $a, b, \ldots, x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$. Si $a$ es un elemento del conjunto $A$, entonces se escribe que $a \in A$ (se lee "$a$ pertenece al conjunto $A$") o, lo que significa lo mismo $A \ni a$. Si $a$ no pertenece al conjunto $A$, entonces se escribe $a \notin A$ ó $A \not\ni a$.

Los conjuntos $A$ y $B$ se llaman *iguales*, si están formados por los mismos elementos. De esta manera, la igualdad $A = B$ significa, con respecto a los conjuntos, que un mismo conjunto está simbolizado con letras diferentes $A$ y $B$.

La notación $A = \{a, b, c, \ldots\}$ significa que $A$ está formado por los elementos $a, b, c$ y posiblemente por algunos dados de uno u otro modo.

Si el conjunto $A$ está formado por los elementos $a_\alpha$, donde $\alpha$ recorre algún conjunto de índices $\mathfrak{A}$, entonces escribimos $A = \{a_\alpha\}$ o más detalladamente $A = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ o, si esto no conlleva a errores, simplemente $A = \{a\}$. Si el conjunto $A$ está compuesto por elementos que poseen determinada propiedad, entonces escribiremos $A = \{a: \ldots\}$, donde en las llaves después de los dos puntos está escrita la propiedad señalada de los elementos del conjunto $A$. Por ejemplo, si $a$ y $b$ son dos números reales tales que $a \leqslant b$ y por $[a, b]$ se simboliza el conjunto de todos los números reales $x$ que satisfacen las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, entonces la definición de este conjunto (segmento) con ayuda de los símbolos introducidos podemos escribirla de la siguiente manera:

$$[a, b] = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Para mayor comodidad se introduce el concepto de conjunto vacío, el cual se representa por el símbolo $\varnothing$. Por definición el conjunto vacío no contiene elementos.

Si cada elemento del conjunto $A$ es elemento del conjunto $B$ entonces se dice que el conjunto $A$ es parte del conjunto $B$, o que $A$ es *subconjunto* del conjunto $B$, y se escribe $A \subset B$ (se lee: el conjunto $A$ se contiene en el conjunto $B$) o lo que es lo mismo, $B \supset A$ (se lee: el conjunto $B$ contiene el conjunto $A$).

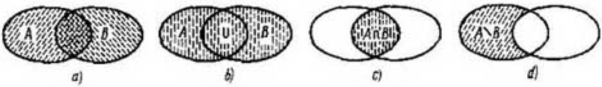



FIG. 1

**Ejercicio**. Demuéstrese que las inclusiones $A \subset B$ y $B \subset A$ se cumplen simultáneamente si y sólo si $A = B$.

De la definición del subconjunto se deduce que $A \subset A$ cualquiera que sea el conjunto $A$; se acostumbra considerar también por definición, que el conjunto vacío es subconjunto de cada conjunto: $\varnothing \subset A$. Si $A$ es cualquier conjunto, entonces $\varnothing$ y $A$ se llamarán *subconjuntos impropios*; si $A \subset B$ y existe un elemento $x \in B$ tal que $x \notin A$, entonces el conjunto $A$ se llama *subconjunto propio* del conjunto $B$.

Si están dados dos conjuntos $A$ y $B$ (fig. 1, *a*), entonces por $A \cup B$ se simboliza el conjunto que se llama su *unión* o *suma* y cada elemento del cual pertenece al menos a uno de los conjuntos $A$ y $B$ (fig. 1, *b*). De esta forma, si algún elemento pertenece al conjunto $A \cup B$, entonces pertenece o bien sólo al conjunto $A$, o bien sólo al conjunto $B$, o bien pertenece a ambos conjuntos.

Por $A \cap B$ se simboliza el conjunto llamado intersección de los conjuntos $A$ y $B$, la cual está formada por los elementos pertenecientes simultáneamente tanto al conjunto $A$ como al conjunto $B$ (fig. 1, *c*).

Por $A \setminus B$ se simboliza el conjunto llamado *diferencia* de los conjuntos $A$ y $B$ y compuesto por los elementos que pertenecen al conjunto $A$ y no pertenecen al conjunto $B$ (fig. 1, *d*). Se dice también que $A \setminus B$ se obtiene del conjunto $A$ restando del mismo el conjunto $B$.

Si $B \subset A$, entonces la diferencia $A \setminus B$ se llama *complemento* del conjunto $B$ hasta el conjunto $A$ o complemento de $B$ respecto a $A$.

Si está dado un sistema de conjuntos $A_\alpha$ (los términos: conjunto, sistema, colección, familia, clase serán utilizados como sinónimos), donde los valores de $\alpha$ forman una colección de índices de $\mathfrak{A}$, entonces se llama *unión* $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ *de los conjuntos* $A_\alpha$ el conjunto donde cada elemento pertenece al menos a uno de los conjuntos dados $A_\alpha$, es decir, la condición $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ es equivalente a la siguiente: existe $\alpha \in \mathfrak{A}$ tal que $x \in A_\alpha$.

Se llama *intersección de los conjuntos* $A_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ el conjunto denotado por

$$\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha,$$

tal que cada uno de sus elementos pertenece a todos los conjuntos $A_\alpha$, es decir, la condición $x \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ significa: para todos los $\alpha \in \mathfrak{A}$ tiene lugar $x \in A_\alpha$.

*Si* $A_\alpha \subset E$ *para todos los* $\alpha \in \mathfrak{A}$, *entonces*

$$E \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha), \tag{1.1}$$

$$E \setminus \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha) \tag{1.2}$$

Demostremos, por ejemplo, la igualdad (1.1). Si $x \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, entonces, por la definición de diferencia de conjuntos, $x \in E$ y $x \notin \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$. A su vez esto, por la definición de unión de conjuntos, es equivalente a que $x \in E$ y para todos los $\alpha \in A_\alpha$ tiene lugar la relación $x \notin A_\alpha$. Esto, de nuevo por la definición de diferencia de conjuntos, es equivalente a la afirmación de que para todos los $\alpha \in \mathfrak{A}$ tenemos $x \in E \setminus A_\alpha$. Finalmente, la última afirmación por la definición de intersección de conjuntos, significa que $x \in \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha)$. Así pues, las condiciones $x \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ y $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha)$ son equivalentes, como consecuencia de lo cual se cumple la igualdad (1.1). La igualdad (1.2) se demuestra análogamente.

Con razonamientos similares se demuestra la validez de las siguintes igualdades para conjuntos $A$, $B$ y $C$ cualesquiera:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

**En el siguiente punto 1.2* se analiza el concepto de función, y el punto 1.3* será dedicado a los conceptos de conjuntos finitos y sucesión. Se puede prescindir de los puntos y párrafos del curso señalados con asteriscos en una primera lectura y regresar a ellos sólo en caso de necesidad. En particular, para la comprensión del material posterior es suficiente tener una noción sobre la función — que se da en el curso de matemática elemental — en tanta correspondencia determinada entre los elementos de dos conjuntos. En este caso, el concepto de correspondencia se puede entender como un concepto primario.**

## 1.2.* FUNCIONES

Diremos que *el número de elementos del conjunto A es igual a la unidad* 1, si en él se tiene un elemento $a \in A$ y no hay otros (dicho de otro modo, si del conjunto $A$ se resta el conjunto formado por el elemento $a$, entonces se obtiene el conjunto vacío).

El conjunto $A$ se llama *conjunto de 2 (dos) elementos*, si al restar de $A$ el conjunto compuesto sólo por un elemento $a \in A$, es decir, el conjunto, cuyo número de elementos es igual a 1, resulta un conjunto cuyo número de elementos será también igual a la unidad. No es difícil demostrar, que esta definición no depende de la elección del elemento señalado $a \in A$, es decir, si $a \in A$ y $b \in A$, y además, $A \setminus \{a\}$ está formado por un elemento, entonces el conjunto $A \setminus \{b\}$ también está compuesto por un elemento (precisamente por el elemento $a$).

Sean dados los conjuntos $X = \{x\}$ e $Y = \{y\}$. El conjunto formado por dos elementos $x \in X$ e $y \in Y$, se llama *par* $\{x, y\}$ de los elementos $x$, $y$.

El par de la forma $\{x, \{x, y\}\}$, donde $x \in X$, $y \in Y$ y $\{x, y\}$ es un par de elementos $x$ e $y$ se llama *par ordenado* de los elementos $x$ e $y$. El elemento $x$ se llama primer elemento del par ordenado $\{x, \{x, y\}\}$, y el elemento y, segundo. El par ordenado $\{x,$

$\{x, y\}\}$ se denota por $(x, y)$. En el futuro por par se entenderá habitualmente par ordenado.

El conjunto de todos los pares ordenados $(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, se llama *producto de los conjuntos* $X$ e $Y$ y se denota por $X \times Y$. En ese caso no se supone que necesariamente el conjunto $X$ sea diferente del conjunto $Y$, es decir, es posible el caso cuando $X = Y$.

**Definición 1.** *Cualquier conjunto* $f = \{(x, y)\}$ *de pares ordenados* $(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, *tal que, para pares cualesquiera* $(x', y') \in f$ *y* $(x'', y'') \in f$ *de la condición* $y' \neq y''$ *se deduce que* $x' \neq x''$, *se llama función, o lo que es lo mismo, aplicación.*

Junto con los términos de "función' y "aplicación", en determinadas situaciones se utilizan los términos similares *transformación, morfismo* y *correspondencia.*

Las funciones se donotarán por diferentes letras: $f, g, \ldots, F, G, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$.

El conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados $(x, y)$ de cierta función $f$ se llama *dominio* (o *conjunto de definición*) de esta función y se denota por $X_f$, y el conjunto de todos los segundos elementos se llama *conjunto de sus valores* y se denota por $Y_f$. El mismo conjunto de pares ordenados $f = \{(x, y)\}$ analizado como subconjunto del producto $X \times Y$, se llama *gráfica de la función f.*

El elemento $x \in X_f$ se llama *argumento de la función f* o variable independiente, el elemento $y \in Y$, *variable dependiente.*

Si $f = \{(x, y)\}$ es una función (aplicación), se escribe $f : X_f \to Y$ y se dice, que $f$ aplica el conjunto $X_f$ en el conjunto $Y$. En caso de que $X = X_f$, se escribe simplemente $f : X \to Y$.

Si $f : X \to Y$ es una función, es decir, un conjunto de pares ordenados $f = \{(x, y)\}$, $x \in X$, $y \in Y$, que satisfacen las condiciones de la definición 1, y $(x, y) \in f$, entonces se escribe $y = f(x)$ (algunas veces simplemente $y = fx$) o $f : x \to y$, y se dice que la función $f$ pone en correspondencia al elemento $x$ el elemento $y$ (la aplicación $f$ aplica el elemento $x$ en el elemento $y$) o lo que es lo mismo, el elemento $y$ corresponde al elemento $x$. En este caso también se dice que el elemento $y$ es el valor de la función $f$ en el punto $x$, o la imagen del elemento $x$ en la aplicación $f$.

Junto con el símbolo $f(x_0)$, para representar el valor de la función $f$ en el punto $x_0$, se utiliza también la notación $f(x)|_{x=x_0}$.

Dado $y \in Y$, el conjunto de todos los elementos $x \in X$, tales que $f(x) = y$, se llama *preimagen del* elemento $y$ y se denota por $f^{-1}(y)$. De esta forma

$$f^{-1}(y) = \{x : x \in X, f(x) = y\}.$$

Es evidente que si $y \in Y \setminus Y_f$, entonces $f^{-1}(y) = \varnothing$.

A veces la misma función $f$ se denota por el símbolo $f(x)$. La notación de la función $f : X \to Y$ y de su valor en el punto $x \in X$ por un mismo símbolo $f(x)$ no lleva a confusiones, porque en cada caso concreto siempre está claro de qué se habla.

Comúnmente la notación $f(x)$ es más cómoda que la notación $f : x \mapsto y$ en los cálculos. Por ejemplo, la notación $f(x) = x^2$ es significativamente más cómoda y sencilla de utilizar en las transformaciones analíticas que la notación $f : x \mapsto x^2$.

Sea dada una aplicación $f : X \to Y$, es decir, una aplicación del conjunto $X$ en el conjunto $Y$. Dicho de otro modo, a cada elemento $x \in X$ se ha puesto en correspondencia un elemento $y \in Y$ y además único, y cada elemento $y \in Y_f \subset Y$ está puesto en correspondencia por lo menos a un elemento $x \in X$.

Si $Y = X$, entonces se dice que la aplicación $f$ aplica el conjunto $X$ en sí mismo.

Si $Y = Y_f$, es decir, el conjunto $Y$ coincide con el conjunto de los valores de la función $f$, entonces se dice que $f$ aplica el conjunto $X$ sobre el conjunto $Y$, o que la aplicación $f$ es una aplicación sobreyectiva, más brevemente una *sobreyección*. De esta forma, la aplicación $f : X \to Y$ es una sobreyección, si para cualesquier elemento $y \in Y$ existe al menos un elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Es evidente que si $f : X \to Y$ y $Y_f$ es el conjunto de valores de la función $f$, entonces $f : X \to Y_f$ es una aplicación sobreyectiva.

Si en la aplicación $f : X \to Y$ a diferentes $x \in X$ les corresponden $y \in Y$ diferentes, es decir, para $x' \neq x''$ tiene lugar $f(x') \neq f(x'')$, entonces la aplicación $f$ se denomina aplicación biunívoca (correspondencia biunívoca) de $X$ en $Y$ o también aplicación de una hoja o *inyección*. De esta forma, la aplicación $f : X \to Y$ es de una hoja (inyectiva) si y sólo si la preimagen de cada elemento $y$ perteneciente al conjunto de valores de la función $f : y \in Y_f$ está compuesta exactamente por un elemento.

Si la aplicación $f : X \to Y$ es al mismo tiempo biunívoca en el conjunto $Y$, es decir, es al mismo tiempo inyección y sobreyección, entonces naturalmente se llama *aplicación biunívoca* del conjunto $X$ sobre el conjunto $Y$, o también, aplicación *biyectiva* (biyección) en $Y$.

De esta forma, la aplicación $f : X \to Y$ es una aplicación biunívoca del conjunto $X$ sobre el conjunto $Y$ si y sólo si para cualesquiera $x' \in X$ y $x'' \in X$, $x' \neq x''$, es válida la desigualdad $f(x') \neq f(x'')$, y cualquiera que sea $y \in Y$ existe el elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

La aplicación biunívoca del conjunto $X$ sobre el conjunto $Y$, a menudo se denomina correspondencia biunívoca de los elementos de estos conjuntos.

Si $f : X \to Y$ y $A \subset X$, entonces el conjunto

$$B = \{y : y \in Y, y = f(x), x \in A\},$$

es decir, el conjunto de todos aquellos $y$, en cada uno de los cuales durante la aplicación $f$ se aplica al menos un elemento del subconjunto $A$ del conjunto $X$, se llama *imagen del subconjunto* $A$ y se escribe $B = f(A)$.

En particular, siempre tenemos $Y_f = f(X)$.

Para las imágenes de los conjuntos $A \subset X$ y $B \subset X$ son válidas las siguientes relaciones fácilmente comprobables

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$

$$f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B),$$

y si $A \subset B$, entonces $$f(A) \subset f(B).$$

Si $f : X \to Y$ y $B \subset Y$, entonces el conjunto

$$A = \{x : x \in X, f(x) \in B\},$$

se llama *preimagen del conjunto* $B$ y se escribe $A = f^{-1}(B)$. De esta forma, la preimagen del conjunto $B$ está compuesta por todos aquellos elementos $x \in X$, que por medio de la aplicación $f$ se aplican en elementos de $B$, o lo que es lo mismo, que está compuesta por todas las preimágenes de los puntos $y \in B$:

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y).$$

Para las preimágenes de los conjuntos $A \subset Y$ y $B \subset Y$ son válidas las siguientes relaciones fácilmente demostrables

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

Y si $A \subset B$, entonces $\qquad f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B).$

Si $A \subset X$, entonces la función $f : X \to Y$ de forma natural engendra una función definida sobre el conjunto $A$, que pone en correspondencia a cada elemento $x \in A$ el elemento $f(x)$. Esta función se llama *restricción de la función $f$* sobre el conjunto $A$ y a veces se denota por $f|_A$ o sencillamente $f_A$.

De esta forma, $f_A : A \to Y$ y para cualquier $x \in A$ tiene lugar $f_A : x \to f(x)$. Si el conjunto $A$ no coincide con el conjunto $X$, entonces la restricción $f_A$ de la función $f$ sobre el conjunto $A$ tiene otro dominio que la función $f$ y por lo tanto, es una función diferente de $f$. Con frecuencia la restricción de la función sobre un conjunto se denota por el mismo símbolo que la función inicial.

Si dos funciones $f$ y $g$ se analizan sobre el mismo conjunto $X$, más exacto, si se analizan las restricciones de las funciones $f$ y $g$ sobre el mismo conjunto $X$, entonces la notación $f = g$ sobre $X$ significa que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in X$. En este caso, se dice que la función $f$ es idénticamente igual a la función $g$ sobre el conjunto $X$.

Señalemos que las funciones en las cuales a todos los elementos de un conjunto les corresponde un mismo elemento, es decir, funciones en las cuales al variar los valores del argumento los valores de la función no varían, se llaman *constantes* (sobre el conjunto dado).

Así pues, si al variar una variable (el argumento de la función) la otra variable, que es función de la primera, no cambia (es decir, "no depende" de la primera variable), entonces éste es un caso particular y en determinado sentido el caso más sencillo de dependencia funcional.

Si $f : X \to Y$ y cada elemento $y \in Y_f$ representa un conjunto de elementos cualesquiera $y = \{z\}$, además entre estos conjuntos se tiene al menos uno que no es vacío, que tiene más de un elemento, entonces, esa función $f$ se llama *función multiforme*. En este caso los elementos del conjunto $f(x) = \{z\}$ a menudo se nombran también valores de la función $f$ en el punto $x$.

Si cada conjunto $f(x)$ está compuesto sólo por un elemento, entonces la función $f$ se llama también *función unívoca.*

Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, entonces la función $F : x \to Z$ definida para cada $x \in X$ por la igualdad $F(x) = g(f(x))$ se llama *composición* (a veces *superposición*) de las funciones $f$ y $g$, o *función compuesta* y se denota por $g \circ f$.

De esta forma, por la definición de cada $x \in X$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Sea dada la función $f : X \to Y$ y $Y_f$ es el conjunto de sus valores. El conjunto de todos los posibles pares ordenados del tipo $(y, f^{-1}(y))$, $y \in Y_f$, forma la función que se denomina *función inversa* a la función $f$ y se denota por $f^{-1}$. La función inversa $f^{-1}$ pone en correspondencia a cada elemento $y \in Y_f$ su preimagen $f^{-1}(y)$, es decir, un conjunto de elementos. Por esto mismo, la función inversa es, en general, una función multiforme.

Si la aplicación $f : X \to Y$ es de una hoja (inyectiva), entonces la aplicación inversa, definida como siempre sobre $Y_f$, es una función unívoca y transforma $Y_f$ sobre $X$, es decir, $f^{-1} : Y_f \to X$. En realidad, en este caso, las preimágenes de todos los puntos $y \in Y_f$ están compuestas exactamente por un punto $x \in X$.

## 1.3.* CONJUNTOS FINITOS Y NÚMEROS NATURALES. SUCESIONES

Una clase importante de conjuntos que se encuentra a menudo, es la clase de los así llamados conjuntos finitos. Para enunciar la definición de un conjunto finito, daremos primero la definición del concepto de número natural.

**Definición 2.** *El conjunto $N = \{n\}$ se llama conjunto de los números naturales si*

a) *uno de sus elementos se denota por el símbolo* 1;

b) *a cada elemento $n \in N$ se le pone en correspondencia exactamente un elemento de este conjunto denotado por $n^*$ y denominado elemento posterior al elemento $n$;*

c) *para cualquier $n \in N$ tiene lugar $n^* \neq 1$;*

d) *de $n^* = m^*$, $n \in N$, $m \in N$, se deduce, que $n = m$;*

e) (*axioma de inducción*) *supongamos que el conjunto $M = \{m\} \subset N$ posee las propiedades*

1°) $1 \in M$;

2°) *si $m \in M$, entonces $m^* \in M$;*

*entonces el conjunto $M$ contiene todos los números naturales: $M = N$.*

La definición axiomática dada del conjunto de los números naturales pertenece a Peano[*)], por eso las propiedades a) — e) se llaman *axiomas de Peano*.

*Los elementos del conjunto $N$* se denotan por 1, 2, 3, 4, ... (aquí después de cada número natural está escrito el que le sigue).

**Definición 3.** *El conjunto $X$ se llama conjunto compuesto por $n$ elementos, $n \in N$, si existe una aplicación biunívoca del conjunto $X$ sobre el conjunto* $\{1, 2, 3, ..., n\}$.

*Si para un conjunto existe un número natural $n$, tal que el número de sus elementos es igual a $n$, entonces ese conjunto se llama finito.*

Cualquier conjunto que no sea finito se llama *infinito*. Ejemplo de conjunto infinito es el conjunto de todos los números naturales.

El conjunto vacío se considera, por definición, finito, y su número de elementos igual a cero.

Si el conjunto que contiene $m$ elementos, puede ser obtenido de un conjunto que contiene $n$ elementos, restando de éste un conjunto finito, entonces el número natu-

---

*) I. G. Peano (1858 — 1932), matemático italiano.

ral $m$ se llama menor que el número natural $n$ o lo que es lo mismo, el número $n$ se llama mayor que el número $m$; en este caso se escribe $m < n$, ó $n > m$.

**Definición 4.** *Sea $X$ un conjunto cualquiera y $N$ el conjunto de los números naturales. Cualquier aplicación $f : N \to X$* (véase el p. 1.2*) *se llama sucesión de elementos del conjunto $X$. El elemento $f(n)$ se denota por $x_n$ y se llama elemento n-ésimo de la sucesión $f : N \to X$ y la sucesión como tal se denota por $\{x_n\}$ ó $x_n$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Cada elemento $x_n$ de la sucesión $\{x_n\}$ es un par ordenado, compuesto por el número $n \in N$ y el elemento $x$ del conjunto $X$ correspondiente a este número en la aplicación $f : N \to X$, es decir, $x_n = (n, x)$. El segundo elemento de este par se llama valor del elemento $x_n$ de la sucesión $\{x_n\}$ y el primero, su número.

El conjunto de los elementos de una sucesión siempre es infinito. Dos elementos distintos de la sucesión pueden tener el mismo valor, pero a ciencia cierta se diferencian por sus números, los cuales son un conjunto infinito.

El conjunto de los valores de los elementos de la sucesión (a menudo se dice brevemente: conjunto de los valores de la sucesión) puede ser finito. Por ejemplo, si a todos los $n \in N$ los ponemos en correspondencia el mismo elemento $a \in X$, es decir, para todos los $n \in N$ tiene lugar $f(n) = a$, entonces, el conjunto de los valores de la sucesión $x_n = a$, $n = 1, 2, \ldots$, está compuesto por un elemento $a \in X$. Estas sucesiones se llaman *estacionarias*.

Si $n_1 < n_2$, $n_1 \in N$, $n_2 \in N$, entonces el término $x_{n_1}$ de la sucesión $\{x_n\}$ se denomina término anterior al término $x_{n_2}$ y el término $x_{n_2}$, término posterior al término $x_{n_1}$. En este sentido, los términos de la sucesión siempre están ordenados.

## 1.4. SÍMBOLOS LÓGICOS

En los razonamientos matemáticos con frecuencia se encuentran las expresiones "existe un elemento" que tiene algunas propiedades, y "cualquier elemento" entre los elementos que tienen alguna propiedad. En lugar de la palabra "existe" o de la expresión equivalente a ella "se encuentra" en ocasiones se escribe el símbolo $\exists$, es decir, la letra latina E al revés (de la palabra inglesa existence, existencia), y en lugar de las palabras "cualqueira", "cada", "todo", el símbolo $\forall$, es decir, una A latina invertida (de la palabra inglesa any, cualquiera). El símbolo $\exists$ se llama *símbolo de existencia* y el símbolo $\forall$, *símbolo de universalidad*.

Ejemplos. 1. La definición de la unión $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ de los conjuntos $A_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, escribe con ayuda del símbolo lógico de existencia de la forma siguiente:

$$\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \{x : \exists_\alpha \in \mathfrak{A}, x \in A_\alpha\}$$

y la definición de la intersección $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, escrita con ayuda del símbolo de generalidad tiene la forma

$$\bigcap A_\alpha = \{x : \forall_\alpha \in \mathfrak{A}, x \in A_\alpha\}.$$

2. Sea $\boldsymbol{R}$ el conjunto de los números reales y sea dada la función $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, es decir, la función definida sobre el conjunto de los números reales y que toma valores reales.

La función $f$ se llama *función par*, si para cada $x \in \boldsymbol{R}$ se cumple la igualdad $f(-x) = f(x)$. Utilizando los símbolos lógicos esta condición se puede escribir más brevemente
$$\forall x \in \boldsymbol{R}: f(-x) = f(x).$$

3. La función $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ se llama *periódica* si existe tal número $T > 0$, que cualquiera que sea $x \in \boldsymbol{R}$ es válida la igualdad $f(x + T) = f(x)$. Utilizando los símbolos lógicos, esto se puede escribir de la siguiente forma:

$$(\exists T > 0)(\forall x \in \boldsymbol{R}) : f(x + T) = f(x).$$

A menudo, para la comodidad de la lectura de las afirmaciones escritas con ayuda de algunos símbolos lógicos, todo lo que se relaciona con cada uno de ellos por separado se encierra entre paréntesis, como se ha hecho en la última fórmula. Los dos puntos en las fórmulas de este tipo significan "tiene lugar".

4. La función $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ no es par, si la condición $f(-x) = f(x)$ no se cumple para todos los $x \in \boldsymbol{R}$. Sin embargo, semejantes enunciados negativos no son muy cómodos para su utilización, ya que es muy difícil hacer conclusiones de algo que no hay. Es mucho más cómodo trabajar con las llamadas afirmaciones positivas que no contienen negación. En nuestro caso, la afirmación de que la igualdad $f(-x) = f(x)$ no se cumple para todos los $x \in \boldsymbol{R}$, es equivalente a la afirmación de que existe tal $x \in \boldsymbol{R}$ que $f(-x) \neq f(x)$ o en la escritura con símbolos,

$$\exists x \in \boldsymbol{R} : f(-x) \neq f(x).$$

5. La función $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ no es periódica, si cualquier número $T > 0$ no es su período, es decir, para cualquier $T > 0$ la igualdad $f(x + T) = f(x)$ no debe cumplirse para todos los $x \in \boldsymbol{R}$ o de forma positiva: para cualquier $T > 0$ se encuentra un $x \in \boldsymbol{R}$, para el cual $f(x + T) \neq f(x)$. Con ayuda de los símbolos lógicos esto se escribe de la siguiente forma:
$$(\forall T > 0)(\exists x \in \boldsymbol{R}) : f(x + T) \neq f(x).$$

Comparando las escrituras hechas con ayuda de símbolos lógicos de las afirmaciones en los ejemplos 2 y 3 con sus negaciones en los ejemplos 4 y 5, vemos que en la construcción de la negación, los símbolos de existencia y universalidad se sustituyen el uno por el otro. Para que en un conjunto dado no exista un elemento, con cierta propiedad, es necesario que todos los elementos no tengan esta propiedad, es decir, en este caso, en la negación, el símbolo de existencia $\exists$ se convierte en el símbolo de universalidad $\forall$. Si no todos los elementos del conjunto examinado poseen cierta propiedad, entonces esto significa que en él existe un elemento, que no tiene dicha propiedad: el símbolo de universalidad se cambió por el símbolo de existencia.

Para no complicar al lector que no está acostumbrado al simbolismo lógico, la exposición posterior del material se hace de manera clásica, sin la utilización de los símbolos lógicos, los que sólo en elgunas ocasiones, se aplican paralelamente al texto fundamental. Por una parte, para acostumbrar al lector a su aplicación (lo que es muy útil al tomar notas de libros y conferencias), y por otra, por cuanto ellos no permiten más brevemente y a veces de forma más expresiva, aclarar la idea necesaria, ayudando con esto al lector a comprender el contenido de la cuestión expuesta.

Con el símbolo $\square$ en el texto del libro se señala el final de la demostración dada. El símbolo $\Rightarrow$ significa "sigue" (una proposición se deduce de otra), el símbolo $\Leftrightarrow$ significa equivalencia de las afirmaciones que se encuentran a ambos lados del mismo. La abreviatura def significa, que la afirmación formulada es válida por definición (de la palabra inglesa definition, definición). Por ejemplo,

$$A \subset B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A \Rightarrow x \in B),$$
$$(g \circ f)(x) \overset{\text{def}}{=} g(f(x)).$$

# § 2. NÚMEROS REALES. CONJUNTOS NUMÉRICOS

## 2.1. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

En la matemática elemental se estudian los números reales. Al principio, en el proceso de cálculo surge la llamada *serie natural* de números $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. En aritmética se introducen las operaciones de adición y multiplicación sobre los números naturales. En lo que respecta a la resta y la división, no siempre resultan posibles en el conjunto de los números naturales. Para que las cuatro operaciones aritméticas sean posibles para cualquier par de números (menos la operación de división entre cero, que carece de sentido), es necesario ampliar la clase de los números analizados. La necesidad de medir algunas magnitudes físicas y geométicas exige la ampliación de la reserva de números. Por eso, se introduce el cero y los números *negativos* enteros (del tipo $-1, -2, \ldots, -n, \ldots$) y después, los *racionales* (del tipo $p/q$, donde $p$, $q$ son enteros $q \neq 0$).

La misma necesidad de medición de magnitudes y realización de operaciones tales como el extraer una raiz, el cálculo de logaritmos, resolución de ecuaciones algebraicas, conlleva a la ampliación posterior de la reserva de números analizados: aparecen los números irracionales y finalmente los *números complejos*. Todos los números racionales e irracionales forman el conjunto de los números reales.

Al conjunto de todos los números reales, como es de costumbre, vamos a denotarlo por $\boldsymbol{R}$ (de la palabra latina realus, real). Este conjunto forma una colección en la que están definidas las operaciones, relacionadas entre sí, de adición, multiplicación y comparación de los números por su magnitud y que tiene continuidad de determinado tipo. Recordemos brevemente las propiedades de los números reales, conocidas de la matemática elemental, y las completemos con la descripción de algunas propiedades que habitualmente no se analizan de forma suficientemente amplia.

1. OPERACIÓN DE ADICIÓN. Para cualquier par ordenado de números reales $a$ y $b$ está definido y además de forma única, el número denominado su *suma* y denotado por $a + b$, de forma tal, que tienen lugar las siguientes propiedades.

$\mathrm{I}_1$. *Para cualquier par de números* $a$ y $b$

$$a + b = b + a.$$

Esta propiedad se llama *ley conmutativa de la adición*.

$\mathrm{I}_2$. *Para cualquier terna de números* $a$, $b$ y $c$

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Esta propiedad se llama *ley asociativa de la adición*.

$\mathrm{I}_3$. *Existe el número denotado por* 0 y denominado nulo, *tal que para cualquier número a*
$$a + 0 = a.$$

$\mathrm{I}_4$. *Para cualquier número a existe el número denotado por — a y llamado opuesto al número dado, tal que*
$$a + (-a) = 0.$$

II. OPERACIÓN DE MULTIPLICACIÓN. Para cualquier par de números $a$ y $b$ está definido y además de forma única el número denominado su *producto* y denotado por $ab$ de forma tal que tiene lugar las siguientes propiedades.

$\mathrm{II}_1$. *Para cualquier par de números a* y *b*
$$ab = ba.$$

Esta propiedad se denomina *ley conmutativa de la multiplicación*.

$\mathrm{II}_2$. *Para cualquier terna de números a, b, c*
$$a(bc) = (ab)c.$$

Esta propiedad se denomina *ley asociativa de la multiplicación*.

$\mathrm{II}_3$. *Existe un número denotado por* 1 *que se llama unidad, tal que para cualqueir número a*
$$a \cdot 1 = a.$$

$\mathrm{II}_4$. *Para cualquier número a* $\neq 0$ *existe un número denotado* $1/a$ *ó* $\frac{1}{a}$ *que se llama elemento inverso, tal que*
$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

III. RELACIÓN DE LAS OPERACIONES DE ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN.

*Para cualquier terna de números a, b, c*
$$(a + b)c = \mathrm{ac} + bc.$$

Esta propiedad se denomina *ley distributiva de la multiplicación* con relación a la suma.

IV. ORDENAMIENTO. *Para cada número a está definida una de las relaciones* $a > 0$ *(a es mayor que cero)*, $a = 0$ *(a es igual a cero) ó* $0 > a$ *(cero es mayor que a) y si* $a > 0$ *y* $b > 0$, *entonces*

$\mathrm{IV}_1$. $a + b > 0$;

$\mathrm{IV}_2$. $ab > 0$.

La propiedad IV da la posibilidad de introducir el concepto de comparación, o como a veces se dice, comparación por magnitud para dos números cualesquiera.

*El número a se llama mayor que el número b y se escribe* $a > b$ *o lo que es lo mismo, el número b se llama menor que a y se escribe* $b < a$, $\quad a - b > 0$.

La existencia de la comparación "mayor" o "menor" para cualquier par de números reales se llama *propiedad de ordenamiento del conjunto de todos los números reales*.

V. PROPIEDAD DE CONTINUIDAD. *Cualesquiera que sean los conjuntos no vacíos* $A \subset R$ y $B \subset R$, *en los cuales para dos elementos cualesquiera* $a \in A$ y $b \in B$ *se*

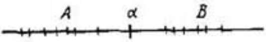



FIG. 2

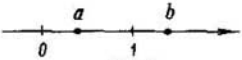



FIG. 3

*cumple la desigualdad* $a \leqslant b$, *existe un número* $\alpha$ *tal que para todos los* $a \in A$ *y* $b \in B$ *tiene lugar la relación*
$$a \leqslant \alpha \leqslant b$$
(fig. 2).

La propiedad de continuidad de los números reales está relacionada con la más sencilla de las aplicaciones de la matemática en la práctica, con la medición de magnitudes. En la medición de cualquier magnitud física (o de otra naturaleza) con frecuencia se obtienen valores aproximados con mayor o menor exactitud. Si en el resultado de la medición experimental de la magnitud dada se obtiene una serie de números que dan el valor de la magnitud buscada con defecto (ellos juegan el papel de conjunto $A$ en el enunciado dado anteriormente de la propiedad de continuidad) o con exceso (conjunto $B$), entonces, la propiedad de continuidad de los números reales expresa la seguridad objetiva de que la magnitud medida tiene determinado valor, situado entre sus valores aproximados, calculados con defecto o exceso.

De las propiedades de los números reales enumeradas I — V se deducen otras muchas propiedades de los mismos, por eso, se pueden decir que los números reales son el conjunto de elementos que poseen las propiedades I — V.

Para el lector meditabundo señalamos que la cita al principio del párrafo de que los números reales y sus propiedades son conocidos del curso de matemática elemental, no es imprescindible. Las propiedades enunciadas anteriormente de los números reales, se pueden tomar como definición inicial. Se debe sólo excluir el caso trivial. Es fácil comprobar que para el conjunto formado sólo por el cero se cumplen todas las propiedades I — V (en ese conjunto $1 = 0$). El conjunto, en el cual se tiene al menos un elemento diferente de cero se donomina no *trivial*.

Ahora, parafraseando el resultado de nuestros análisis obtenemos la siguiente definición.

**Definición 2.** *El conjunto no trivial de elementos que poseen las propiedades* I — V *se llama conjunto de los números reales. Cada elemento de este conjunto se llama numero real.*

Recordemos que el conjunto de los números reales se denota con la letra $\boldsymbol{R}$.

La construcción de la teoría de los números reales que se basa en esta definición se llama *axiomática* y las propiedades I — V, *axiomas de los números reales.*

Geométricamente, el conjunto de los números reales se representa con una recta orientada y los números sueltos, con los puntos de esta recta. Por eso, el conjunto de los números reales con frecuencia se llama recta numérica, o eje numérico, y los números sueltos, sus puntos (fig. 3). Teniendo en cuenta esta representación de los números reales, a veces, en lugar de $a$ menor que $b$ (respectivamente $a$ mayor que $b$) se dice que el punto $a$ está más a la izquierda que el punto $b$ (respectivamente, $a$ está más a la derecha que $b$).

En los puntos siguientes 2.2* — 2.6* serán analizadas más detalladamente las propiedades I — V de los números reales y deducidas algunas de sus consecuencias. Así como todos los puntos señalados con asteriscos, los puntos citados, en cualquier caso, pueden ser omitidos en la primera lectura sin grandes perjuicios para la asimilación del curso de análisis matemático. Para la comprensión del material siguiente (en el p. 2.5 y los que le siguen) es completamente suficiente la representación de los números reales que se da en el curso de matemática elemental.

## 2.2.* PROPIEDADES DE LA ADICIÓN Y DE LA MULTIPLICACIÓN

Consideremos algunas propiedades de la adición y la multiplicación que se derivan de las propiedades I, II y III. Ante todo, señalemos que para la operación de la adición existe la operación inversa, la resta, definámosla.

Para cualquier par ordenado de números $a \in \boldsymbol{R}$ y $b \in \boldsymbol{R}$ el número $a + (-b)$ se llama *diferencia* de los números $a$ y $b$ y se denota por $a - b$, es decir

$$a - b \stackrel{\text{def}}{=} a + (-b). \tag{2.1}$$

Si

$$a + b = c \tag{2.2}$$

entonces sumando a ambos miembros de esta igualdad el número $-b$ obtendremos $(a + b) + (-b) = c + (-b)$. De aquí, por la ley asociativa $I_2$ y la definición de diferencia tenemos

$$a + (b + (-b)) = c - b,$$

pero $b + (-b) = 0$, por consiguiente

$$a = c - b. \tag{2.3}$$

De esta forma, después de la adición al número $a$ del número $b$, el número $a$ se restaura restando de la suma $a + b$ el número $b$, por lo que la operación de resta se llama *operación inversa a la operación de la suma.*

Pasemos a las propiedades de la suma y la multiplicación de los números reales.

1°. *El número con la propiedad del cero es único.*

En efecto, supongamos que existen dos ceros, $0$ y $0'$, entonces debido a $I_3: 0' + 0 = 0'$, $0 + 0' = 0$. Según la ley conmutativa $I_2$, los primeros miembros de estas igualdades son iguales y por consiguiente son iguales los segundos, es decir, $0 = 0'$. □

2°. *El número opuesto a uno dado es único.*

Supongamos que los números $b$ y $c$ son opuestos a cierto número $a$, es decir, $a + b = 0$ y $a + c = 0$. Entonces de la primera de estas igualdades tenemos $(a + b) + c = 0 + c$, es decir, $(a + b) + c = c$, de donde $(a + c) + b = c$; pero $a + c = 0$, por consiguiente $b = c$. □

3°. *Para cualquier número a es válida la igualdad*

$$-(-a) = a.$$

De la igualdad $a + (-a) = 0$ que define al elemento opuesto, por la conmutatividad de la suma, obtendremos $-a + a = 0$. Esto significa que $a = -(-a)$. □

4°. *Para cualquier número a es válida la igualdad*

$$a - a = 0.$$

En realidad $a - a = a + (-a) = 0$. □

5°. *Para números a y b cualesquiera tenemos:*

$$-a - b = -(a + b),$$

*es decir, el número opuesto a la suma de dos números es igual a la suma de los números opuestos a ellos.*

En efecto, $a + b + (-a - b) = (a - a) + (b - b) = 0.$ □

6°. *La ecuación $a + x = b$ tiene en $\mathbf{R}$ solución que es única: $x = b - a$.*

En realidad, si la solución existe, entonces por (2.3) $x = b - a$. Con esto está demostrada la unicidad de la solución de la ecuación $a + x = b$. Para la existencia de la solución, es suficiente comprobar que el número $x = b - a$ es solución. Esto efectivamente es así:

$$a + (b - a) = a + [b + (-a)] = [a + (-a)] + b = b. \square$$

Para la operación de la multiplicación también existe la operación inversa, que se llama división y se define de la forma siguiente.

Para cualquier par de números ordenados $a$ y $b$ $b \neq 0$, el número $a \cdot \frac{1}{b}$ se llama *cociente de la división de a* por $b$ y se denota por $\frac{a}{b}$ ó $a/b$ ó $a : b$, es decir.

$$\frac{a}{b} \overset{\text{def}}{=} a \cdot \frac{1}{b}, \quad b \neq 0.$$

Las propiedades análogas a las propiedades 1° — 6° para la suma son válidas también para la operación de multiplicación:

7°. *El número que tiene las propiedades de la unidad es único.*

8°. *El número inverso a un número dado diferente de cero es único.*

9°. *Para cualquier número $a \neq 0$ es válida la igualdad*

$$\frac{1}{1/a} = a.$$

10°. *Para cualquier número $a \neq 0$ es válida la igualdad*

$$a/a = 1.$$

11°. *Para cualesquiera números $a \neq 0$ y $b \neq 0$ tenemos la igualdad*

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab},$$

es decir, el número inverso al producto de dos números diferentes de cero es igual al producto de los números inversos a ellos.

12°. *La ecuación $ax = b$, $a \neq 0$ tiene solución en el conjunto de los números reales que es única.*

Las propiedades 7° — 12° se demuestran análogamente a las propiedades 1° — 6°. Todas las propiedades 1° — 12° analizadas tienen relación sólo con las operationes de adición y multiplicación. Estas operaciones permiten definir a los números naturales, enteros y racionales, la operación de elevar a una potencia entera y la operación de extraer una raíz. Hagamos esto.

El número $1 + 1$ se denota por 2, el número $2 + 1$ por 3, etc. Los números 1, 2, 3, ... , se llaman *números naturales*. Su notación y denominación coinciden con los números de los elementos en los conjuntos finitos (véase el p. 1.3*). Esto no es casual, por cuanto para obtener el número natural $n$ en el nuevo sentido, se necesita tomar un conjunto finito de unidades, cuyo número de elementos fue denotado en el p. 1.2* por el mismo símbolo $n$, y sumarlas. La relación de orden introducida en el conjunto de los números naturales (véase el p. 1.3*) coincide con el orden que se tiene en este conjunto, de acuerdo con el ordenamiento del conjunto de todos los números reales (véase la propiedad IV en el p. 2.1), además, el número natural $n^*$, posterior a $n$, es $n + 1$, es decir, $n^* = n + 1$. Como ya se señaló, el conjunto de los números naturales se denota por $N$.

Observemos que aunque la unidad es única, como fue demostrado anteriormente, se pueden analizar varios ejemplares de unidad (como en general, varios ejemplares de cualquier elemento de cierto conjunto) al menos para que sea posible escribir la expresión $1 + 1$.

Los números $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ se llaman *números enteros*. El conjunto de los números enteros usualmente se denota por $Z$.

Más adelante se mostrará (véase la propiedad 8° en el p. 2.3*), que de todas las propiedades de los números reales enumeradas en el p. 2.1 se deriva que $1 > 0$.

Los números del tipo $m/n$ donde $m$ y $n$ son enteros y $n \neq 0$, se llaman *números* racionales. El conjunto de los números racionales se denota usualmente por $Q$. Los números reales que no son racionales se llaman *irracionales*. Su conjunto se denota por $I$.

Supongamos que se da el número real $a$ y el natural $n$. El número $a$ multiplicado $n$ veces por sí mismo se llama *potencia* $n$-ésima del número $a$ y se denota por $a^n$. De esta forma

$$a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ veces}}.$$

El número $b$ tal que $b^n = a$ (si por supuesto existe) se llama *raíz de* $n$-ésimo grado del número $a$ y se denota por $\sqrt[n]{a}$ ó $a^{1/n}$, es decir,

$$(\sqrt[n]{a})^n \overset{\text{def}}{=} a.$$

Por la definición se supone que $a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$ y para cualquier $n \in N$ $a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{a^n}$.

Si $a \geqslant 0$, $b = \sqrt[n]{a}$ y $b \geqslant 0$, entonces el número $b$ se llama *valor aritmético de la raíz de* $n$-ésimo grado del número $a$. En el futuro por raíz de un número real no negativo entenderemos el valor aritmético de la raíz, si no se acuerda algo diferente.

Señalemos ahora varias propiedades referentes a la relación entre las operaciones de suma y multiplicación.

13°. *Para los números* $a$, $b$ y $c$ *cualesquiera tiene lugar la igualdad*

$$a(b - c) = ab - ac.$$

En realidad $a(b - c) = a(b - c) + ac - ac = a(b - c + c) - ac = ab - ac$. □

14°. *Para cualquier número a se cumple la igualdad*

$$a \cdot 0 = 0.$$

En efecto, tomemos cualquier $b$, entonces $b - b = 0$ (véase la propiedad 4°). Por esto, según la propiedad 13° tendremos:

$$a \cdot (0) = a(b - b) = ab - ab = 0. \square$$

De la propiedad 14°, a propósito, se deriva que la afirmación $1 \neq 0$, cuando existen las otras propiedades analizadas I — III, es equivalente a que existe al menos un número diferente de cero. Evidentemente, es suficiente mostrar, que si existe un número $a \neq 0$, entonces $1 \neq 0$. Demostremos esto: supongamos que existe $a \neq 0$, entonces de la igualdad $a \cdot 1 = a$ se deduce que $1 \neq 0$ ya que en el caso contrario, de acuerdo a la propiedad 14°, tendría lugar la igualdad $a = 0$.

15°. *Si $ab = 0$, entonces al menos uno de los factores $a$ y $b$ es igual a cero.*

Sea, por ejemplo, $a \neq 0$, entonces multiplicando la igualdad $ab = 0$ por $1/a$ obtendremos $\frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a} \cdot 0$, de donde $\left(\frac{1}{a} a\right)b = 0$, por consiguiente $b = 0$. $\square$

16°. *Para cualesquiera números a y b tenemos:*

$$(-a)b = -ab, (-a)(-b) = ab,$$

*en particular*, $(-1)\, a = -a$.

En realidad,

$$(-a)b = (-a)b + ab - ab = (-a + a)b - ab = -ab. \square$$

Utilizando esta igualdad tenemos

$$(-a)(-b) = -a(-b) = (-1)[a(-b)] = (-1)(-ab) = -(-ab) = ab. \square$$

De las propiedades I, II y III de los números reales y de los corolarios citados anteriormente, se pueden obtener las reglas de las operaciones aritméticas con fracciones, es decir, con los números del tipo $a/b$, $b \neq 0$, $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$.

17°. *La igualdad*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

$b \neq 0$, $d \neq 0$ *es válida si y sólo si* $ad = bc$.

**Corolario (propiedad fundamental de una fracción).** *Cualquiera que sea la fracción $a/b$, $b \neq 0$ y el número $c \neq 0$, tiene lugar la igualdad*

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

En efecto, multiplicando ambos miembros de la igualdad $a/b = c/d$ por $bd$ y utilizando la definición de la división, tendremos la siguiente cadena de igualdades equivalentes

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}\, bd = \frac{c}{d}\, db \Leftrightarrow a \circ \frac{1}{b}\, bd = c\frac{1}{d}\, db \Leftrightarrow ad = cb. \square$$

18° *La suma de fracciones se realiza por la regla*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0.$$

Demostremos la validez de esta igualdad. Utilizando la definición de división, la distributividad de la suma con respecto a la multiplicación y la propiedad fundamental de una fracción obtendremos:

$$\frac{ad + bc}{bd} = (ad + bc)\,\frac{1}{bd} = ad\,\frac{1}{bd} + bc\,\frac{1}{bd} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}\,.\ \square$$

19°. *La multiplicación de fracciones se realiza por la regla*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0.$$

Utilizando la definición de división y la propiedad 11° obtendremos

$$\frac{ac}{bd} = ac \cdot ac \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)\left(c \cdot \frac{1}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\,.\ \square$$

20°. *El elemento inverso a la fracción $a/b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ es la fracción $b/a$, es decir,* $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Esto se deduce directamente de la regla de la multiplicación de fracciones.

21°. *La división de fracciones se realiza por la regla*

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0.$$

Utilizando la definición de división, la propiedad anterior y la regla de multiplicación de fracciones tendremos:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.\ \square$$

Deduzcamos ahora de las propiedades obtenidas las reglas de las operaciones con potencias.

22°. *Si $m$ y $n$ son números enteros y además en el caso de $m \leqslant 0$ ó $n \leqslant 0$ tiene lugar $a \neq 0$, entonces*

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Si $m = 0$ ó $n = 0$, entonces la validez de las fórmulas es evidente.

En el caso cuando $m$ y $n$ son números naturales, entonces por la definición de potencia.

$$a^m a^n = \underbrace{a \ldots\ldots a}_{m \text{ veces}}\,\underbrace{a \ldots\ldots a}_{n \text{ veces}} = a^{m+n}.$$

Si $m < 0$, $n > 0$ y $a \neq 0$, entonces, haciendo $k = -m$ y utilizando la propiedad fundamental de una fracción (la posibilidad de la división simultánea del numerador y del denominador de una fracción por un mismo número diferente de cero sin alterar la igualdad), para $k \leqslant n$ tendremos

$$a^m a^n = a^{-k}a^n = \frac{a^n}{a^k} = \frac{\overbrace{a \ldots\ldots a}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{a \ldots\ldots a}_{k \text{ veces}}} = a^{n-k} = a^{m+n}$$

y para $k > n$:
$$a^m a^n = \frac{a^n}{a^k} = \frac{1}{a^{k-n}} = a^{n-k} = a^{m+n}.$$

Si $m < 0, n < 0$ y $a \neq 0$, entonces, haciendo $k = -m, l = -n$ y utilizando la propiedad 11° obtendremos

$$a^m a^n = a^{-k}a^{-l} = \frac{1}{a^k}\cdot\frac{1}{a^l} = \frac{1}{a^{k+l}} = a^{-(k+l)} = a^{m+n}.$$

De forma semejante se comprueba la segunda fórmula de la propiedad 22°. □

Es fácil mostrar que las propiedades $\mathrm{I}_1$, $\mathrm{I}_2$, $\mathrm{II}_1$, $\mathrm{II}_2$ y III se extienden por inducción a cualquier número finito de términos. En calidad de ejemplo mostremos que para cualesquiera números $a_1, a_2, \ldots, a_n (n \geqslant 2)$ y $b$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)b = a_1 b + a_2 b + \ldots + a_n b. \tag{2.4}$$

En realidad, para $n = 2$ esta fórmula es válida de acuerdo con la propiedad III.

Sea ahora (2.4) válida para $n = k$, mostremos que será válida también para $n = k + 1$. Aplicando primero la propiedad $\mathrm{I}_2$ para $k + 1$ sumandos (considerando que ya está demostrada), después la propiedad III y utilizando la hipótesis de inducción, obtendremos

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1})b &= [(a_1 + \ldots + a_k) + a_{k+1}]b = \\ &= (a_1 + \ldots + a_k)b + a_{k+1}b = a_1 b + \ldots + a_k b + a_{k+1} b.\end{aligned}$$

De la fórmula (2.4) en el caso $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ se deduce que

$$nb = \underbrace{b + \ldots + b}_{n \text{ veces}},$$

es decir, que la multiplicación de un número por un número natural $n$ se reduce a la suma de este número $n$ veces.

OBSERVACIÓN. Señalemos que las propiedades I — III del p. 2.1 no describen totalmente a los números reales, en el sentido de que existen otros conjuntos diferentes del conjunto de los números reales, que satisfacen las mismas propiedades I — III si en ellos la palabra "número" en todos los casos se sustituye por la palabra "elemento" del conjunto analizado. Precisamente en este sentido, en el futuro por doquier se entiende la expresión "un conjunto que satisface cualquiera de las propiedades I — V".

Ejemplos de conjuntos que satisfacen las condiciones I, II y III son sólo números racionales o números complejos, conocidos de la matemática elemental, así como el conjunto de las funciones racionales, es decir, las funciones del tipo $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Los elementos de todos los conjuntos enumerados se pueden sumar y multiplicar y además estas operaciones se subordinan a las condiciones I, II y III. Los conjuntos que satisfacen estas exigencias y que contienen al menos un elemento diferente de cero se llaman *campos*.

De esta forma, los números racionales, los números reales, los números complejos y las funciones racionales forman campos.

Analicemos ahora las propiedades que distinguen al campo de los números reales entre todos los otros campos. Una de tales propiedades es la propiedad de ordenamiento de sus elementos.

## 2.3*. PROPIEDAD DE ORDENAMIENTO

Deduzcamos algunas consecuencias de las propiedades de ordenamiento IV y de las propiedades de la suma y la multiplicación I, II y III. Ante todo recordemos el concepto de comparación de la magnitud de dos números; el número $a$ se llama número mayor que el número $b : a > b$, si $a - b > 0$.

Tienen lugar las siguientes propiedades de la comparación de las magnitudes de los números reales.

1°. *Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.*

Esta propiedad se llama *transitividad* de la relación de orden.

Si $a > b$ y $b > c$, entonces por definición, esto significa que $a - b > 0$ y $b - c > 0$. Sumando estas desigualdades, según $\text{IV}_1$ obtenemos: $(a - b) + (b - c) > 0$, es decir, $a - c > 0$. Esto significa que $a > c$. □

2°. *Si $a > b$, entonces para cualquier número $c$ tenemos $a + c > b + c$.*

En realidad, la desigualdad $a > b$ significa que $a - b > 0$. Por cuanto según la propiedad 5° del p. 2.2* $a - b = a + c - c - b = (a + c) - (b + c)$, entonces $(a + c) - (b + c) > 0$ y por consiguiente $a + c > b + c$. □

3°. *Para dos números cualesquiera $a$ y $b$ se tiene exactamente una de las tres relaciones de orden $a > b$, $a = b$ ó $a < b$.*

En efecto, sean dados dos números $a$ y $b$. Para su diferencia $a - b$ según la propiedad IV tiene lugar exactamente una de las relaciones $a - b > 0$, $a - b = 0$ ó $0 > a - b$.

Si $a - b > 0$, entonces por definición $a > b$. Si $a - b = 0$, entonces sumándole a ambos miembros de la igualdad el númbero $b$, obtenemos $a = b$. Finalmente si $0 > a - b$, entonces, sumándole sucesivamente a ambos miembros de la desigualdad $0 > a - b$ los números $-a$ y $b$ (véase la propiedad anterior), obtendremos $b - a > 0$. Esto significa que $b > a$ o lo que es lo mismo $a < b$. □

La relación $a < b$ se lee "$a$ es menor que $b$". La relación $a = b$ se lee "$a$ es igual a $b$". La relación $a > b$ se lee "$a$ es mayor que $b$".

La existencia de la relación transitiva de orden "mayor que", "menor que" entre dos números cualesquiera se llama usualmente *propiedad de ordenamiento del conjunto de los números reales o relación de orden.*

La escritura $a \leqslant b$ es equivalente a la escritura $b \geqslant a$ y significa que o bien $a = b$ o bien $a < b$. Por ejemplo, se puede escribir $2 \leqslant 2$, $2 \leqslant 5$. Naturalmente se puede escribir más exacto $2 = 2$, $2 < 5$, no obstante, las desigualdades $2 \leqslant 2$ y $2 \leqslant 5$ también son ciertas ya que denotan que "dos no es mayor que dos" y respectivamente que "dos no es mayor que cinco".

Las relaciones $a < b$, $a \leqslant b$, $a > b$, $a \geqslant b$ se llaman *desigualdades*. Las desigualdades $a < b$ y $a > b$ se llaman *desigualdades estrictas*.

4°. *Si $a < b$, entonces $-a > -b$.*

*En particular, si $a > 0$, entonces $-a < 0$ y si $a < 0$, entonces $-a > 0$.*

En efecto, de $a < b$ por definición tenemos $b - a > 0$. Por esto $-a = -a + b + (-b) = (b - a) + (-b) > 0 + (-b) = -b$. □

5°. *Si $a < b$ y $c \leqslant d$, entonces $a + c < b + d$, es decir, se puede efectuar la suma término por término de las desigualdades de un signo.*

En realidad, si $a < b$ y $c \leqslant d$, entonces, según la propiedad 2° de este punto $a + c < b + c$ y $c + b \leqslant d + b$, por eso en virtud de la transitividad del ordenamiento tenemos $a + c < b + d$. □

6°. *Si $a < b$ y $c \geqslant d$, entonces $a - c < b - d$, es decir, las desigualdades de signos opuestos se pueden restar en el sentido indicado.*

En efecto, de $c \geqslant d$ tenemos según la propiedad 4° de este punto $-c \leqslant -d$. Sumando las desigualdades $a < b$ y $-c \leqslant -d$ obtendremos $a - c < b - d$. □

7°. *Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.*

En realidad, según la propiedad 4° de este punto $-c > 0$, por la propiedad $IV_2$: $a(-c) < b(-c)$. De aquí, por la propiedad 16° del p. 2.2*, obtendremos $-ac < -bc$ y por consiguiente (véase la propiedad 4° de este punto) $ac > bc$. □

De la propiedad 7° demostrada ahora (para $a = 0$) y de la propiedad $IV_2$ se deriva la regla de los signos de la multiplicación de números reales: el *producto de dos factores del mismo signo* (o bien positivos simultáneamente o bien negativos simultáneamente) *es positivo y el producto de dos factores de signos desiguales* (uno de ellos es positivo y el otro, negativo) *es negativo*.

8°. *En un campo ordenado siempre es válida la desigualdad* $1 > 0$.

En realidad, ya vimos (véase la observación después de la propiedad 14° en el p. 2.2*), que de la condición de existencia del elemento $a \neq 0$ (esta condición se incluye en la definición de campo, véase el final del p. 2.2*) se deduce que $1 \neq 0$. Mostremos que la desigualdad $1 < 0$ no es posible. Supongamos lo contrario, o sea $1 < 0$. Tomemos cualquier $a > 0$. Por la definición de la unidad tenemos $a \cdot 1 = a$. Por la regla de los signos, el producto del número positivo $a$ y del número negativo 1, según nuestra suposición, es un número negativo, es decir, $a < 0$, lo que es una contradicción.

De nuevo los números reales no son el único objeto que satisface los axiomas I — IV. Los conjuntos para los cuales son válidos estos axiomas se llaman *campos ordenados*. Un ejemplo de campo ordenado diferente del campo de los números reales es el campo de los números racionales. No obstante, ni el campo de los números complejos ni el campo de las fracciones racionales son campos ordenados.

En cualquier campo ordenado se puede introducir el concepto de valor absoluto de sus elementos. En su definición y en el estudio de sus propiedades, para la uniformidad de la exprosición hablaremos siempre de números y no de los elementos de un campo ordenado arbitrario.

Para cualquier número $a$, el número denotado por $|a|$ y definido por la fórmula

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geqslant 0, \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

se llama *valor absoluto* del número $a$ o lo que es lo mismo, su *módulo*.

Señalemos una serie de propiedades del valor absoluto.

1°. *Para cualquier número a se cumplen las desigualdades*

$$|a| \geqslant 0, \tag{2.5}$$

$$|a| = |-a|, \tag{2.6}$$

$$a \leqslant |a|, \ -a \leqslant |a|. \tag{2.7}$$

Demostremos la desigualdad (2.5). Si $a \geqslant 0$, entonces $|a| = a \geqslant 0$, si $a < 0$, entonces $|a| = -a > 0$ (propiedad 4° del p. 2.3*). □

Demostremos la igualdad (2.6). Si $a \geqslant 0$, entonces $|a| = a$ y $-a \leqslant 0$ por eso según la definición de valor absoluto y la propiedad 3° del p. 2.2* obtendremos $|-a| = -(-a) = a = |a|$. Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$ y $-a > 0$; esto significa que $|-a| = -a$. □

Demostremos la desigualdad (2.7). Si $a \geqslant 0$, entonces $a = |a|$ y $-a \leqslant 0 \leqslant \leqslant a = |a|$, es decir, (2.7) se cumple. Si $a < 0$, entonces $a < 0 < -a = |a|$, es decir, (2.7) también se cumple. □

2°. *Para cualesquiera números a y b*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \tag{2.8}$$

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|. \tag{2.9}$$

Demostremos estas desigualdades. Según (2.7) tenemos:

$$a \leqslant |a|, \quad -a \leqslant |a|, \quad b \leqslant |b|, \quad -b \leqslant |b|.$$

De aquí, por la propiedad 5° del p. 2.3* y la propiedad 5° del p. 2.2*

$$a + b \leqslant |a| + |b|, \quad -(a + b) \leqslant |a| + |b|.$$

Uno de los números $a + b$ o $-(a + b)$ es no negativo y por consiguiente coincide con $|a + b|$. La desigualdad (2.8) queda demostrada.

La desigualdad (2.9) es una consecuencia de la (2.8). En realidad

$$|a| - |b| = |(a - b) + b| - |b| \leqslant |a - b| + |b| - |b| = |a - b|;$$

análogamente $|b| - |a| \leqslant |b - a| = |a - b|$.

Por la propiedad 5° del p. 2.2* $|b| - |a| = -(|a| - |b|)$. Uno de los números $|a| - |b|$ y $-(|a| - |b|)$ coincide con $||a| - |b||$. La desigualdad (2.9) también queda demostrada. □

3°. *Para cualesquiera números a y b se cumple la igualdad* $|ab| = |a||b|$.

Esto se deduce inmediatamente de la definición de valor absoluto, de la propiedad 16° del p. 2.2* y de la regla de los signos en la multiplicación.

Veamos ahora la propiedad de continuidad que distingue el campo de los números reales entre todos los demás campos ordenados.

3*

## 2.4.* PROPIEDAD DE CONTINUIDAD DE LOS NÚMEROS REALES

Un campo ordenado que satisface la propiedad V se llama *campo ordenado continuo.* El campo de los números racionales ya no es un campo ordenado continuo: en él se tienen los conjuntos $A$ y $B$; para cualesquiera elementos $a \in A$ y $b \in B$ se cumple la desigualdad $a < b$ y al mismo tiempo no existe un número racional $r$ tal que para todos los $a \in A$ y $b \in B$ se cumpla la relación $a \leqslant r \leqslant b$. Se puede mostrar, por ejemplo, que poseen esta propiedad el conjunto $B$ compuesto por todos los números positivos $r$ que satisfacen la desigualdad $r^2 > 2$ y el conjunto $A$ al cual pertenecen todos los números racionales restantes.

Resulta que el conjunto de los números reales es en cierto sentido el único campo ordenado continuo, más preciso el único salvo un isomorfismo. Aclaremos qué significa esto.

*Dos campos ordenados* $\mathscr{P}$ *y* $\mathscr{P}'$ *se llaman isomorfos si existe una relación biunívoca de sus elementos* $f\colon \mathscr{P} \to \mathscr{P}'$ (véase el p. 1.2*), *tal que para dos elementos cualesquiera* $x \in \mathscr{P}$ *e* $y \in \mathscr{P}$ $x < y$, *se cumplen las condiciones* $f(x) < f(y)$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$.

Más brevemente, los campos ordenados $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}'$ se llaman *isomorfos* si existe una aplicación biunívoca de uno de ellos sobre el otro (biyección) que conserva el ordenamiento, la adición y la multiplicación de sus elementos.

Se puede mostrar que todos los campos ordenados continuos son isomorfos entre sí. Con esto se explica que en la literatura matemática se encuentran diferentes construcciones del conjunto de los números reales, que parten de diferentes objetos concretos, llevando todas ellas a conjuntos no triviales de elementos, que cumplen las propiedades I — V, es decir, a campos ordenados continuos y por consiguiente a conjuntos isomorfos. De esta forma llegamos a la siguiente definición del conjunto de los números reales.

**Definición 2'.** *Se llama conjunto de los números reales un campo ordenado continuo.*

El campo de los números racionales, como ya se señaló anteriormente, no posee la propiedad de la continuidad y el campo de los números reales sí. Por esto, a ciencia cierta, existen números reales que no son racionales, es decir, existen los números irracionales. De esta forma, el conjunto de los números reales se puede analizar como una extensión sustancial del conjunto de los números racionales, sustancial en el sentido de que el conjunto de los números racionales es un subconjunto propio del conjunto de los números reales. En esta extensión se conservan la propiedad de ordenamiento y las operaciones de adición y multiplicación. Resulta que los números reales, a diferencia de los racionales ya no se pueden extender hasta un conjunto mayor de forma tal que se conserven las propiedades señaladas (el ordenamiento y las operaciones de adición y multiplicación).

Esta propiedad se llama *propiedad de completitud de los números reales con respecto a su ordenamiento, a la adición y la multiplicación.*

## 2.5.* CORTADURAS EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

La propiedad de continuidad de los números reales se puede enunciar en diferentes términos. Aquí será analizado el enunciado de esta propiedad en los términos de las así llamadas cortaduras de los números reales. Ante todo definamos este concepto.

**Definición 1.** *Dos conjuntos $A \subset R$ y $B \subset R$ se llaman cortadura del conjunto de los números reales $R$, si*

1°) *la unión de los conjuntos $A$ y $B$ comprende todo el conjunto de los números reales $R$, $A \cup B = R$;*

2°) *cada uno de los conjuntos $A$ y $B$ no es vacío, $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$;*

3°) *cada número del conjunto $A$ es menor que cualquier número del conjunto $B$: si $a \in A$, $b \in B$, entonces $a < b$.*

La propiedad 1° significa que cada número real pertenece al menos a uno de los conjuntos $A$ y $B$.

De la propiedad 3° evidentemente se deduce que los conjuntos $A$ y $B$ no se intersecan: $A \cap B = \varnothing$. En efecto, si se encontrara un elemento $x \in A \cap B$, es decir, $x \in A$ y $x \in B$, entonces de la propiedad 3° se deduciría que $x < x$.

La cortadura del conjunto de los números reales formada por los conjuntos $A$ y $B$ se denota por $A|B$. El conjunto $A$ se llama clase *inferior* y el conjunto $B$ clase *superior* de la cortadura dada.

Ejemplos simples de cortaduras se pueden obtener de la siguiente forma. Fijemos cualquier número $\alpha \in R$. Llevemos inicialmente al conjunto $A$ todos los números $x \leqslant \alpha$ y al conjunto $B$, todos los números $y > \alpha$

$$A \overset{\text{def}}{=} \{x : x \leqslant \alpha\}, \quad B \overset{\text{def}}{=} \{y : y > \alpha\}. \tag{2.10}$$

Los conjuntos $A$ y $B$ así definidos forman una cortadura, lo cual se establece con una comprobación directa del cumplimiento de las condiciones 1°, 2° y 3° de la definición 1.

Se puede actuar de otra forma: llevar al conjunto $A$ todos los números $x < \alpha$ y al conjunto $B$ todos los números $y \geqslant \alpha$:

$$A \overset{\text{def}}{=} \{x : x < \alpha\}, \quad B \overset{\text{def}}{=} \{y : y \geqslant \alpha\}. \tag{2.11}$$

De nuevo, los conjuntos $A$ y $B$ forman una cortadura. En ambos casos (2.10) y (2.11) se dice que la cortadura la realiza el número $\alpha$ y se escribe $\alpha = A|B$.

Señalemos dos propiedades de las cortaduras realizadas por cierto número.

1°. *En el caso* (2.1) *en la clase A hay un número máximo que es el número $\alpha$ y en la clase B no hay uno mínimo.*

*En el caso* (2.2) *en la clase A no bay máximo y en la clase B hay un número mínimo que es el número $\alpha$.*

Analicemos, por ejemplo, el primer caso (2.10). Entonces de la primera fórmula de (2.10) que define el conjunto $A$ se ve claramente que $\alpha$ es el número máximo en la clase $A$.

Mostremos que en el conjunto $B$ no hay un número mínimo. Supongamos lo contrario: supongamos que en $B$ hay un número mínimo. Denotémoslo por $\beta$. Por cuanto $\beta \in B$, entonces por la segunda fórmula de (2.10) $\alpha < \beta$, por consiguiente $\alpha + \alpha < \alpha + \beta$, es decir, $\alpha < \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, de donde, de nuevo, por la segunda fór-

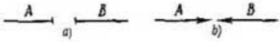


FIG. 4

mula de (2.10) obtenemos que $\frac{\alpha+\beta}{2} \in B$. Análogamente, de $\alpha < \beta$ tenemos $\alpha + \beta < \beta + \beta$, es decir, $\frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ y ya que $\beta$ es el número mínimo en la clase $B$, entonces, $\frac{\alpha+\beta}{2} \in A$. La contradicción obtenida demuestra la afirmación.

2°. *El número que realiza la cortadura es único.*

En realidad, supongamos que existe una cortadura que está definida por dos números distintos: $\alpha = A|B$ y $\beta = A|B$. Sea, por ejemplo, $\alpha < \beta$. Entonces, como vimos en la demostración de la propiedad anterior, $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$. De la desigualdad $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$ se deduce que tanto en el caso (2.10) como en el (2.11) tiene lugar $\frac{\alpha+\beta}{2} \in B$. Análogamente, de la desigualdad $\frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ se deduce que $\frac{\alpha+\beta}{2} \in A$. Esto contradice que los conjuntos $A$ y $B$ no se intersecan.

La propiedad de continuidad de los números reales consiste en que no existe ninguna cortadura de los números reales fuera de aquellas que se realizan por cierto número real.

Analicemos precisamente la siguiente propiedad.

V°. Para cada cortadura $A|B$ del conjunto de los números reales existe el número $\alpha$ que realiza esta cortadura

$$\alpha = A|B.$$

Este número, de acuerdo con lo dicho anteriormente, es o el mayor en la clase inferior, entonces, en la superior no hay uno mínimo, o el menor en la clase superior, entonces en la inferior no hay uno máximo.

De esta forma, si $A|B$ es una cortadura del conjunto de los números reales, entonces por la propiedad de continuidad enunciada en la forma V* no puede ocurrir que en la clase $A$ haya un número máximo y al mismo tiempo en la clase $B$ haya uno mínimo (fig. 4, *a*). No puede ocurrir tampoco que en la clase $A$ no haya máximo y al mismo tiempo en la clase $B$ no haya un número mínimo (fig. 4, *b*). Dicho correctamente, la continuidad de los números reales significa que en su conjunto no hay ni saltos ni lagunas, más breve, no hay vacíos.

Una cortadura $A|B$ geométricamente significa una partición de la recta numérica en dos rayos que tienen el mismo origen y que van en sentidos opuestos y además uno de ellos contiene su origen común (rayo cerrado) y otro no (rayo abierto).

La propiedad de continuidad de los números reales enunciada en V, de igual forma que la propiedad V* equivalente a ella, se llama *principio de continuidad de los* *números reales según Dedekind**). En el futuro nos encontraremos con otros enfoques del concepto de continuidad del conjunto de los números reales (véase el p. 3.6).

Mostremos que la propiedad V* es equivalente a la propiedad V.

Supongamos que inicialmente se cumple la propiedad V y se da cualquier cortadura $A|B$. Por la tercera propiedad de las cortaduras, para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$ se cumple la desigualdad $a < b$, por lo que la pareja de conjuntos $A$ y $B$ satisface la condición enunciada en la propiedad V*. Por consiguiente, por esta propiedad, existe un número $\alpha$ tal que para todos los $a \in A$ y $b \in B$ se cumple la relación $a \leqslant \alpha \leqslant b$. El número $\alpha$ por la primera propiedad de las cortaduras pertenece a una de las clases $A$ o $B$. Si $\alpha \in A$, entonces para todos los $a \in A$ y $b \in B$ se cumple la desigualdad $a \leqslant \alpha < b$, es decir, el número $\alpha$ realiza la cortadura $A|B$ y es el número mayor en la clase inferior. Análogamente, si $\alpha \in B$ entonces el número $\alpha$ también realiza la cortadura $A|B$ y es el menor en la clase superior $B$.

Supongamos ahora que al contrario se cumple la condición V* y están dados dos conjuntos no vacíos $A \subset \boldsymbol{R}$ y $B \subset \boldsymbol{R}$ tales que para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$ se cumple la desigualdad $a \leqslant b$. Denotemos por $B^*$ el conjunto de números tal que cualquiera que sea $b^* \in B^*$ para cualquier $a \in A$ se cumple la desigualdad $a \leqslant b^*$ (el número $b^*$ que posee esta condición se llama número que acota superiormente al conjunto $A$). Evidentemente,

$$B \subset B^*. \tag{2.12}$$

Por $A^*$ denotemos todos los demás números reales:

$$A^* = \boldsymbol{R} \setminus B^*.$$

Mostremos que los conjuntos $A^*$ y $B^*$ forman una cortadura en el conjunto de los números reales y que el número $\alpha$ que realiza esta cortadura satisface la condición indicada en el enunciado de la propiedad V para los conjuntos dados $A$ y $B$.

Ante todo comprobemos que los conjuntos $A^*$ y $B^*$ satisfacen todas las condiciones que deben satisfacer los conjuntos que forman una cortadura. En efecto, por cuanto al conjunto $A^*$ se llevaron todos los números que no cayeron en el conjunto $B^*$, entonces su unión $A^* \cup B^*$ es el conjunto de todos los números reales $\boldsymbol{R}$:

$$A^* \cup B^* = \boldsymbol{R}. \tag{2.13}$$

El conjunto $B^*$ a ciencia cierta no es vacío por la inclusión (2.12), ya que por condición, el conjunto $B$ no es vacío. Así pues

$$B^* \neq \varnothing. \tag{2.14}$$

Demostremos que el conjunto $A^*$ tampoco es vacío. Por condición, el conjunto $A$ no es vacío**). Esto significa que existe al menos un número $a \in A$. Entonces, el número $a - 1$, a ciencia cierta, no pertenece al conjunto $B^*$, ya que $a - 1 < a$,

*) R. Dedekind (1831—1916), matemático alemán.

**) Observemos que no necesariamente $A \subset A^*$. Más aún, en el caso cuando el conjunto $A$ está compuesto por un punto $a \in B$ (esto es permisible), los conjuntos $A$ y $A^*$ incluso no se intersecan ya que en este caso $A = \{a\} \subset B \subset B^*$.

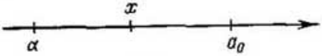


FIG. 5

$a \in A$, es decir, en el conjunto $A$ se encontró un elemento mayor que $a - 1$. De esta forma $a - 1 \notin B^*$, ya que el conjunto $B^*$ está compuesto sólo por los números mayores que todos los números de $A$ o iguales a algunos de ellos. Por esto, $a - 1 \in A^*$, ya que al conjunto $A^*$ pertenecen todos los números que no entran en $B^*$. Así pues, el conjunto $A^*$ tampoco es vacío:

$$A^* \neq \varnothing. \tag{2.15}$$

Demostremos ahora que cada número $a^* \in A^*$ es menor que cualquier número $b^* \in B^*$:

$$a^* < b^*. \tag{2.16}$$

Supongamos lo contrario: supongamos que se encuentran los números $a^* \in A^*$ y $b^* \in B^*$ tales que $a^* \geqslant b^*$. Entonces, por la definición del conjunto $B^*$, para cualquier $a \in A$ se cumple la desigualdad $a \leqslant b^*$ y por consiguiente la desigualdad $a \leqslant a^*$. Esto significa que $a^* \in B^*$. De esta forma, el número $a^*$ simultáneamente pertenece tanto al conjunto $A^*$ como al conjunto $B^*$. Esto no es posible, ya que al conjunto $A^*$ fueron llevados aquellos números que no se contienen en el conjunto $B^*$. La contradicción obtenida muestra que la desigualdad $a^* \geqslant b^*$ para la condición $a^* \in A$, $b^* \in B$ no es posible y por tanto se cumple la desigualdad (2.16).

El cumplimiento de las condiciones (2.13) — (2.16) significa que los conjuntos $A^*$ y $B^*$ efectivamente forman una cortadura en el conjunto de los números reales (véase la definición 1).

Sea $\alpha$ el número que realiza esta cortadura: $\alpha = A^*|B^*$. Tal número $\alpha$ existe por la suposición sobre el cumplimiento de la propiedad V*. Mostremos que $\alpha \in B^*$. Si esto no fuera así, entonces se encontraría un número $a_0 \in A$ tal que $a_0 > \alpha$. Escojamos cualquier $x$ de forma tal que $\alpha < x < a_0$ (fig. 5). Por cuanto $x > \alpha$ y $\alpha = A^*|B^*$, entonces $x \in B^*$ y por consiguiente, para cualquier $a \in A$ debe cumplirse la desigualdad $x \geqslant a$, ya que $B^*$ está compuesto sólo por tales números. No obstante, esta desigualdad no se cumple para $a = a_0$. La contradicción obtenida demuestra que $\alpha \in B^*$ y por esto el número $\alpha$ es el menor en la clase superior $B^*$, pero $B < B^*$, por consiguiente para cualesquiera $b \in B$ se cumple la desigualdad $\alpha \leqslant b$. Finalmente, por la propia definición del conjunto $B^*$, de la inculusión $\alpha \in B^*$ se deriva que para cualquier número $a \in A$ es válida la desigualdad $a \leqslant \alpha$.

Así pues, para todos los $a \in A$, $b \in B$ tiene lugar la desigualdad

$$a \leqslant \alpha \leqslant b.$$

Esto significa que la presencia de la propiedad V* conlleva la existencia de la propiedad V.

## 2.6*. POTENCIAS RACIONALES DE LOS NÚMEROS REALES

Señalemos que en el conjunto de los números reales para cualquier número $a \geqslant 0$ y cualquier número natural $n$ existe siempre un número $b \geqslant 0$ que es la raíz de $n$-ésimo grado de $a$, es decir, existe $\sqrt[n]{a}$. No nos detendremos por ahora en la demostración de esta afirmación, aunque se podría realizar aquí, por ejemplo, sobre la base del concepto de cortadura, y la demostraremos más adelante (véase el ejemplo en el p. 6.3). Claro, en algunos casos, la raíz puede existir para $a < 0$. Por ejemplo, existe $\sqrt[3]{-8} = -2$, pero ya la raíz $\sqrt{-4}$ no existe, en el sentido de que no existe el número real $b = \sqrt{-4}$, ya que en el caso contrario sería válida la igualdad $b^2 = -4$ que contradice la regla de los signos en la multiplicación.

Enunciemos las propiedades de la raíz. Sean $n$ y $m$ números naturales y $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, entonces son válidas las fórmulas siguientes:

1°) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$; 4°) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$;

2°) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$, 5°) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

3°) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$;

Todas estas fórmulas se demuestran por un mismo método. Demostremos por ejemplo, la primera.

Sea $b = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$. Por la definición de raíz y por la propiedad 22° del p. 2.2* esto significa que $b^n = \sqrt[m]{a}$ y que $b^{mn} = a$. De aquí por la misma definición de raíz, se deduce que $b = \sqrt[mn]{a}$. De esta forma tenemos

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = b = \sqrt[mn]{a}. \ \square$$

Si $a < 0$ y todas las raíces que aparecen en la fórmula 1) existen, entonces también es válida y la demostración llevada a cabo mantiene su vigencia. En general, si $a < 0$ y todas las raíces que aparecen en cualquiera de las fórmulas 1) — 5) existen, entonces son válidas en este caso.

Teniendo el concepto de potencia y raíz enteras, definamos el concepto de potencia racional. Sea $a > 0$ y $r \in Q$, es decir, $r = m/n$, $m \in Z$, $n \in Z$, $n \neq 0$.

La potencia $a^r$ se define con la igualdad

$$a^r \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Señalemos las propiedades fundamentales de la potencia racional. Sea $a > 0$, $b > 0$, $r_1 \in Q$, $r_2 \in Q$, $r \in Q$, entonces

6°) $a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$;

7°) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;

8°) $(ab)^r = a^r b^r$.

Demostremos, por ejemplo, la fórmula 6°). Si $r_1 = p/q$, $r_2 = m/n$, $q \neq 0$, $n \neq 0$, $p, q, m, n \in Z$, entonces, utilizando la definición de potencia racional, las propiedades de las raíces 2° y 3° y la propiedad 22 del p. 2.2* obtendremos:

$$a^{r_1}a^{r_2} = a^{p/q}a^{m/n} = \sqrt[q]{a^p}\,\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{np}}\,\sqrt[nq]{a^{mq}} =$$
$$= \sqrt[nq]{a^{np+mq}} = a^{\frac{np+mq}{nq}} = a^{p/q+\frac{m}{n}} = a^{r_1+r_2}. \ \square$$

De la propiedad 8° se deduce que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

En efecto,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = (ab^{-1})^r = a^r(b^{-1})^r = a^r b^{-r} = \frac{a^r}{b^r}.\square$$

Ejercicio. Sea $B = \{x : x^2 > 2,\ x > 0,\ x \in Q\}$ y $A = Q \setminus B$. Demuéstrese que los conjuntos $A$ y $B$ forman una cortadura en el campo de los números racionales $Q$ y que esta cortadura no está definida por ningún número racional.

# § 3. CONJUNTOS NUMÉRICOS

## 3.1. RECTA NUMÉRICA EXTENDIDA

A menudo es cómodo completar el conjunto $R$ de los números reales con los elementos que se denotan por $+\infty$ y $-\infty$ y que se llaman respectivamente *más y menos infinito*, considerando que por definición

$$-\infty < +\infty,$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$

$$(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty.$$

Pero, por ejemplo, las operaciones $(+\infty) + (-\infty)$ o $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ ya no están definidas (véase también el p. 4.9). Además, para cualquier $a \in R$, por definición, se considera que se cumple la igualdad $\quad -\infty < a < +\infty$
y que son válidas las operaciones

$$a + (+\infty) = +\infty + a = +\infty, \quad -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty;$$

para $a > 0$ $\quad a(+\infty) = (+\infty)a = +\infty, \quad a(-\infty) = (-\infty)a = -\infty;$

para $a < 0$ $\quad a(+\infty) = (+\infty)a = -\infty, \quad a(-\infty) = (-\infty)a = +\infty.$

Los infinitos $+\infty$ y $-\infty$ se llaman a veces "*números infinitos*" a diferencia de los números reales $a \in R$ que se llaman a su vez *números finitos*.

En lo adelante, por número se entenderá siempre un número real finito si no se acuerda algo diferente.

El conjunto $R$ de los números reales completado con los elementos $+\infty$ y $-\infty$ se llama *conjunto extendido de los números reales* (o recta numérica extendida) y se denota por $\bar{R}$. Los elementos $+\infty$ y $-\infty$ se llaman a veces *puntos infinitamente alejados de la recta numérica extendida*, en contraposición a los números de la recta numérica $R$ que se llaman también puntos finitos.

## 3.2. INTERVALOS DE NÚMEROS REALES. ENTORNOS

Recordemos la definición de ciertos subconjuntos de números reales muy importantes, que en el futuro se encontrarán a menudo. Si $a \leqslant b$, $a \in \bar{R}$, $b \in \bar{R}$, entonces, el conjunto $\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$ se llama *segmento* de la recta numérica extendida $\bar{R}$ y se denota por $[a, b]$, es decir,

$$[a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x : a \leqslant x \leqslant b\}, \quad a \in \bar{R}, b \in \bar{R}.$$

En el caso $a = b$ el segmento $[a, b]$ está constituido por un punto.

Si $a < b$, entonces el conjunto $\{x : a < x < b\}$ se llama *intervalo* y se denota por $(a, b)$, es decir,

$$(a, b) \overset{\text{def}}{=} \{x : a < x < b\}.$$

El intervalo $(a, b)$ se llama *interior del segmento* $[a, b]$.

Los conjuntos numéricos

$$[a, b) \overset{\text{def}}{=} \{x : a \leqslant x < b\} \quad \text{y} \quad (a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x : a < x \leqslant b\}$$

se llaman *intervelos semiabiertos*.

Los segmentos $[a, b]$, los intervalos $(a, b)$ y los intervalos semiabiertos $[a, b)$, $(a, b]$ se llaman *intervalos*; los puntos $a$ y $b$, sus *extremos*; $a$, el extremo derecho y $b$, el izquierdo y los puntos $x$ son tales que $a < x < b$ se llaman sus *puntos interiores*.

Si $a$ y $b$ son finitos, es decir, $a \in R$ y $b \in R$, entonces el intervalo con extremos $a$ y $b$ se llama también *intervalo numérico* y el número $b - a$, su *longitud*.

Si al menos uno de los números $a$ y $b$ es infinto, entonces el intervalo con extremos $a$ y $b$ se llama *infinito*.

OBSERVACIÓN 1. Los intervalos de todos los tipos de la recta numérica extendida poseen la siguiente propiedad: *si los puntos $\alpha \in \bar{R}$ y $\beta \in \bar{R}$, $\alpha < \beta$ pertenecen a cierto intervalo con los extremos $a \in \bar{R}$ y $b \in \bar{R}$, entonces todo el segmento $[\alpha, \beta]$ pertenece a este intervalo.*

Para los intervalos de cada tipo esto se deduce directamente de su definición.

Un concepto importante para el futuro es el concepto de $\varepsilon$-entorno de un punto de la recta numérica extendida.

En el caso $a \in R$, es decir, cuando $a$ es un número real, se llama $\varepsilon$-entorno $U(a, \varepsilon)$*), $\varepsilon > 0$, del número $a$ el intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$:

$$U(a, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Si $a = +\infty$, entonces

$$U(+\infty, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right],$$

y si $a = -\infty$, entonces

$$U(-\infty, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \left[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

*) La notación del entorno de un punto con el símbolo $U$ viene del vocablo alemán Umgebung (entorno).

De esta forma, en todos los casos, es decir, cuando $a$ es un número real o cuando $a$ es uno de los infinitos $+\infty$, $-\infty$, con la disminución del número $\varepsilon$ los $\varepsilon$-entornos correspondientes $U(a, \varepsilon)$ disminuyen: si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces $U(a, \varepsilon_1) \subset U(a, \varepsilon_2)$.

A veces resulta cómodo completar el conjunto de los números reales no con dos, sino con un infinito (sin signo) $\infty$. Su $\varepsilon$-entorno $U(\infty, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, se define por la igualdad

$$U(\infty, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x : x \in \boldsymbol{R},\ |x| > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{\infty\}.$$

Dicho de otra forma, el $\varepsilon$-entorno $U(\infty, \varepsilon)$ está compuesto por dos intervalos infinitos $\left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$ y por el propio elemento $\infty$. Este elemento a veces también se llama *punto infinitamente alejado* de la recta numérica. A diferencia de los infinitos con signo: $+\infty$ y $-\infty$, el infinito sin signo $\infty$ no está relacionado con los números reales por la relación de orden.

Cualquier $\varepsilon$-entorno de un punto finito o infinitamente alejado de la recta numérica se llama *entorno de este punto* y a menudo se denota simplemente por $U(a)$. A veces denotaremos a los entornos con otras letras, por ejemplo, con las letras $V$, $W$.

Junto con los entornos de los infinitos, definidos anteriormente, en el conjunto de los números reales completado por ellos, a veces se analizan los entornos de los infinitos $\infty$, $+\infty$ y $-\infty$ en el propio conjunto de los números reales: $U(\infty) \cap \boldsymbol{R}$, $U(+\infty) \cap \boldsymbol{R}$ y $U(-\infty) \cap \boldsymbol{R}$. Los propios infinitos, naturalmente, ya no caen en estos entornos. Nos mantendremos en las definiciones dadas inicialmente (señalemos además que el lema que se demuestra más adelante se mantiene válido en el caso cuando en él por entornos de los infinitos entendemos sus entornos en el conjunto de los números reales).

Enunciemos en forma de lema una importante propiedad de los entornos.

**Lema.** *Para dos puntos diferentes cualesquiera de la recta numérica extendida (extendida o bien con ayuda de dos infinitos con signo o bien sólo con ayuda de un infinito sin signo) existen entornos que no se intersecan.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos inicialmente el caso de la recta numérica extendida $\overline{\boldsymbol{R}}$ obtenida con la incorporación de dos infinitos con signo al conjunto de los números reales $\boldsymbol{R}$. Mostremos que para cualesquiera $a \in \overline{\boldsymbol{R}}$ y $b \in \overline{\boldsymbol{R}}$, $a < b$, existen $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ tales que $U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \varnothing$. En realidad si $a$ y $b$ son números reales, entonces se puede tomar $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{b - a}{2}$ (fig. 6, $a$). Si $a$ es un número real y $b = +\infty$, entonces, en calidad de los $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ señalados sirven, por ejemplo, $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{|a| + 1}$ (fig. 6, $b$). Si $a = -\infty$ y $b$ es un número real, entonces se puede tomar $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{|b| + 1}$, $\varepsilon_2 = 1$ (fig. 6, $c$). Finalmente, si $a = -\infty$ y $b = +\infty$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrario, los entornos $U(-\infty, \varepsilon)$ y $U(+\infty, \varepsilon)$ no se intersecan (fig. 6, $d$).

Si la recta numérica $\boldsymbol{R}$ está completada sólo por un infinito $\infty$, entonces es suficiente analizar sólo el caso $a \in \boldsymbol{R}$ y $b = \infty$ (ya que el caso $a \in \boldsymbol{R}$ y $b \in \boldsymbol{R}$ está analiza-

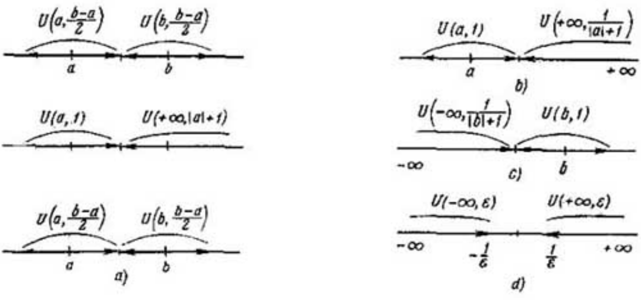



FIG. 6

do anteriormente), en el cual se puede tomar de nuevo (como para $a \in R$, $b = +\infty$) $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{|a| + 1}$. $\square$

OBSERVACIÓN 2. En el caso $a < b$, $a \in \bar{R}$, $b \in \bar{R}$ y $U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \varnothing$ para cualesquiera $x \in U(a, \varepsilon_1)$ e $y \in U(b, \varepsilon_2)$, evidentemente es válida la desigualdad $x < y$.

Su validez se establece directamente con una comprobación de todos los casos aquí posibles, es decir, para $a \in R$, $b \in R$, para $a \in R$, $b = +\infty$, para $a = -\infty$, $b \in R$ y para $a = -\infty$, $b = +\infty$.

## 3.3. CONJUNTOS ACOTADOS Y NO ACOTADOS

Introduzcamos una serie de conceptos necesarios para el futuro y estudiemos algunas propiedades de los conjuntos numéricos.

**Definición 3.** *Si para el subconjunto $E$ de números reales existe un número $b$ tal que no es menor que cada número $x \in E$, es decir, para cualquier $x \in E$ se cumple la desigualdad $x \leqslant b$, entonces el conjunto $E$ se llama acotado superiormente y el número $b$, número que acota superiormente el conjunto $E$.*

Un conjunto que no sea un conjunto acotado superiormente se llama *no acotado superiormente*.

Con ayuda de los símbolos lógicos la definición de conjunto acotado superiormente se escribe de la siguiente forma:

el conjunto $E \subset R$ está acotado superiormente $\Leftrightarrow$ $(\exists b \in R)\,(\forall x \in E) : x \leqslant b$, de aquí

el conjunto $E \subset R$ no está acotado superiormente $\Leftrightarrow$ $(\forall b \in R)\,(\exists x \in E) : x > b$, es decir, el conjunto $E$ no está acotado por arriba si cualquiera que sea el número $b \in R$ se encuentra un número $x \in E$ tal que $x > b$.

Observemos que si el número $b$ acota superiormente el conjunto $E$, es decir, para todas las $x \in E$ se cumple la desigualdad $x \leqslant b$ y $b < b'$, entonces, para todas las $x \in E$ evidentemente, tiene lugar la desigualdad $x \leqslant b'$, y por consiguiente, el número $b'$ también acota superiormente el conjunto $E$.

Si en el conjunto $E$ se tiene un número $b$ que no es menor que todos los otros números de $E$, se decir, $b \in E$ y para todos los $x \in E$ se cumple la desigualdad $x \leqslant b$, entonces, el número $b$ se llama *número máximo* o *mayor del conjunto* $E$ : $b = \text{máx}$

Evidentemente, si en el conjunto $E$ se tiene un número máximo, entonces, éste es único y el propio conjunto $E$, en este caso, está acotado superiormente por este número.

Señalemos además, que si el conjunto $E$ no está acotado superiormente, entonces por la definición, esto significa que para cualquier número $b \in R$ existe al menos un elemento $x \in E$ tal que $x > b$. Prestemos atención a que en realidad hay un número infinito de tales elementos. En efecto, supongamos que hay un número finito de éstos: $x_1, \dots, x_n$, $n \in N$. Dicho de otro modo, para todos los $x \in E$ y $x \neq x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ es válida la desigualdad $x \leqslant b$. Entonces, es evidente que para $b_0 = \text{máx}\{b, x_1, \dots, x_n\}$ y todos los $x \in E$ se cumple desigualdad $x \leqslant b_0$, es decir, pese a la suposición, el conjunto $E$ resultó ser acotado.

De forma análoga al conjunto acotado superiormente, se define un conjunto acotado inferiormente.

**Definición 4.** *Si para el subconjunto E de números reales existe un número a tal que no es mayor que cada número $x \in E$, es decir, para cualquier $x \in E$ se cumple la desigualdad $a \leqslant x$, entonces, el conjunto E se llama acotado inferiormente y el número a, número que acota inferiormente este conjunto.*

Un conjunto que no esté acotado inferiormente se llama *conjunto no acotado inferiormente*.

Con ayuda de los símbolos lógicos la definición de conjunto acotado inferiormente se escribe de la siguiente forma:

el conjunto $E \subset R$ está acotado inferiormente $\Leftrightarrow$ $(\exists a \in R)$ $(\forall x \in E) : x \geqslant a$, de aquí

el conjunto $E \subset R$ no está acotado inferiormente $\Leftrightarrow$ $(\forall a \in R)$ $(\exists x \in E) :$ $: x < a$, es decir, el conjunto $E$ no está acotado inferiormente si cualquiera que sea el número $a \in R$ se encuentra un elemento $x \in E$ tal que $x < a$.

Es evidente que si el número $a$ acota inferiormente el conjunto $E$, entonces cualquier número $a' < a$ también acota inferiormente este conjunto.

Si en el conjunto $E$ se tiene un número $a$ que es no mayor que todos los otros números de $E$, es decir, $a \in E$ y para todos los $x \in E$ se cumple la desigualdad $a \leqslant x$, entonces, el número $a$ se llama *número mínimo* o *menor del conjunto* $E$: $a = \text{mín}\, E$.

Si en el conjunto $E$ se tiene un número mínimo, entonces, éste es único y el propio conjunto $E$, en este caso, está acotado inferiormente por este número.

**Definición 5.** *Un conjunto acotado superior e inferiormente se llama simplemente conjunto acotado.*

Con otras palabras, el conjunto $E \subset R$ se llama acotado si existen números $a$ y $b$ tales que para cualquier $x \in E$ se cumple la desigualdad $a \leqslant x \leqslant b$.

Es evidente que un conjunto no acotado puede estar no acotado superior e infe-

Un conjunto que no está acotado se llama no acotado.

Ejercicio 3. Demuéstrese que el conjunto $E \subset \boldsymbol{R}$ está acotado si y sólo si existe un numero $a \geqslant 0$ tal que para todos los $x \in E$ se cumple la desigualdad $|x| \leqslant a$.

El segmento $[1, 2]$, el intervalo $(0, 1)$, el conjunto de los valores de la función $\operatorname{sen} x$ son ejemplos de conjuntos acotados. El intervalo infinito $(-5, +\infty)$, el conjunto de los números naturales $1, 2, 3, \ldots$ son conjuntos acotados inferiormente pero no acotados superiormente. Por último, el conjunto de todos los números enteros, de todos los números racionales, son conjuntos no acotados tanto superior como inferiormente.

La generalización formal de los conceptos de conjuntos acotados superiormente, acotados inferiormente y simplemente acotados sobre los subconjuntos del conjunto extendido $\overline{\boldsymbol{R}}$ de los números reales $\boldsymbol{R}$ (véase el p. 2.5) no nos lleva a conceptos sustanciales, ya que todos los subconjuntos del conjunto extendido de los números reales están acotados superiormente por el símbolo $+\infty$ e inferiormente por el símbolo $-\infty$ y por esto son simplemente acotados en $\overline{\boldsymbol{R}}$. No obstante, el concepto de elemento máximo (mínimo) de un conjunto también es sustancial en este caso. Su definición formalmente coincide con la definición correspondiente para los subconjuntos de conjunto no extendido de los números reales:

*el número finito o infinito $c \in E \subset \overline{\boldsymbol{R}}$ se llama máximo (mínimo) en el conjunto $E \subset \overline{\boldsymbol{R}}$ si para todas las $x \in E$ se cumple la desigualdad $x \leqslant c$* (respectivamente $x \geqslant c$).

Más adelante nos serviremos de este concepto.

## 3.4. COTAS SUPERIOR E INFERIOR DE LOS CONJUNTOS DE NÚMEROS

Entre todos los números que acotan superiormente (inferiormente) un conjunto dado, el menor (mayor) de ellos, tiene un nombre especial.

**Definición 6.** *El menor entre todos los números que acotan superiormente el conjunto $E \subset \boldsymbol{R}$ se llama cota superior y se denota**) *por* $\sup E$ *o* $\sup\limits_{x \in E} \{x\}$.

**Definición 7.** *El mayor entre todos los números que acotan inferiormente el conjunto $E \subset \boldsymbol{R}$ se llama cota inferior y se denota***) *por* $\inf E$ *o* $\inf\limits_{x \in E} \{x\}$.

A veces, la cota superior (inferior) de un conjunto la llaman *cota superior (inferior) exacta* de este conjunto.

Señalemos que en las definiciones hechas no se analiza la cuestión de si existe o no el número menor (respectivamente mayor) entre todos los números que acotan superiormente (inferiormente) el conjunto dado, esto se hará más tarde. Aqui sólo se dice que si tal número existe entonces se llama cota superior (respectivamente inferior) del conjunto analizado. De la propia definición de cota superior (inferior) se deduce que si para un conjunto dado esta cota existe, entonces es única ya que en cualquier conjunto el número máximo (mínimo) puede ser uno solo.

*) Del vocablo latino supremum, mayor.

**) Del vocablo latino infimum, menor.

Analicemos las definiciones 6 y 7. Sea $\beta = \sup E$. Esto significa, en primer lugar que el número $\beta$ acota superiormente el conjunto $E$, es decir, para cada $x \in E$ es válida la desigualdad $x \leqslant \beta$; en segundo lugar, que el número $\beta$ es el menor entre todos los números que acotan superiormente el conjunto $E$, es decir, cualquiera que sea el número $\beta' < \beta$ ya no acota superiormente al conjunto $E$ y esto significa que en el conjunto $E$ se encuentra un número $x$, tal que $x > \beta'$.

Así en "forma aritmética" la definición 6 se puede escribir de la siguiente manera.

**Definición 6'**. *El número $\beta$ se llama cota superior del conjunto $E$ si*

1°) $\forall x \in E : x \leqslant \beta$,

2°) $(\forall \beta' < \beta)\ (\exists x \in E) : x > \beta'$.

La condición 2°) se puede parafrasear del siguiente modo:

$2^1$) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in E) : x > \beta - \varepsilon$.

Para convencerse de la equivalencia de las condiciones 2° y $2^1$ es suficiente tomar $\beta^*$ y $\varepsilon$ relacionados por la igualdad $\beta^* = \beta - \varepsilon$ de lo cual se deriva que la condición $\varepsilon > 0$ es equivalente a la condición $\beta' < \beta$.

De forma análoga, si $\alpha = \inf E$, entonces por la definición 7, en primer lugar, el número $\alpha$ acota inferiormente el conjunto $E$ y en segundo lugar cualquier número $\alpha' > \alpha$ ya no acota inferiormente este conjunto, ya que el número $\alpha$ es el mayor entre todos los números tales. Esto significa que para cualquier $\alpha^* > \alpha$ se encuentra $x \in E$ tal que $x < \alpha'$. Por consiguiente la definición 7 se puede parafrasear de la siguiente forma.

**Definición 7'**. *El número $\alpha$ se llama cota inferior del conjunto $E$ si*

1°) $\forall x \in E : x \geqslant \alpha$,

2°) $(\forall \alpha' > \alpha)\ (\exists x \in E) : x < \alpha'$.

La condición 2°) es equivalente a la condición

$2^1$) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in E) : x < \alpha + \varepsilon$.

Para convencerse de la equivalencia de las condiciones 2°) y $2^1$) es suficiente tomar $\alpha' = \alpha + \varepsilon$.

Hagamos algunas observaciones evidentes. Si un conjunto no vacío $E \subset R$ tiene cota superior $\beta \in R$ (tiene cota inferior $\alpha \in R$), entonces es acotado superiormente (respectivamente inferiormente). Esto se deduce de la condición 1° de la definición 6' (de la definición 7').

Si $\beta = \sup E$ ($\alpha = \inf E$) y el número $b$ (el número $a$) acota superiormente (inferiormente) el conjunto $E$, entonces $\beta \leqslant b$ (respectivamente $a \leqslant \alpha$). Esto se deduce de que la cota superior (inferior) de un conjunto es el número menor (mayor) entre todos los números que acotan superiormente (inferiormente) el conjunto dado.

Si en el conjunto existe el número máximo (mínimo), entonces es cota superior (inferior) de este conjunto. En particular, tal situación tiene lugar para los conjuntos finitos: cualquier conjunto finito de números tiene un número máximo y uno mínimo y por tanto cota superior e inferior. En principio, se pueden hallar simplemente analizando todos los números del conjunto dado, ya que es finito. No obstante, en general, sólo en principio y no en la práctica: si en el conjunto finito analizado, dado por ciertas propiedades de sus elementos, hubiera muchos, entonces, analizarlos a todos no está al alcance incluso de una superpotente máquina computadora moderna.

Citemos ejemplos que ilustran el concepto de cota superior e inferior de un conjunto.

El conjunto de todos los números reales positivos, denotémoslo por $R_+$, está acotado inferiormente por el número cero, ya que para cualquier $x \in R_+$ tiene lugar $x > 0$ y además $\inf R_+ = 0$. El conjunto $R_+$ no está acotado superiormente, ya que no hay un número que acote superiormente todos los números positivos.

Si $E = [a, b]$ es un segmento, entonces $\inf E = a$, $\sup E = b$. Si $E = (a, b)$ es un intervalo, entonces, también, $\inf E = a$, $\sup E = b$. Si finalmente el conjunto $E$ está compuesto por dos puntos $a$ y $b$, $a \leqslant b$, es decir, $E = \{a\} \cup \{b\}$, entonces de nuevo $\inf E = a$, $\sup E = b$. Estos ejemplos muestran, en particular, que la cota superior (inferior) de un conjunto puede pertenecer al mismo conjunto o no.

Pasemos ahora al esclarecimiento de la cuestión: ¿ existe siempre la cota superior (inferior) de un conjunto de números? Si el conjunto no está acotado superiormente (inferiormente), entonces no existen números que lo acoten superiormente (inferiormente). Por consiguiente, no existe entre ellos el mínimo (máximo). De esta forma, si el conjunto no está acotado superiormente (inferiormente), entonces no tiene cota superior (inferior). En este caso, la respuesta a la pregunta planteada se obtuvo fácilmente. Si el conjunto está acotado superiormente (inferiormente), entonces la respuesta es dada por el siguiente teorema.

**Teorema 1.** *Cualquier conjunto de números no vacío acotado superiormente tiene cota superior y cualquier conjunto de números no vacío acotado inferiormente tiene cota inferior.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A$ un conjunto de números no vacío acotado superiormente. Denotemos por $B$ el conjunto de todos los números que acotan superiormente el conjunto $A$. Por cuanto el conjunto $A$ está acotado superiormente, el conjunto $B$ no es vacío. Cada elemento $y \in B$ acotado por arriba el conjunto $A$, es decir, para cualquier elemento $x \in A$ se cumple la desigualdad $x \leqslant y$. Por cuanto, $x$ e $y$ son elementos arbitrarios correspondientes a los conjuntos $A$ y $B$, entonces por la propiedad de la continuidad de los números reales (véase la propiedad V en el p. 2.1) existe un número $\beta$ tal que para cualesquiera $x \in A$ e $y \in B$ tiene lugar la desigualdad

$$x \leqslant \beta \leqslant y. \tag{3.2}$$

El cumplimiento de la desigualdad $x \leqslant \beta$ para todos los $x \in A$ significa que el número $\beta$ acota superiormente el conjunto $A$ y el cumpliemiento de la desigualdad $\beta \leqslant y$ para todos los $y \in B$, es decir, para todos los números que acotan superiormente el conjunto $A$, significa que el número $\beta$ es el menor entre todos estos números, es decir, es la cota superior del conjunto $A$:

$$\beta = \sup A. \tag{3.3}$$

Así pues, la existencia de la cota superior para un conjunto no vacío acotado superiormente está demostrada.

Si ahora $B$ es un conjunto de números no vacío acotado inferiormente, entonces llevamos al conjunto $A$ todos los números que acotan inferiormente el conjunto $B$. Más adelante, razonando análogamente al caso analizado de la cota superior, fácilmente nos convencemos de que por la propiedad de la continuidad de los números reales existe un número $\alpha$ que para cualesquiera $x \in A$ e $y \in B$ se cumple la desigualdad

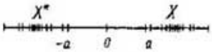



FIG. 7

$$X \leqslant \alpha \leqslant y. \tag{3.4}$$

Esto evidentemente significa que

$$\alpha = \inf B. \tag{3.5}$$

Por otra parte, la afirmación sobre la existencia de la cota inferior de un conjunto no vacío acotado inferiormente se puede obtener de la afirmación ya demostrada sobre la existencia de la cota superior de un conjunto no vacío acotado superiormente. Para esto es suficiente observar que si el conjunto $E$ es un conjunto acotado inferiormente, entonces el conjunto $E^*$ de todos los números es $-x$, donde $x \in E$, es decir, el conjunto sobre la recta numérica, simétrico al conjunto $E$ con respecto al cero es ya un conjunto acotado superiormente (fig. 7). Efectivamente, si el número $a$ acota inferiormente el conjunto $E$, entonces el número $-a$ acota superiormente el conjunto $E^*$. De aquí fácilmente se deduce que $\inf E = -\sup E^*$. □

El teorema sobre la existencia de las cotas superiores e inferiores pertenece a los tal llamados teoremas de existencia puros: en él se demuestra que en determinadas condiciones para el conjunto existe la cota superior, respectivamente la cota inferior. No obstante, de los razonamientos desarrollados en la demostración de este teorema no se deduce el método para encontrar estas cotas en un caso concreto. Esto se deduce de que la construcción del conjunto $B$, con ayuda del cual se realizó la demostración del teorema y que estaba constituido por todos los números que acotaban superiormente el conjunto analizado es equivalente a la búsqueda de la cota superior $\beta$ de este conjunto. En realidad el problema de encontrar la cota superior (inferior) de un conjunto dado por ciertas condiciones de éste, puede resultar ser un problema muy difícil.

Si el conjunto no está acotado superiormente (inferiormente), entonces, como ya se señaló, ningún número puede ser su cota superior (inferior) ya que en general, no hay números que lo acoten superiormente (inferiormente). Para mayor comodidad se introduce la siguiente definición.

*La cota superior de un conjunto no acotado superiormente se llama $+\infty$ y la cota inferior de un conjunto no acotado inferiormente se llama $-\infty$.*

Esta definición es natural, ya que en los acuerdos tomados con respecto al uso de los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ en el p. 2.5 las cotas infinitas de los conjuntos así definidos también satisfacen las condiciones 1° y 2° de las definiciones 6' y 7'.

La comodidad de esta definición consiste en que ahora *cada conjunto de números no vacío tiene una cota superior que pertenece al conjunto extendido de los números reales.* Además, si el conjunto dado está acotado superiormente, entonces su cota superior es f i n i t a, si no está acotado superiormente, entonces es i n f i n i t a y es igual a $+\infty$. La afirmación análoga es válida para la cota inferior.

Ejercicios. 4. Supongamos que están dados los conjuntos de números $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y sea

$$X \overset{\text{def}}{=} \{x : x = x_1 + \ldots x_n, x_i \in X_i, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Demuéstrese que $\sup X = \sum_{i=1}^{n} \sup X_i$.

5. Supongamos que están dados los conjuntos de números $X$ e $Y$ y sea
$$Z \overset{\text{def}}{=} \{z : z = x - y, x \in X, y \in Y\}.$$

Demuéstrese que $\sup Z = \sup X - \inf Y$.

Mostremos ahora, que del teorema sobre la existencia de las cotas superiores e inferiores se derivan dos propiedades importantes de los números reales, el así llamado principio de Arquímedes*) y el principio de los segmentos encajados.

### 3.5. PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

El principio de Arquímedes de los números reales consiste en lo siguiente:

**Teorema 2.** *Cualquiera que sea el número real $a$, existe un número natural $n$ tal que $n > a$*, es decir,
$$(\forall a \in R)(\exists n \in N) : n > a.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el principio de Arquímedes no se cumple. Esto significa que existe un número $a$ tal que para todos los naturales $n$ se cumple la desigualdad $n \leqslant a$, es decir $(\exists a \in R)(\forall n \in N) : n \leqslant a$. Esto quiere decir, que el número $a$ acota superiormente el conjunto de los números naturales. Por esto, el conjunto de los números naturales como cualquier conjunto de números no vacío acotado superiormente, por el teorema 1 del p. 2.8 tiene una cota superior finita. Denotémosla por $\beta$, $\beta = \sup W$.

Por cuanto $\beta - 1 < \beta$, entonces por la condición 2° de la cota superior en la definición 6´ del p. 2.8 existe un número natural $n$ tal que $n > \beta - 1$. Pero entonces, $n + 1 > \beta$ y por la definición de los números naturales $n + 1 \in W$. La desigualdad $n + 1 > \beta$ contradice que $\beta = \sup N$ ya que la cota superior de un conjunto lo acota superiormente (véase la propiedad 1° de la cota superior en la definición 6´ del p. 2.8). La contradicción obtenida muestra que el número $a$ indicado no existe, es decir, que el principio de Arquímedes es válido. □

**Corolario.** *Cualesquiera que sean los números $a$ y $b$, $0 < a < b$, existe un número natural $n$ tal que $na > b$.*

En efecto, por el principio de Arquímedes, para el número $b/a$ existe un natural $n$ tal que $n > b/a$. Este es el número $n$ buscado, ya que multiplicando la desigualdad $n > b/a$ por el número positivo $a$ obtendremos $na > b$.

Esta afirmación tiene un simple sentido geométrico: si tomamos dos segmentos de longitudes $a$ y $b$, $0 < a < b$, respectivamente, entonces trazando en el segmento mayor desde un extremo dado, el segmento menor, después de un número finito de pasos salimos de los límites del segmento mayor (fig. 8).

Ejemplo. Supongamos que el conjunto $E$ está compuesto por los números del tipo $\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ . Hallemos $\sup E$ e $\inf E$.

*) Arquímedes (287-212 a.n.e.), matématico y mecánico de la Antigua Grecia.

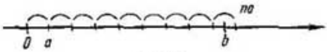


FIG. 8

FIG. 9

Por cuanto el conjunto $E$ tiene un número máximo 1, entonces éste es su cota superior: $\sup_{n\in N}\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1$. Para hallar la cota inferior del conjunto $E$ observemos que para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ es válida la desigualdad $\frac{1}{n} > 0$, es decir, el cero acota inferiormente el conjunto $E$. Mostremos que él es el mayor entre todos estos números. Sea $\varepsilon > 0$, entonces por el principio de Arquímedes existe un natural $n$ tal que $n > \frac{1}{\varepsilon}$ o lo que es lo mismo $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Esta desigualdad muestra que cualquier número $\varepsilon > 0$ ya no acota inferiormente el conjunto $E$, ya que $\frac{1}{n} \in E$ para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ . Así pues, el cero es el mayor de todos los números que acotan inferiormente el conjunto $E$, es decir, $\inf_{n\in N}\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$.

### 3.6. PRINCIPIO DE LOS SEGMENTOS ENCAJADOS

Ante todo aclaremos qué sistema de segmentos se llama encajado.

**Definición 8.** *El sistema de segmentos numéricos*

$[a_1 b_1], [a_2, b_2], \ldots , [a_n, b_n], \ldots , a_n \in R, \quad b_n \in R, \quad n = 1, 2, \ldots ,$

*se llama sistema de segmentos encajados si*

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1, \tag{3.6}$$

*es decir si cada segmento* $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ *siguiente se contiene en el anterior* $[a_n, b_n]$ (fig. 9):

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots .$$

**Teorema 3.** *Para cualquier sistema de segmentos encajados existe al menos un número que pertenece a todos los segmentos del sistema dado.*

Esta propiedad de los números reales se llama también *continuidad del conjunto de los números reales en el sentido de Cantor**).

*) G. Cantor (1845 — 1918), matemático alemán.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Omega = \{[a_n, b_n]\}$ un sistema de segmentos encajados. Por las desigualdades (3.6) el conjunto $\{a_n\}$ de todos los extremos izquierdos del sistema $\Omega$ está acotado superiormente, por ejemplo, por el número $b_1$. Por esto, por el teorema sobre la existencia de la cota superior (véase el teorema 1 en el p. 3.4) para el conjunto $\{a_n\}$ existe la cota superior finita (fig. 9)

$$\alpha = \sup\{a_n\}. \tag{3.7}$$

Por cuanto el extremo derecho $b_n$ de cualquier segmento del sistema $\Omega$ por las desigualdades (3.6) acota superiormente el conjunto $\{a_n\}$ y $\alpha$ es la cota superior de este conjunto, es decir, el menor de todos los números que acotan $\{a_n\}$ superiormente, entonces, para todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad

$$\alpha \leqslant b_n. \tag{3.8}$$

Esto significa que el conjunto $\{b_n\}$ de todos los extremos derechos de los segmentos del sistema $\Omega$ está acotado inferiormente y por esto existe la cota inferior finita

$$\beta = \inf\{b_n\}. \tag{3.9}$$

Por cuanto, el número $\alpha$ de acuerdo con (3.8) acota inferiormente el conjunto $\{b_n\}$ y la cota inferior $\beta$ de este conjunto es el mayor entre todos estos números, entonces $\beta \geqslant \alpha$. Así pues, tenemos que para todos los $n = 1, 2, \ldots$ son válidas las desigualdades

$$a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n. \tag{3.10}$$

De aquí se deduce que cada punto del segmento $[\alpha, \beta]$ se contiene en todos los segmentos del sistema $\Omega$: si $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, entonces para todos los $n = 1, 2, \ldots$ tiene lugar la desigualdad $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, es decir, $x \in [a_n, b_n]$. □

OBSERVACIÓN. En la demostración del teorema 3 fue mostrado que cada punto del segmento $[\alpha, \beta]$ pertenece a todos los segmentos del sistema $\Omega$ y por consiguiente a su intersección, es decir,

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]. \tag{3.11}$$

Es fácil convencerse de la inclusión opuesta. Si $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, entonces para todos los $n = 1, 2, \ldots$ tenemos $a_n \leqslant x \leqslant b_n$. Por cuanto el número $x$ acota superiormente el conjunto $\{a_n\}$ y $\alpha = \sup\{a_n\}$ es el menor entre todos estos números, entonces $\alpha \leqslant x$. Análogamente se muestra que $x \leqslant \beta$.

De esta forma, el punto $x$ pertenece al segmento $[\alpha, \beta]$, es decir,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subset [\alpha, \beta]. \tag{3.12}$$

De (3.11) y (3.12) se deduce que

$$\bigcap^{\infty} [a_n, b_n] = [\alpha, \beta]. \tag{3.13}$$

**Definición 9.** *Sea dado el sistema de segmentos* $[a_n, b_n]$, $a_n \in R$, $b_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$ *. Diremos que la longitud* $b_n - a_n$ *de los segmentos de este sistema tiende a cero si para cada número* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $n_\varepsilon$ *tal que para todos los números* $n \geqslant n_\varepsilon$ *se cumple la desigualdad* $b_n - a_n < \varepsilon$.

En el curso de matemática elemental se introduce el concepto de límite de una sucesión. La definición enunciada en los términos de límite, significa que $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. En nuestro curso, al límite de una sucesión le será dedicado el párrafo siguiente.

Señalemos que el término "número" es sinónimo de término "número natural". El índice $\varepsilon$ del número $n_\varepsilon$ muestra que este número depende del número dado $\varepsilon < 0$.

**Teorema 4.** *Para cualquier sistema* $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ , *de segmentos encajados con longitudes que tienden a cero existe un punto único* $\xi$ *que pertenece a todos los segmentos del sistema dado* (véase la fig. 9) *y*

$$\xi = \sup_{n\in N}\{a_n\} = \inf_{n\in N}\{b_n\}. \tag{3.14}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$ un número arbitrario pero fijo. De la condición de que las longitudes de los segmentos $[a_n, b_n]$ tienden a cero se deduce que existe un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $b_n - a_n < \varepsilon$.

Por cuanto de la desigualdad (3.10) se deduce que $\beta - \alpha \leqslant b_n - a_n$, entonces $0 \leqslant \beta - \alpha < \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Esto es posible sólo en el caso cuando $\alpha = \beta$ (si $\beta > \alpha$ entonces, por ejemplo, para $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$ la desigualdad indicada se convierte en una afirmación incierta $\beta - \alpha < \beta - \alpha$). De esta manera, el segmento $[\alpha, \beta]$ en este caso se convierte en un punto que denotaremos por $\xi = \alpha = \beta$.

Por la fórmula (3.13) esto significa que existe sólo un punto único $\xi$ que pertenece a todos los segmentos $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ . La fórmula (3.14) se deduce de (3.7) y (3.9). □

Muy a menudo, en diferentes demostraciones se aplica la siguiente construcción de un sistema de segmentos encajados con longitudes que tienden a cero. Se toma un segmento $[a, b]$ y con el punto $(a + b)/2$ se divide en dos segmentos iguales $[a, (a + b)/2]$ y $[(a + b)/2; b]$ de longitud $(b - a)/2$. Más adelante, se escoge uno de estos segmentos (cuál específicamente depende de las condiciones del problema concreto), se denota por $[a_1, b_1]$ y de nuevo con su punto medio se divide en dos segmentos iguales, uno de los cuales se denota $[a_2, b_2]$ etc. Como resultado se obtiene un sistema de segmentos encajados $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ , con longitudes $b_n - a_n = \dfrac{b - a}{2^n}$. Mostremos que estas longitudes tienden a cero.

En efecto, para cualquier $\varepsilon > 0$, por el principio de Arquímedes se encuentra un natural $n_\varepsilon$ tal que $n_\varepsilon > \dfrac{b - a}{\varepsilon}$, pero entonces para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumplirá la desigualdad $n > \dfrac{b - a}{\varepsilon}$ y por consiguiente la desigualdad $\dfrac{b - a}{n} < \varepsilon$. Observando que

$$2^n = (1 + 1)^n = 1 + n + \frac{n(n - 1)}{2} + \ldots > n,$$

obtenemos $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ para $n = 1, 2, \ldots$ . Por esto, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ es válida la desigualdad $\frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Esto significa que las longitudes de los segmentos $[a_n, b_n]$ tienden a cero cuando $n$ crece.

Observemos que el principio de los segmentos encajados es una propiedad inherente específicamente al conjunto de los números reales. Así, el campo de sólo los números racionales ya no posee la propiedad análoga.

Por ejemplo, si tomamos la sucesión de los "segmentos racionales" [1, 2], [1,4; 1,5], [1,41; 1,42], [1,414; 1,415],*) es decir, la sucesión de conjuntos de los números racionales que están en los segmentos, cuuos extremos $a_n$ y $b_n$, $n = 1, 2, \cdots$, son los valores de $\sqrt{2}$ calculados respectivamente con defectos o con exceso salvo $1/10^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ **), entonces evidentemente no existe ningún número racional que pertenezca a todos estos segmentos. En realidad, tal número sólo podría ser el número $\sqrt{2}$ (¿ por qué?) que sin embargo no es racional***).

Se puede demostrar una afirmacion más exacta. Llamemos campo de Arquímedes a un campo si para él se cumple el principio de Arquímedes, es decir, es válida la afirmación del teorema 2 del p. 3.5. La propiedad de un campo ordenado (véase la definición de campo en la observación al final del p. 2.2*), que consiste en que para sus elementos se cumple la propiedad del p. 2.1 se llama continuidad del campo según Dedeking (véase además el p. 2.5*) y la propiedad de un campo ordenado que se expresa en que cada sistema de sus segmentos encajados tiene intersección no vacía, se llama continuidad del campo según Cantor.

Para los campos ordenados de Arquímedes se puede mostrar que su contituidad según Dedekind, continuidad según Cantor y la existencia de cota superior finita para cada conjunto no vacío acotado superiormente son equivalentes entre sí, es decir, de cualquiera de estas propiedades tomada como axioma se derivan las dos restantes.

Fue demostrado que de la cintinuidad según Dedekind se deduce la existencia de la cota superior finita para un conjunto acotado superiormente, de donde a su vez, se deduce la continuidad según Cantor. Para culminar la demostración de la equivalencia indicada de los tres conceptos de continuidad de los campos de Arquímedes es suficiente mostrar que de la continuidad según Cantor se deduce la continuidad según Dedekind. La demostración de esta afirmación se puede encontrar, por ejemplo, en el libro de L. D. Kudriavtsev "Análisis matemático", tomo 1 (Editorial "Mir").

Anteriormente se señaló (véase el p. 2.4*) que todos los campos ordenados continuos según Dedekind son isomorfos entre sí. Ahora vemos que cualquier campo

*) En el caso cuando los extremos del segmento $[a, b]$ están escritos en forma de fracción decimal, la coma entre $a$ y $b$ se cambia por un punto y coma.

**) Esto significa que $a_n^2 \leqslant 2 \leqslant b_n^2$ y $b_n - a_n = 1/10^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ .

***) La demostración de la irracionalidad del número $\sqrt{2}$ que a menudo se lleva a cabo en la matemática elemental se realiza más adelante en el p. 6.3.

ordenado de Arquímedes que posee una de las tres propiedades de continuidad señaladas también es isomorfo al conjunto de los números reales (además cuando existe la continuidad según Dedekind la exigencia de que el campo sea de Arquímedes se puede eliminar; como fue demostrado en el p. 2.9, en este caso, siempre tendrá lugar).

Como conclusión prestemos atención además a que la afirmación análoga al teorema 3 resulta ser incierta para los intervalos numéricos de otro tipo que no sean segmentos. Por ejemplo, el sistema de intervalos encajados $(0, 1/n)$, $n = 1, 2, \dots$ : cada intervalo siguiente se contiene en el anterior, es decir,

$$\left(0, \frac{1}{n+1}\right) \subset \left(0, \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

tiene, como es fácil ver, una intersección vacía. Pero naturalmente, existen sistemas de intervalos encajados, que tienen intersección no vacía.

**Problema 1.** Demuéstrese con ayuda de las cortaduras que para cualquier número $a > 0$ y cualquier natural $n$ existe la raíz $\sqrt[n]{a}$.

# § 4. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

## 4.1. DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Ante todo definamos el concepto de una sucesión numérica.

**Definición 1.** *Supongamos que a cada número natural n se le ha puesto en correspondencia un cierto número real* $x_n$ *(y a los números naturales diferentes n pueden resultar puestos en correspondencia números iguales). El conjunto de elementos* $x_n$ *), $n = 1, 2, \dots$ , se llama sucesión numérica o simplemente sucesión; cada elemento* $x_n$ *se llama elemento (o término) de esta sucesión y n, su número.*

A la sucesión numérica con elementos $x_n$ la denotaremos por $x_n$, $n = 1, 2, \dots$ , o bien por $\{x_n\}$.

Según la propia definición, una sucesión contiene siempre un conjunto infinito de elementos: cualesquiera dos elementos distintos de la sucesión se diferencian al menos por sus números cuya cantidad es infinita.

Es evidente, que la sucesión numérica es un caso particular de función. Más preciso, una sucesión es una *función definida sobre el conjunto de los números naturales y que toma valor en el conjunto de los números reales*, es decir, una función de la forma $f : N \to R$ (véase el p. 1.3*).

A veces en calidad de números es cómodo utilizar no todos los números naturales, sino sólo algunos de ellos. Por ejemplo, los números naturales a partir de cierto número natural $n_0 : x_n$, $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ , o sólo los números pares: $x_n$, $n = 2, 4, \dots$ . Ocurre que para la numeración se usan no sólo los números naturales, sino

*) Aquí por elemento se entiende el par compuesto por el número natural y el número real correspondiente a él según la correspondencia analizada (llamado en lo adelante valor del elemento dado de la sucesión).

también otros números, por ejemplo $x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (aquí en calidad de un número más se agrega el cero). En todos estos casos se pueden numerar de nuevo los $x_n$ utilizando todos los números naturales $m$ y sólo ellos. En el primer ejemplo es necesario hacer $m = n - n_0 + 1$; en el segundo, $m = \frac{n}{2}$; en el tercero, $m = n + 1$.

Por esto, en casos similares, también se dice que los $x_n$ forman una sucesión y claro esta, se indica qué valores toman los números $n$.

**Definición 2.** *El número $a$ se llama límite de una sucesión $\{x_n\}$ dada si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los números $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

En este caso se escribe $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ o $x_n \to a$ cuando $n \to \infty$.

Utilizando los símbolos lógicos esta definición se puede escribir en la forma:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in N)(\forall n > n_\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon.$$

La sucesión para la cual existe el límite se llama *convergente*.

De esta forma, la sucesión $\{x_n\}$ es convergente si existe un número $a$ tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ se encuentra un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$.

Con el uso de los símbolos lógicos esta definición tiene la siguiente forma:

$$(\exists a \in R)(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in N)(\forall n > n_\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon.$$

***Una sucesión que no es convergente se llama divergente.***

Señalemos que la desigualdad (4.1) es equivalente a la desigualdad

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Recordemos que para un número $x \in R$ dado, cualquier intervalo del tipo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, donde $\varepsilon > 0$, se llama $\varepsilon$-*entorno* o simplemente entorno del número (punto) $x$ y se denota por $U(x, \varepsilon)$ o $U(x)$.

Con ayuda del concepto de entorno, la definición del límite de una sucesión se puede enunciar de la siguiente forma.

**Definición 2′.** *El número $a$ es el límite de la sucesión $\{x_n\}$ si en cualquiera de sus entornos se contienen casi todos los miembros de la sucesión, es decir, todos los términos de la sucesión excluyendo un número finito de ellos.*

De esta forma, el número $a$ es el límite de la sucesión $\{x_n\}$ si cualquiera que sea el entorno del punto $a$, fuera de ella hay sólo un conjunto finito de elementos de la sucesión $\{x_n\}$, en particular, ni uno (es decir, un conjunto vacío, que como se sabe se considera entre los conjuntos finitos).

Si $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ y $x_n < a$ (respectivamente $x_n > a$) para todos los $n = 1, 2, \ldots$, entonces se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge al número *$a$ por la izquierda* (respectivamente *por la derecha*) y a veces en lugar de $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ se escribe $\lim_{n\to\infty} x_n = a - 0$ (respectivamente $\lim_{n\to\infty} x_n = a + 0$). En el caso cuando $a = 0$, en lugar de $0 + 0$ y $0 - 0$ se escribe respectivamente simplemente $+0$ y $-0$.

El concepto de límite de una sucesión está relacionado en determinado sentido con el problema, que aparece en la práctica, de obtención del valor de cierta magnitud que nos interese, con una exactitud $\varepsilon > 0$, dada con anterioridad. Los valores $x_n$ aproximados sucesivos de la magnitud analizada pueden obtenerse como el resultado de la realización de ciertos experimentos o del cálculo a base de fórmulas recurrentes cualesquiera o por cualquier otra vía. Este problema será evidentemente resuelto si se halla un número $n_\varepsilon$ a partir del cual todos los valores $x_n$ se desviarán del valor exacto de la magnitud analizada en los límites de la exactitud dada. Naturalmente, si el $n_\varepsilon$ indicado existe sólo para un $\varepsilon > 0$ dado, esto aún no significa que la sucesión $\{x_n\}$ converge: en la definición de límite de una sucesión se exige que el número correspondiente $n_\varepsilon$ puede ser elegido para cualquier $\varepsilon > 0$.

Ejemplos 1. La sucesión $\{1/n\}$ converge y su límite es cero. En realidad, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, por el principio de Arquímedes (véase el p. 3.5) de los números reales, existe un número natural $n_\varepsilon$, tal que $n_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Por esto, para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ y esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Es evidente que la sucesión $\{1/n\}$ converge a cero por la derecha.

2. La sucesión $\left\{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}n\right\}$ es divergente. En realidad, cualquiera que sea el número $a$, fuera de su $\varepsilon$-entorno, por ejemplo, cuando $0 < \varepsilon < 1$, a ciencia cierta hay un número infinito de términos de la sucesión dada y esto significa que no es su límite.

3. La sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}n\right\}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}n = 0$, lo cual se deduce (¿por qué?) de que

$$\left|\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n\right| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

La sucesión convergente $\left\{\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}n\right\}$ no es una sucesión que converge hacia su límite por la izquierda o por la derecha.

4. La sucesión $\{n\}$ diverge.

En efecto, cualquiera que sea el número $a$, por ejemplo, para $\varepsilon = 1$ se encuentra, por el principio de Arquímides, un natural $n_0$ tal que $n_0 > a + 1$. Por consiguiente, para todos los naturales $n > n_0$ tendremos $n > a + 1$. Por esto, ningún número $a$ puede ser límite de la sucesión $\{n\}$.

En los ejemplos 2 y 4 al demostrar la divergencia de las sucesiones, se utilizó la definición positiva de la condición de que el número $a$ no es límite de la sucesión dada. Enunciemos esta definición.

**Definición 3.** *El número $a$ no es**) *límite de la sucesión $\{x_n\}$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier natural $n$ existe un natural $m_n > n$***) *tal que*

$$|x_{m_n} - a| \geqslant \varepsilon.$$

*) Aquí la partícula "no" entra no en la definición, sino en el concepto definido.

**) El índice $n$ en el número $m_n$ muestra que este número depende de la elección del número $n$.

En símbolos lógicos esta definición tiene la forma

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq a \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall_n \in N)(\exists m > n): |x_m - a| \geqslant \varepsilon.$$

Recordemos que en el enunciado de la negación de cualquier afirmación, los símbolos lógicos de existencia $\exists$ y de universalidad $\forall$ se intercambian. Precisamente así ha ocurrido en el caso dado, de lo cual es fácil convencerse comparando las escrituras de las definiciones 2 y 4 en símbolos lógicos.

Observemos que la definición 3 no es una definición independiente, ella es una consecuencia lógica de la definición 2.

Ejercicios 1. Enúnciese la definición positiva del concepto de sucesión divergente.

2 Demuéstrese que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

**Problema 2.** Demuéstrese que la sucesión $\{x_n\}$ diverge si y sólo si existe un $\varepsilon > 0$ tal que cualquiera que sea el número real $a$ y cualquiera que sea el número $n$, existe un número $m > n$ para el cual se cumple la desigualdad $|x_m - a| \geqslant \varepsilon$.

Ejercicio 3. Escríbanse la definición positiva de sucesión divergente y la condición del problema 2 en símbolos lógicos y compárense.

En los ejemplos analizados anteriormente, la existencia o ausencia de los límites para las sucesiones dadas fue bastante evidente y la demostración se redujo a la comprobación elemental de la definición de límite de una sucesión.

En calidad de ejemplo más complejo de la búsqueda del límite de una sucesión demostraremos la siguiente afirmación.

Ejemplo 5. *Si la sucesión $\{x_n\}$ converge, entonces la sucesión de las medias aritméticas de sus términos*

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

*también converge y además, al mismo límite que la propia sucesión $\{x_n\}$.*

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Ante todo, observemos que para cualesquiera números naturales $n_0$ y $n > n_0$ tiene lugar la igualdad

$$y_n - a = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - a = \\ = \frac{x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a}{n} + \frac{(x_{n_0+1} - a) + \ldots + (x_n - a)}{n}. \quad (4.2)$$

Si ahora está dado $\varepsilon > 0$, entonces por la definición de límite existe un número $n_0$ tal que para todos los $n > n_0$ se cumple la desigualdad

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.3)$$

Por cuanto $x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a$ es un número dado y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, entonces como no es difícil ver

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \dots + x_{n_0} - n_0 a}{n} = 0.$$

Por consiguiente, existe un número $m_0$ tal que para todos los $n > m_0$ se cumple la desigualdad

$$\left|\frac{x_1 + \dots + x_{n_0} - n_0 a}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4}$$

Sea $n_\varepsilon = \text{máx}\,\{n_0, m_0\}$. Entonces para todos los números $n > n_\varepsilon$, por (4.2), (4.3) y (4.4) obtendremos

$$|y_n - a| \leqslant \left|\frac{x_1 + \dots + x_{n_0} - n_0 a}{n}\right| + \frac{|x_{n_0+1} - a| + \dots + |x_n - a|}{n} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. □

Ejercicio 4. Demuéstrese: 1) que la eliminación o sustitución de un número finito de elementos de una sucesión no influye en su convergencia, y en el caso de una sucesión convergente no influye en el valor de su límite;

2) si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$ y $z_n = \begin{cases} x_k & \text{cuando } n = 2k - 1, \\ y_k & \text{cuando } n = 2k, \end{cases}$ $k = 1, 2, \dots$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$.

## 4.2. LÍMITES INFINITOS

Para mayor comodidad se introduce también el concepto de sucesiones que tienden al infinito. Tales sucesiones se llaman *infinitas*. Definámoslas.

**Definición 4.** *La sucesión $\{x_n\}$ se llama infinita si para cualquier número $\varepsilon$ existe un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $|x_n| > \varepsilon$.*

En este caso se utiliza el símbolo $\infty$ y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Si la sucesión $x_n$, $n = 1, 2, \dots$, es tal que para cualquier número $\varepsilon$[*] existe $n_\varepsilon$ tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $x_n > \varepsilon$ (respectivamente $x_n < \varepsilon$), entonces se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (respectivamente $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$). En todos estos casos se dice que la sucesión $\{x_n\}$ tiene *límite infinito*, igual respectivamente a $\infty$, $+\infty$ o $-\infty$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, es decir, $\{x_n\}$ es también una sucesión infinita. Es evidente que las sucesiones infinitas no tienen límite en el sentido que fue definido en el p. 3.1. La aplicación en este caso de la notación "lim" y la utilización de la palabra "límite" son tradicionales.

En el futuro siempre por límite de una sucesión entenderemos límite finito, es decir, un número, si no se acuerda lo contrario.

[*] Es necesario prestar atención a que aquí $\varepsilon$ no se supone positivo.

El término de "sucesión convergente" se utiliza sólo para las sucesiones que tienen límite finito.

Recordemos que en el p. 3.2. fue introducido el concepto de entorno para los números reales y para los infinitos $\infty$, $+\infty$ y $-\infty$. Resulta que utilizando el concepto de entorno, las definiciones de límite finito o cualquier infinito de una sucesión numérica se puede enunciar de un modo único.

**Definición 5.** *El punto $a$, finito o infinito (es decir, $a \in \boldsymbol{R}$ o $a$ es uno de los infinitos $\infty$, $+\infty$ ó $-\infty$) se llama límite de una sucesión numérica $\{x_n\}$ si cualquiera que sea el entorno $U(a)$ del elemento $a$, para ella existe un número $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tal que para todos los $n \geqslant n_0$ es válida la inclusión $x_n \in U(a)$.*

Junto con las sucesiones numéricas, en nuestro curso se encontrarán sucesiones de puntos de la recta numérica extendida, es decir, colecciones $\{x_n\}$ de elementos del conjunto extendido de los números reales, numeradas por los números naturales $\overline{\boldsymbol{R}}$ (véase el p. 2.5). De esta forma, elementos de estas sucesiones, conjuntamente con los números reales, pueden ser los puntos infinitamente alejados $+\infty$ y $-\infty$. Para tales sucesiones también se puede introducir el concepto de límite, análogo al límite de las sucesiones numéricas y que los contienen en sí como caso particular.

**Definición 6.** *El punto $a$ de la recta numérica extendida $\overline{\boldsymbol{R}}$ (es decir, un punto finito $a \in \boldsymbol{R}$ o uno de los infinitos con signo: $+\infty$ o $-\infty$) se llama límite de la sucesión de puntos $x_n \in \overline{\boldsymbol{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, si cualquiera que sea el entorno $U(a)$ del punto $a$, para ella existe un número $n_0$ tal que para todos los números $n > n_0$ se cumple la inclusión*

$$x_n \in U(a).$$

OBSERVACIÓN 1. Para cualquier entorno $U(a, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, donde $a$ es un número: $a \in \overline{\boldsymbol{R}}$ o uno de los infinitos $\infty$, $+\infty$ o $-\infty$, existe un natural $n$ tal que se cumple la inclusión $U\left(a, \dfrac{1}{n}\right) \subset U(a, \varepsilon)$. Para convencerse de esto es suficiente tomar $n \in \boldsymbol{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Por esto, si la sucesión $x_n \in \boldsymbol{R}$ es tal que para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la inclusión $x_n \in U\left(a, \dfrac{1}{n}\right)$ (aquí $a$ es un número real o uno de los infinitos $\infty$, $+\infty$ o $-\infty$), entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. En realidad, para cualquier entorno $U(a)$ existe un natural $n_0$ tal que $U\left(a, \dfrac{1}{n_0}\right) \subset U(a)$, entonces para todos los números $n > n_0$ tendremos $x_n \in U\left(a, \dfrac{1}{n}\right) \subset U\left(a, \dfrac{1}{n_0}\right) \subset U(a)$.

Esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

OBSERVACIÓN 2. Si la sucesión $x_n \in \overline{\boldsymbol{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, es tal que todos sus términos son iguales entre sí: $x_n = x_m$ para todos los $n \in \boldsymbol{N}$ y $m \in \boldsymbol{N}$, entonces ella, como es conocido, se llama *estacionaria*.

Cualquier sucesión estacionaria de puntos del conjunto extendido de los números reales tiene límite igual al valor común de sus términos. Esto se deduce directamente de que cada punto de la recta numérica extendida se contiene en cualquiera de sus entornos. En realidad, si para todos los $n \in N$ tiene lugar $x_n = a \in \bar{R}$, entonces para cualquier entorno $U(a)$ del punto $a$ y todos los $n \in N$, de forma análoga se cumple la inclusión $x_n = a \in U(a)$.

En el futuro por sucesión siempre se entenderá sucesión numérica, es decir, una sucesión cuyos elementos son números reales si por supuesto no se acuerda especialmente algo diferente.

Ejercicios. 5. Cítese un ejemplo de sucesión no acotada que no sea infinita.

6. Demuéstrese que si $a_n \leqslant |b_n|$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty$.

7. Demuéstrese que cualquier subsucesión de una sucesión infinita también es una sucesión infinita.

8. Demuéstrese que la multiplicación término por término de una sucesión infinita por otra para la cual el valor absoluto de sus términos está acotado inferiormente por una constante positiva, da como producto una sucesión infinita.

### 4.3. PROPIEDADES MÁS SENCILLAS DEL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Demostremos ante todo que la definición de límite es correcta en el sentido de que si éste existe, entonces es único.

**Teorema 1.** *Una sucesión de puntos de la recta numérica extendida puede tener sobre esta recta sólo un límite.*

**Corolario.** *Una sucesión numérica puede tener sólo un límite finito o infinito de signo definido.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Supongamos que la afirmación del teorema no es válida. Esto significa que existe una sucesión $x_n \in \bar{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ que tiene al menos dos límites diferentes $a \in \bar{R}$ y $b \in \bar{R}$. Tomemos $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ de forma tal que el $\varepsilon_1$-entorno del punto $a$ no se interseca con el $\varepsilon_2$-entorno del punto $b$. Esto siempre se puede hacer por el lema del p. 3.2. (véase las figs. 6, *a*, *b*, *c* y *d*). Por la definición de límite, de la condición $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ se deduce que existe un número $n_1 \in N$ tal que para todos los números $n > n_1$, $n \in N$, tiene lugar la inclusión $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$ y de la condición $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$ se deduce que existe un $n_2 \in N$ tal que para todos los $n > n_2$, $n \in N$, es válida la inclusión $x_n \in U(b, \varepsilon_2)$. Por consiguiente, si denotamos por $n_0$ al mayor de los números $n_1$ y $n_2$: $n_0 \overset{\text{def}}{=} \max\{n_1, n_2\}$, entonces para cualquier $n > n_0$ tendremos al mismo tiempo $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$ y $x_n \in U(b, \varepsilon_2)$, es decir, $x_n \in U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2)$. Esto contradice la condición $U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \varnothing$. $\square$

El corolario es un caso particular de la afirmación del teorema.

Para la unicidad del límite infinito de una sucesión de elementos de $\bar{R}$ es esencial analizar sólo los infinitos de signo definido, ya que si la sucesión tiene como límite un infinito con signo, entonces al mismo tiempo el infinito sin signo es su límite. Por ejemplo, si $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$, entonces, naturalmente, $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \infty$.

Demostremos ahora algunas propiedades simples de los límites finitos e infinitos

I. *Si* $x_n \in \overline{R}$, $y_n \in \overline{R}$, $z_n \in \overline{R}$, $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$,

$$n = 1, 2, \ldots, \tag{4.5}$$

*y*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} z_n = a \in \overline{R}, \tag{4.6}$$

*entonces* $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$

DEMOSTRACIÓN. Sea dado $\varepsilon > 0$. Entonces, por la definición de límite existen $n_1 \in N$ y $n_2 \in N$ tales que para todos los $n > n_1$, $n \in N$, se cumple la inclusión $x_n \in U(a, \varepsilon)$ y para todos los $n > n_2$, $n \in N$, la inclusión $z_n \in U(a, \varepsilon)$. Por consiguiente, si denotamos por $n_0$ al mayor de los números $n_1$ y $n_2$: $n_0 \overset{\text{def}}{=} \max\{n_1, n_2\}$, entonces para todos los números $n > n_0$, $n \in N$, tendremos $x_n \in U(a, \varepsilon)$, $z_n \in U(a, \varepsilon)$ y por eso $[x_n, z_n] \subset U(a, \varepsilon)$ (véase la observación 1 en el p. 3.2). La desigualdad (4.5) significa que $y_n \in [x_n, z_n]$. Por consiguiente, para $n > n_0$ tiene lugar $y_n \in U(a, \varepsilon)$, es decir, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$. □

II. *Si* $x_n \leqslant y_n$, $x_n \in \overline{R}$, $y_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ *(respectivamente,* $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = -\infty$*), entonces* $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = +\infty$ *(respectivamente,* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$*).*

Esta propiedad es un fortalecimiento de la propiedad I para los límites infinitos: en este caso, la segunda sucesión $\{z_n\}$ no es necesaria.

DEMOSTRACIÓN. De la condición $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in N$ tal que para todos los $n > n_\varepsilon$, $n \in N$, se cumple la condición $x_n > \varepsilon$. Por la desigualdad $x_n \leqslant y_n$ es evidente que para todos los $n > n_\varepsilon$ tiene también lugar la desigualdad $y_n > \varepsilon$. Esto significa que $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = +\infty$.

Análogamente se analiza el caso $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = -\infty$. □

III. *Si* $x_n \in \overline{R}$, $y_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, *y existen los límites* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$ *y además* $a < b$, $a \in \overline{R}$, $b \in \overline{R}$, *entonces existe un número* $n_0 \in N$ *tal que para todos los números* $n > n_0$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $x_n < y_n$.

**Corolario.** *Si existe el límite* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $x_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, $a \in \overline{R}$ *y* $a < C$ *(respectivamente,* $a > c$*)* $c \in \overline{R}$, *entonces existe* $n_0 \in N$ *tal que para todos los* $n > n_0$, $n \in N$, *es válida la desigualdad* $x_n < c$ *(respectivamente,* $x_n > c$*).*

DEMOSTRACIÓN. Escojamos cualesquiera $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ de forma tal que los entornos $U(a, \varepsilon_1)$ y $U(b, \varepsilon_2)$ no se intersequen (véase el p. 3.2). Entonces está claro que por la desigualdad $a < b$ para cualesquiera $x \in U(a, \varepsilon_1)$ e $y \in U(b, \varepsilon_2)$ se cumple la desigualdad $x < y$ (véase la observación 2 en el p. 3.2). Por la definición de límite existen tales $n_1 \in N$ y $n_2 \in N$ que para $n > n_1$, $n \in N$, se cumple la inclusión $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$ y para $n > n_2$, $n \in N$, la inclusión $y_n \in U(b, \varepsilon_2)$. Por consiguiente, si hacemos $n_0 \overset{\text{def}}{=} \max\{n_1, n_2\}$, entonces para $n > n_0$ será válida la desigualdad $x_n < y_n$. □

El corolario se deduce de la propiedad III si en ella en calidad de sucesión $\{y_n\}$ tomamos la sucesión estacionaria $y_n = c$, $n = 1, 2, \ldots$, (véase el p. 4.2).

IV. *Si existe* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \in \overline{R}$, $x_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, *y para todos los* $n \in N$ *es* *valida la desigualdad* $x_n \leqslant b$ *(respectivamente, la desigualdad* $x_n \geqslant b$*),* $b \in \bar{R}$*, entonces* $a \leqslant b$ *(respectivamente,* $a \geqslant b$*).*

En efecto, si resultara ser $a > b$ (respectivamente, $a < b$), entonces por el corolario de la propiedad III se encontraría $n_0 \in N$ tal que para $n > n_0$, $n \in N$ tendría lugar la desigualdad $x_n > b$ (respectivamente, $x_n < b$) lo que contradice la suposición de que $x_n \leqslant b$ ($x_n \geqslant b$) para todos los $n \in N$. □

Señalemos que principalmente nos interesan las sucesiones numéricas. Las sucesiones de puntos de la recta numérica extendida se introdujeron ante todo para hacer más compacta la exposición: ellas permiten no analizar separadamente los casos de límites de las sucesiones, finitos e infinitos de signo determinado. Partiendo de los fines principales, en el futuro, las afirmaciones y definiciones serán enunciadas para las sucesiones numéricas, aunque muchos de ellos sin ningún trabajo se generalizan para el caso de las sucesiones de puntos de la recta numérica extendida.

OBSERVACIÓN. Si la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite finito igual a $a$ y si está dado cierto número $c > 0$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un número que de la misma forma que en la definición de límite, se denotará por $n_\varepsilon$ que para todos los números $n > n_\varepsilon$ se cumpla la desigualdad
$$|x_n - a| < c\varepsilon.$$

En efecto, si hacemos $\varepsilon_1 = c\varepsilon$, entonces por la definición de límite de una sucesión existe un número $n_{\varepsilon_1}$ tal que para todos los números $n > n_{\varepsilon_1}$ se cumple la desigualdad
$$|x_n - a| < \varepsilon_1 = c\varepsilon$$
y en calidad de número $n_\varepsilon$ se puede tomar el número $n_{\varepsilon_1}$.

Por ejemplo, si $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los números $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad
$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A veces resulta útil analizar la sucesión obtenida de una sucesión por el cambio de numeración de sus términos. En el futuro para tales sucesiones utilizaremos repetidas veces el siguiente lema.

**Lema.** *Si la sucesión* $x_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$ *, tiene un límite finito o infinito y* $\{n_k\}$ *es una sucesión de números naturales tal que*
$$\lim_{k \to \infty} n_k = +\infty, \tag{4.7}$$
*entonces la sucesión* $\{x_{n_k}\}$ *tiene ese mismo límite.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Esto significa que para cualquier entorno $U(a)$ del punto $a$ existe un número $n_0$ tal que para todos los números $n > n_0$ se cumple la inclusión
$$x_n \in U(a). \tag{4.8}$$

Para el número $n_0$ por la condición (4.7) existe un número $k_0$ tal que para todos los números $k > k_0$ son válidas las desigualdades
$$n_k > n_0,$$

y por consiguiente, tiene lugar la inclusión

$$x_{n_k} \in U(a).$$

Esto significa que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. □

OBSERVACIÓN. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ y $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, entonces a veces, del límite de la sucesión $\{x_{n_k}\}$ se puede decir más que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$: puede ocurrir que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$ o $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = -\infty$. Por ejemplo, $\lim\limits_{k\to\infty} (-n)^n = \infty$ y $\lim\limits_{k\to\infty} (-2k)^{2k} = +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} [-(2k-1)]^{2k-1} = -\infty$.

Ejercicio 9*. Sea $k \to n_k$ alguna biyección del conjunto de los números naturales $N$ sobre sí mismo: $k \in N$, $n_k \in N$. Demuéstrese que si la sucesión $\{x_n\}$ converge (diverge), entonces la sucesión $\{x_{n_k}\}$ converge (diverge) y en el caso de convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ o de la existencia para ella de cualquier límite infinito, la sucesión $\{x_{n_k}\}$ tiene ese mismo límite.

## 4.4. ACOTACIÓN DE LAS SUCESIONES CONVERGENTES

Es necesario diferenciar la *sucesión* $\{x_n\}$, es decir, el conjunto de los elementos $a_n$, y el *conjunto de los valores de sus elementos*. El primer conjunto siempre es infinito, ya que está constituido por un conjunto de elementos que se diferencian al menos por los números $n = 1, 2, \ldots$ El segundo conjunto está compuesto por todos los números que son valores de los elementos de la sucesión dada, que puede ser finito. Por ejemplo, la sucesión $x_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, como cualquier sucesión está compuesta por un número infinito de elementos y el conjunto de los valores de sus elementos está compuesto por un número 1.

**Definición 7.** *La sucesión se llama acotada superiormente (inferiormente) si el conjunto de los valores de los elementos de esta sucesión está acotado superiormente (inferiormente).*

En términos de los elementos de la sucesión esta definición puede ser enunciada de la siguiente forma.

**Definición 7'.** *La sucesión $\{x_n\}$ se llama acotada superiormente (inferiormente) si existe un número $b$ tal que para todos los números $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad $x_n \leqslant b$ (respectivamente, la desigualdad $x_n \geqslant b$).*

**Definición 8.** *Una sucesión acotada superiormente e inferiormente se llama simplemente acotada.*

Es evidente que una sucesión $\{x_n\}$ está acotada si y sólo si existe tal número $b$ que para todos los números $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad $|x_n| \leqslant b$.

**Definición 9.** *Una sucesión que no está acotada (superiormente, inferiormente) se llama no acotada (superiormente, inferiormente).*

Por ejemplo, las sucesiones $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ y $\left\{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} n\right\}$ están acotadas. La sucesión $\{n\}$ es no acotada, más exactamente, es acotada inferiormente, pero no está acotada superiormente y la sucesión $\left\{n \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} n\right\}$ es no acotada, tanto superior como inferiormente.

**Teorema 2.** *Si una sucesión tiene límite finito, entonces está acotada.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dada una sucesión convergente $\{x_n\}$ y sea $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Tomemos, por ejemplo, $\varepsilon = 1$. Por la definición de límite de una sucesión, existe $n_1$ tal que para todos los $n > n_1$ se cumple la desigualdad $|x_n - a| < 1$. Sea $d$ el mayor de los números 1, $|x_1 - a|, \dots, |x_{n_1} - a|$. Entonces para todos los $n = 1, 2, \dots$ es válida la desigulдad $|x_n - a| \leqslant d$, es decir, para todos los $n$

$$a - d \leqslant x_n \leqslant a + d.$$

Esto significa que la sucesión está acotada. □

## 4.5. SUCESIONES MONÓTONAS

**Definición 10.** *La cota superior (inferior) de conjunto de los valores de los elementos de una sucesión* $\{x_n\}$ *se llama cota superior (inferior) de la sucesión dada y se denota por* $\sup\{x_n\}$ *o* $\sup_{n=1,2,\dots} x_n$ *(respectivamente,* $\inf\{x_n\}$ o $\inf_{n=1,2,\dots} x_n$*).*

Si la cota superior (inferior) es un número, entonces esta definición se puede enunciar de la siguiente forma.

**Definición 10'.** *El número a es cota superior (inferior) de la sucesión* $x_n$, $n = 1, 2, \dots$ *si:*

1) *para todos los* $n = 1, 2, \dots$ *se cumple la desigualdad* $x_n \leqslant a$ *(respectivamente, la desigualdad* $x_n \geqslant a$*);*

2) *para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $n_\varepsilon$ *tal que* $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$ *(respectivamente,* $x_{n_\varepsilon} < a + \varepsilon$*).*

De forma análoga se puede enunciar la definición de cota superior (inferior) de una sucesión en el caso cuando la cota indicada es infinita. (Hágase esto).

En calidad de ejemplos señalemos que $\sup\{1/n\} = 1$, $\inf\{1/n\} = 0$, $\sup\{n\} = +\infty$, $\inf\{n\} = 1$. Aquí por doquier $n = 1, 2, \dots$

**Definición 11.** *La sucesión* $\{x_n\}$ *se llama sucesión creciente (decreciente) si para cada* $n = 1, 2, \dots$ *se cumple la desigualdad* $x_n \leqslant x_{n+1}$ *(respectivamente, la desigualdad* $x_n \geqslant x_{n+1}$*)**)*.*

Las sucesiones crecientes y decrecientes se llaman *monótonas*. Por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$ decrece, la sucesión $\{n\}$ crece, y la sucesión $\left\{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n\right\}$ no es monótona.

**Teorema 3 (de Weierstrass)****). *Cualquier sucesión creciente (decreciente)* $\{x_n\}$ *tiene límite, finito si está acotada superiormente (inferiormente), e infinito igual a* $+\infty$ *(respectivamente,* $-\infty$*) si no está acotado superiormente (inferiormente) con la particularidad de que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$$

*(respectivamente,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}).$$

---

*) Las sucesiones crecientes (decrecientes) también se llaman no decrecientes (no crecientes).

**) C. Weierstrass (1815—1897), matemático alemán.


FIG. 10

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ crece y está acotada superiormente. Por la última condición tiene cota superior finita (véase el teorema 1 en el p. 3.4). Sea $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{x_n\}$. Mostremos que $\beta = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. De $\beta = \sup \{x_n\}$ se deduce que para todos los $n = 1, 2, \ldots$ es válida la desigualdad $x_n \leqslant \beta$ y que existe un número $n_\varepsilon$ tal que $x_{n_\varepsilon} > \beta - \varepsilon$ (fig. 10). Entonces por el crecimiento de la sucesión $\{x_n\}$ para todos los números $n > n_\varepsilon$ tendremos: $\beta - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leqslant x_n \leqslant \beta$. Por eso para todos los $n > n_\varepsilon$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $|x_n - \beta| < \varepsilon$. Esto significa que $\beta = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Si la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada superiormente, entonces $\sup \{x_n\} = +\infty$ (véase el p. 3.4). Mostremos que en este caso $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

De nuevo, escogemos un $\varepsilon > 0$ de forma arbitraria. De que la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada superiormente se deduce que existe un númro $n_\varepsilon$ tal que $x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Entonces por el crecimiento de la sucesión $\{x_n\}$ para todos los números $n > n_\varepsilon$ tendremos $x_n \geqslant x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Esto significa que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

De forma análoga, se analiza el caso de las sucesiones decrecientes. Además, se puede reducir al caso de la sucesión creciente si observamos que para cada sucesión decreciente $\{x_n\}$ la sucesión $\{-x_n\}$ es creciente. ☐

OBSERVACIÓN 1. De esta forma, cualquier sucesión monótona tiene límite: finito si está acotada e infinito si no está acotada. Este límite es igual a $+\infty$ si la sucesión monótona no está acotada superiormente y es igual a $-\infty$ si no está acotada inferiormente.

Por cuanto cualquier subsucesión de una sucesión monótona también es monótona, entonces ella a su vez siempre tiene límite finito o infinito, que evidentemente coincide con el límite de toda la sucesión (véase el lema en el p. 4.3).

Vimos que si una sucesión converge, entonces está acotada (teorema 2), de donde, en particular, se deduce que si una sucesión creciente converge, entonces está acotada superiormente; por otro lado, si una sucesión creciente está acotada superiormente, entonces converge (teorema 3). De esta forma, es válida la siguiente afirmación.

**Corolario.** *Para que una sucesión creciente converja, es necesario y suficiente que esté acotada superiormente.*

La afirmación análoga también es válida para una sucesión decreciente.

OBSERVACIÓN 2. Si $[a_n, b_n]$ es un sistema de segmentos encajados que tienden a cero por longitud y $\xi$ es el punto que pertenece a todos los segmentos del sistema dado, entonces

$$\xi = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n. \tag{4.9}$$

En realidad, en el punto 3.6 fue mostrado que $\xi = \sup \{a_n\} = \inf \{b_n\}$. Por otro lado, la sucesión $\{a_n\}$ (respectivamente, $\{b_n\}$) crece (decrece) de donde se deduce (4.9).

Ejemplo. El número $e$.

$$\text{Sea } x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Mostremos que esta sucesión converge. Aplicando la fórmula del binomio de Newton obtenemos:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots \\ &\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Por cuanto en el paso de $n$ a $n + 1$ el número de sumandos, que son positivos, crece y ademaś, cada sumando a partir del tercero crece:

$$1 - \frac{s}{n} < 1 - \frac{s}{n+1}, \quad s = 1, \; 2, \ldots, \; n - 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

entonces

$$x_n < x_{n+1}, n = 1, 2, \ldots .$$

Más adelante, observando que en (4.10) cada paréntesis del tipo $\left(1 - \frac{s}{n}\right)$ es menor que uno y $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ para todos los $n = 1, 2, 3, \ldots$, tenemos

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La suma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ (que se puede calcular fácilmente por la fórmula conocida de la matemática elemental para la suma de los términos de una progresión geométrica, es igual a $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$), para cualquier $n = 1, 2, \ldots$, es menor que uno, por lo que finalmente

$$2 \leqslant x_n < x_{n+1} < 3. \tag{4.11}$$

Así pues, la sucesión $\{x_n\}$ crece y está acotada superiormente, lo que quiere decir, que por el teorema 3 tiene límite. Este límite se denota por la letra $e$.

Pasando al límite en (4.11) obtenemos $2 < e \leqslant 3$. Con estimaciones maś exactas se puede obtener que es válida la igualdad aproximada

$$e \approx 2,718281828459045.$$

Se demuestra también que el número $e$ es irracional (véase el p. 35.14*)) y aún más, trascendente, es decir, no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros. El número $e$ en el análisis matemático juega un papel importante. En particular, es la base de los logaritmos naturales.

## 4.6. TEOREMA DE BOLZANO — WEIERSTRASS

Ante todo introduzcamos el concepto de subsucesión de una sucesión dada.

**Definición 7.** *La sucesión $y_k$, $k = 1, 2, \dots$, se llama subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$ si para cualquier $k$ existe un natural $n_k$ tal que $y_k = x_{n_k}$ y además $n_{k_1} < n_{k_2}$ si y sólo si $k_1 < k_2$. La sucesión $\{y_k\}$ se denota en este caso por $\{x_{n_k}\}$ o $x_{n_k}$, $k = 1, 2, \dots$*

Dicho de otro modo, si se da una sucesión cualquiera y de algún subconjunto de sus elementos se forma una nueva sucesión, entonces ésta se llama *subsucesión de la sucesión inicial*, si el orden seguido por los elementos en él es el mismo que el de la sucesión dada.

Así, la sucesión $1, 3, 5, \dots, 2n + 1 \dots$ es una subsucesión y la sucesión $2, 1, 3, 4, \dots, n, \dots$ no es subsucesión de la serie natural de números $1, 2, \dots, n \dots$ En ambos casos, los elementos de las sucesiones forman un subconjunto*) del conjunto de los números naturales, pero en el primer caso, los miembros de la sucesión están ubicados en el mismo orden que en la serie natural de números, y en el segundo caso, este orden está alterado.

Si $\{x_{n_k}\}$ es subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$, entonces evidentemente $n_k \geqslant k$, $k = 1, 2, \dots$, por consiguiente

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty. \tag{4.7}$$

De aquí se deduce por el lema del p. 4.3 que si la sucesión tiene límite finito o infinito, entonces cualquiera de sus subsucesiones tiene ese mismo límite.

En el p. 4.4 fue demostrado que cualquier sucesión convergente está acotada. La afirmación inversa, por supuesto, no es cierta. Por ejemplo, la sucesión $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$, está acotada y diverge. No obstante, resulta que cualquier sucesión acotada contiene una subsucesión convergente. Esta afirmación se llama teorema de Bolzano-Weierstrass**) o propiedad de compacidad de una sucesión acotada.

**Teorema 4.** *De cualquier sucesión acotada se puede extraer una subsucesión convergente y de cualquier sucesión no acotada se puede extraer una subsucesión infinita cuyo límite es un infinito de signo definido.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada, es decir, que existe un segmento $[a, b]$ tal que $a \leqslant x_n \leqslant b$ para todos los $n = 1, 2, \dots$. Dividamos al segmento $[a, b]$ en dos segmentos iguales. Al menos uno de los segmentos obtenidos contiene un

*) Recordemos (véase el p. 1.1) que el propio conjunto se considera su subconjunto.

**) B. Bolzano (1781—1848), matemático checo.

número infinito de elementos de la sucesión dada. Denotémoslo por $[a_1, b_1]$. Sea $x_{n_1}$ cualquiera de los elementos de la sucesión dada que pertenece al segmento $[a_1, b_1]$.

Dividamos el segmento $[a_1, b_1]$ en dos segmentos iguales; de nuevo, al menos uno de los dos segmentos obtenidos contiene un número infinito de términos de la sucesión inicial, denotémoslo por $[a_2, b_2]$. Por cuanto, en el segmento $[a_2, b_2]$ hay un número infinito de términos de la sucesión $\{x_n\}$, se encuentra un término $x_{n_2}$ tal que $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ y $n_2 > n_1$. Continuando este proceso, obtenemos una sucesión de segmentos $[a_k, b_k]$ en la cual cada segmento posterior es la mitad del anterior, y una sucesión de tales elementos $\{x_{n_k}\}$ de la sucesión dada que $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots$ y $n_{k''} > n_{k'}$ cuando $k'' > k'$. La sucesión $\{x_{n_k}\}$ es subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$ por construcción. Mostremos que esta subsucesión es convergente.

La sucesión de segmentos $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, es una sucesión de segmentos encajados cuyas longitudes tienden a cero, ya que $b_k - a_k = \dfrac{b - a}{2^k} \to 0$ cuando $k \to \infty$. Por el principio de los segmentos encajados (véase el p. 3.6) existe un punto $\xi$ único que pertenece a todos estos segmentos. Como vimos (véase (4.9) en la observación 2 al teorema 3), $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \xi$, pero $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, $k = 1, 2, \ldots$, por lo que por la propiedad I (véase el p. 4.3) de las sucesiones convergentes, la sucesión $\{x_{n_k}\}$ también converge y $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$.

Supongamos que ahora la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada. Entonces no está acotada superiormente o bien no está acotada inferiormente o bien tiene lugar uno y lo otro. Supongamos para mayor exactitud que la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada superiormente. Entonces existe un número $n_1 \in N$ tal que $x_{n_1} > 1$.

Es evidente que la sucesión $x_n$, $n = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots$, tampoco está acotada superiormente, ya que se obtiene de la sucesión $x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, no acotada superiormente con la exclusión de un número finito de términos. Por esto, existe $n_2 > n_1$, $n_2 \in N$, tal que $x_{n_2} > 2$.

Continuando este proceso obtenemos una sucesión de números $n_k$ tales que

$$n_1 < n_2 < \ldots n_k < \ldots$$

y

$$x_{n_1} > 1, \quad x_{n_2} > 2, \ldots, \quad x_{n_k} > k, \ldots$$

De aquí se deduce, que $\{x_{n_k}\}$ es una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$, y debido a la propiedad II del p. 4.3, que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$. □

OBSERVACIÓN. La segunda afirmación del teorema 4 puede ser precisada. Como se ve de la demostración dada, en ella se mostró que si la sucesión no es acotada superiormente, entonces ésta contiene una subsucesión que tiende hacia $+\infty$. Análogamente, si la sucesión no es acotada inferiormente, entonces ella contiene una subsucesión, que tiende hacia $-\infty$.

**Definición 13.** *El límite, finito o infinito, de signo determinado, de una subsucesión de cierta sucesión se llama límite parcial de la sucesión dada.*

El teorema de Bolzano — Weierstrass (primera parte del teorema 4) y su análogo para las sucesiones no acotadas (segunda parte del teorema 4), muestra que

***cualquier sucesión tiene al menos un límite parcial finito o infinito, además, es a ciencia cierta, finito si la sucesión dada es acotada.***

De esta forma, cada sucesión numérica $\{x_n\}$, $x_n \in R$, tiene al menos un límite parcial en el conjunto ampliado de los números reales, es decir, el conjunto de los límites parciales en $\overline{R}$ para cualquier sucesión siempre es no vacío.

Ejercicios. 10. Demuéstrese que para que una sucesión sea convergente, es necesario y suficiente que sea acotada y tenga un límite parcial único.

11. Demuéstrese que el elemento $a$ (un número o uno de los infinitos con signo: $+\infty$ o $-\infty$) es un límite parcial de una sucesión si, y sólo si, en cualquiera de sus entornos se contiene un número infinito de términos de la sucesión dada.

## 4.7. CRITERIO DE CAUCHY PARA LA CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Hasta ahora no se ha dado un criterio suficientemente general con ayuda del cual se pueda conocer, si una sucesión dada es convergente o no. La propia definición de sucesión convergente es poco cómoda para esto, ya que en ella interviene el valor del límite, el que puede ser desconocido. Por esto, es deseable tener un criterio tal para la definición de convergencia y divergencia de una sucesión, que se basase solamente en las propiedades de los elementos de la sucesión dada. El teorema 5, que se expone a continuación, da precisamente un criterio semejante.

**Definición 14.** *Diremos que la sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy**), *si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los números $n$ y $m$, que satisfacen las condiciones $n > n_\varepsilon$, $m > n_\varepsilon$, se cumple la desigualdad*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon. \qquad (4.12)$$

Las sucesiones, que satisfacen la condición de Cauchy, se llaman también *sucesiones fundamentales.*

Con ayuda de los símbolos lógicos, la condición de Cauchy se escribe de la forma siguiente:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in N)(\forall n \in N, \forall m \in N, n > n_\varepsilon, m > n_\varepsilon) : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

La condición (4.12) se puede enunciar de la siguiente forma.

*Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los números $n > n_\varepsilon$ y todos los enteros no negativos $p$*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \qquad (4.13)$$

Para convencerse de la equivalencia de las condiciones (4.12) y (4.13) es suficiente hacer $p = n - m$, si $n \geqslant m$, y $p = m - n$ si $m > n$.

**Teorema 5 (criterio de Cauchy).** *Para que una sucesión converja es necesario y suficiente que satisfaga la condición de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Demos $\varepsilon > 0$; entonces de acuerdo con la definición de límite de una

*) A. L. Cauchy (1798—1857), matemático francés.

sucesión, existe $n_\varepsilon$ tal que para todos los números $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea ahora $n > n_\varepsilon$ y $m > n_\varepsilon$, entonces

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, se cumple la condición de Cauchy.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon$ tal que si $n > n_\varepsilon$ y $m > n_\varepsilon$, entonces $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Tomemos, por ejemplo, $\varepsilon = 1$, entonces existe $n_1$ tal que para $n > n_1$ y $m > n_1$ se cumple la desigualdad $|x_n - x_m| < 1$. En particular, si $n > n_1$ y $m = n_1 + 1$, entonces $|x_n - x_{n_1+1}| < 1$, es decir, $x_{n_1+1} - 1 < x_n < x_{n_1+1} + 1$ cuando $n > n_1$. Esto significa que la sucesión $x_n$, $n = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots$ está acotada. Por esto, por el teorema 4, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente.

Sea $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = a$. Mostremos que toda la sucesión $\{x_n\}$ dada, también converge y tiene como límite al número $a$. Demos cierto $\varepsilon > 0$. Entonces, en primer lugar, por la definición de límite de una sucesión, existe $k_\varepsilon$ tal que para todos los números $k > k_\varepsilon$, o lo que es lo mismo, por la definición de subsucesión, para todos los $n_k > n_{k_\varepsilon}$ se cumple la desigualdad $|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

En segundo lugar, ya que la sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy, entonces existe $n_\varepsilon$ tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ y todos los $m > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hagamos $N_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$ y fijemos cierto $n_k > N_\varepsilon$. Entonces, para todos los $n > N_\varepsilon$ obtendremos:

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

y esto demuestra que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. □

Ejercicios. 12. Enúnciense las condiciones positivas necesarias y suficientes que sean la negación del criterio de Cauchy para que la sucesión no tenga límite.

13. Demuéstrese que para que la sucesión $\{x_n\}$ sea convergente es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in N$ tal que para todos los $n > n_\varepsilon$, $n \in N$, se cumpla la desigualdad $|x_n - x_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$.

**Problema 3.** Aclárese si se deduce o no la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ de la condición de que para cualquier natural $p$ existe el límite $\lim\limits_{n \to \infty} (x_{n+p} - x_n) = 0$.

## 4.8. SUCESIONES INFINITESIMALES

Sobre las sucesiones se pueden efectuar las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y devisión. Definámoslas.

**Definición 15.** *Sean dadas las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$; se llaman suma, diferencia y producto de estas sucesiones respectivamente las sucesiones $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$ y $\{x_ny_n\}$. Si $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces se llama cociente de la división de la sucesión $\{x_n\}$ entre la sucesión $\{y_n\}$ la sucesión $\{x_n/y_n\}$. Finalmente, se llama producto de la sucesión $\{x_n\}$ por un número c la sucesión $\{cx_n\}$.*

Si la sucesión $\{y_n\}$ es tal que en ella se tiene sólo un número finito de elementos iguales a cero, es decir, existe $n_0 \in N$ tal que para $n \geqslant n_0$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $y_n \neq 0$, entonces se puede analizar la sucesión $\{x_n/y_n\}$ entendiendo por ella la sucesión con números $n \geqslant n_0$.

**Definición 16.** *La sucesión $\{\alpha_n\}$ se llama infinitesimal si $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$.*

Ya nos encontramos en el p. 4.1 con las sucesiones infinitesimales $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, $\alpha_n = \dfrac{1}{n} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} n$, $n = 1, 2, \ldots$

Señalemos algunas propiedades de las sucesiones infinitesimales.

I. *La suma algebraica de un número finito de sucesiones infinitésimas es una sucesión infinitésima.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ sucesiones infinitesimales. Mostremos que las sucesiones $\{\alpha_n + \beta_n\}$ y $\{\alpha_n - \beta_n\}$ son también infinitésimas. Demos un $\varepsilon > 0$, entonces existe (¿por qué?) un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumplen las desigualdades $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Por esto, para $n > n_\varepsilon$ tenemos

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo que significa que $\lim\limits_{n \to \infty} (\alpha_n \pm \beta_n) = 0$.

La afirmación correspondiente para cualquier número finito de sumandos se deriva de lo demostrado por inducción. □

**Problema 4.** Definiendo la suma de un número infinito de sumandos numerados (concepto generalizado de la suma de un número finito de sumandos) y luego la suma de un número infinito de sucesiones, constrúyase un ejemplo de un número infinito de sucesiones infinitesimales cuya suma no es una sucesión infinitésima.

*II. El producto de una sucesión infinitesimal por una sucesión acotada es una sucesión infinitesimal.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión infinitesimal y $\{x_n\}$, una sucesión acotada, es decir, existe un número $b > 0$ tal que para todos los números $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad $|x_n| \leqslant b$.

Demos un $\varepsilon > 0$; por la definición de sucesión infinitesimal existe un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{b}$. Por esto, para todos los $n > n_\varepsilon$ tenemos

$$|\alpha_n x_n| = |\alpha_n||x_n| < \frac{\varepsilon}{b} \cdot b = \varepsilon,$$

lo que significa que la sucesión $\{\alpha_n x_n\}$ es infinitesimal. □

**Corolario.** *El producto de un número finito de sucesiones infinitesimales es una sucesión infinitesimal.*

Esto se deduce directamente por inducción de la propiedad II si observamos que una sucesión infinitesimal, como cualquier sucesión que tiene límite, está acotada (véase el teorema 2 del p. 3.4).

**Problema 5.** Definiendo el producto de un número infinito de factores numerados (concepto generalizado de producto de un número finito de factores) y luego el producto de un número infinito de sucesiones, constrúyase un ejemplo de un número infinito de sucesiones infinitesimales, cuyo producto no sea una sucesión infinitesimal.

Ejercicio 14. Demuéstrese que para que una sucesión $x_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, sea infinitesimal es necesario y suficiente que la sucesión $1/x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, sea infinita.

## 4.9. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES RELACIONADAS CON LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS SOBRE LAS SUCESIONES

**Lema.** *Para que el número $a$ sea el límite de la sucesión $\{x_n\}$ es necesario y suficiente que su término $x_n$ sea del tipo $x_n = a + \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, donde $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitesimal.*

En realidad, sea dada una sucesión cualquiera $\{x_n\}$ y el número $a$; hagamos $\alpha_n \overset{def}{=} x_n - a$. Entonces, la condición $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ por la definición de límite de la sucesión es equivalente a que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que para todos los $n > n_0$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$, es decir, la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon$ y esto es equivalente a $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. □

Este lema muestra el papel singular de las sucesiones infinitesimales en el estudio del concepto de límite, ya que el concepto general de límite de una sucesión con ayuda de este lema se reduce al concepto del límite nulo. Esta circunstancia más adelante se utiliza ampliamente en el estudio de una serie de propiedades de las sucesiones convergentes.

1°. *Si $x_n = c$, $n = 1, 2, \ldots$ (es decir, la sucesión $\{x_n\}$ es estacionaria), entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.*

Dicho brevemente, el límite de una constante es igual a esta misma constante.

En realidad, la sucesión $x_n - c = c - c = 0$ es infinitesimal y por esto, por el lema, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. □

2°. *Si la sucesión $\{x_n\}$ es convergente, entonces también es convergente la sucesión $\{|x_n|\}$, además, si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in R$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los números $n > n_\varepsilon$, se cumple la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$, pero $\left||x_n| - |a|\right| < |x_n - a|$. Por lo tanto, para todos los números $n > n_\varepsilon$ tiene lugar la desigualdad $\left||x_n| - |a|\right| < \varepsilon$ y esto significa que $\lim |x_n| = |a|$. □

3°. *Si las sucesiones* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *convergen, entonces las sucesiones* $\{x_n \pm y_n\}$ *también convergen y*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

*es decir, el límite de la suma algebraica de dos sucesiones convergentes es igual a la suma de los límites de las sucesiones dadas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Por la necesidad de las condiciones del lema para la existencia del límite tenemos

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Por consiguiente, $x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$, $n = 1, 2, \dots$, donde por la propiedad I de las sucesiones infinitesimales (véase el p. 4.8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) = 0$. Por esto, según la suficiencia de las condiciones del lema para la existencia del límite, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n. \square$$

**Corolario.** *El límite de la suma algebraica finita de sucesiones convergentes es igual a esa misma suma algebraica de los límites de las sucesiones sueltas.*

Esto se deduce directamente por inducción de la propiedad demostrada de los límites de las sucesiones convergentes.

4°. *Si las sucesiones* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *convergen, entonces la sucesión* $\{x_n y_n\}$ *también converge y*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n,$$

*es decir, el límite del producto de sucesiones convergentes existe y es igual al producto de los límites de las sucesiones dadas.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, entonces

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

donde, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$; por lo que $x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n)$.

Por las propiedades I y II de las sucesiones infinitesimales (véase el p. 4.8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n) = 0$; por lo que

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n.$$

**Corolario 1.** *Si la sucesión* $\{x_n\}$ *converge, entonces para cualquier número c, la sucesión* $\{cx_n\}$ *también converge y*

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c \lim_{n\to\infty} x_n,$$

*es decir, una constante se puede sacar fuera del signo del límite.*

Esta afirmación se deduce inmediatamente de las propiedades 1° y 4°.

**Corolario 2.** *Si* $\{x_n\}$ *es una sucesión convergente y k es un número natural, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k.$$

Esto se deduce directamente de la propiedad 4° por inducción.

5°. *Si las sucesiones* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *convergen*, $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, *y* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *entonces, la sucesión* $\{x_n/y_n\}$ *converge y*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},$$

*es decir, en las suposiciones hechas, el límite del cociente de sucesiones convergentes existe y es igual al cociente de los límites de las sucesiones dadas.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ y para mayor exactitud, $b > 0$. Entonces,

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$ y por el corolario de la propiedad III de los límites de las sucesiones del p. 4.3 existe un número $n_0$ tal que para todos números $n > n_0$ se cumple la desigualdad $y_n > \dfrac{b}{2} > 0$ (efectivamente, observando que $\dfrac{b}{2} < b$, en la propiedad indicada en calidad de $c$ hace falta tomar $c = \dfrac{b}{2}$), aquí se utiliza la suposición de que $b > 0$; por lo que para $n > n_0$ tenemos $\dfrac{1}{y_n} < \dfrac{2}{b}$ (por cuanto $y_n \neq 0$, entonces por él se puede dividir).

A continuación

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b+\beta_n)}(\alpha_n b - \beta_n a). \tag{4.14}$$

Aquí $0 < \dfrac{1}{b(b+\beta_n)} = \dfrac{1}{by_n} < \dfrac{2}{b^2}$, es decir, la sucesión $1/(b(b+\beta_n))$, $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$, está acotada (de aquí, claramente se deduce que esta sucesión está acotada para todos los $n = 1, 2, \dots$).

Por las propiedades de las sucesiones infinitesimales, la sucesión $\{\alpha_n b - \beta_n b\}$ es infinitesimal, por lo que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{b(b+\beta_n)}(\alpha_n b - \beta_n a)\right\}$ es infinitesimal. Por esto, de (4.14) se deduce que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},$$

De forma análoga se analiza el caso cuando $b < 0$. □

OBSERVACIÓN. En el caso de sucesiones que tienen límites infinitos las afirmaciones análogas a 3° — 5°, en general, no tienen lugar. Por ejemplo, sea $x_n = n + 1$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \dots$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 1.$$

Si $x_n = 2n$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \dots$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = +\infty.$$

Si ahora $x_n = n + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = +\infty,$$

y la sucesión $x_n - y_n = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, no tiene ni límite finito ni infinito.

Estos ejemplos muestran que en suposiciones iguales, con respecto a las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ que tienen límites infinitos, para las sucesiones $\{x_n - y_n\}$ pueden encontrarse los casos más diversos. Junto con esto, algunas generalizaciones de las propiedades $3^\circ - 5^\circ$ en el caso de sucesiones con límites infinitos, no obstante, tienen lugar. Por ejemplo, si $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$ y $\lim_{n \to \infty} y_n = +\infty$ (o $\lim_{n \to \infty} y_n$ es finito), entonces $\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = +\infty$ o si $\alpha > 0$ y $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$, entonces $\lim_{n \to \infty} \alpha x_n = \alpha \lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$ (se recomienda demostrarlo por sí mismo).

Ejercicio 15. Demuéstrese que si $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$ y la sucesión $\{y_n\}$ está acotada, entonces $\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = +\infty$.

Ejemplos. 1. Sea $a > 0$, $x_0 > 0$ y

$$x_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{4.15}$$

Demostremos que $\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{a}$. Por inducción, es evidente que $x_n > 0$ para todos los $n = 0, 1, 2, \ldots$. Mostremos inicialmente que

$$x_n \geqslant \sqrt{a}, n = 1, 2, \ldots . \tag{4.16}$$

Para esto, observemos previamente, que de la desigualdad evidente $(t - 1)^2 \geqslant 0$ en el caso de $t > 0$ se deduce la desigualdad $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$. Utilizando esta desigualdad para $t = \frac{x_n}{\sqrt{a}}$ por (4.15) obtenemos:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \geqslant \frac{\sqrt{a}}{2}\,2 = \sqrt{a}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots .$$

Mostremos ahora que la sucesión $x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, decrece monótonamente. Aplicando la desigualdad (4.16) obtenemos:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leqslant \frac{x_n}{2}\,2 = x_n, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{4.17}$$

Así pues, $\sqrt{a} \leqslant \ldots \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \leqslant \ldots \leqslant x_1$, dondequiera que esté ubicada "la aproximación nula" $x_0 > 0$, es decir, la sucesión $\{x_n\}$ está acotada inferiormente y decrece monótonamente, por eso, según el teorema 3, tiene límite.

Sea $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Pasando al límite en la igualdad (4.15), cuando $n \to \infty$ obtenemos la igualdad

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

de donde $x^2 = a$ y ya que $x_n \geqslant 0$, entonces $x \geqslant 0$ y por eso $x = \sqrt{a}$.

La fórmula (4.15) puede servir para el cálculo aproximado de los valores de la raíz cuadrada del número $a$. En efecto, ella se aplica en la práctica con este fin, en particular, en los cálculos con las máquinas calculadoras de acción rápida.

No es difícil calcular la exactitud con la que la aproximación $n$-ésima, es decir, el término $x_n$, da el valor de la raíz $\sqrt{a}$.

De fórmula recurrente (4.15) tenemos:

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a) =$$
$$= \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Aplicando la desigualdad (4.16) de aquí hallamos:

$$0 \leqslant x_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(x_n - \sqrt{a})^2, \quad n = 1, 2, \dots .$$

La estimación obtenida no es totalmente cómoda en la práctica, por cuanto no conocemos el valor de la raíz $\sqrt{a}$, pues ésta es precisamente la que buscamos. No obstante, siempre se puede hallar un $c$ aproximado tal que $0 < c < \sqrt{a}$ y se puede escoger $x_0 \geqslant c$, entonces, de la estimación obtenida tendremos

$$0 \leqslant x_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2c}(x_n - \sqrt{a})^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

o

$$\frac{1}{2c}(x_{n+1} - \sqrt{a}) \leqslant \left[\frac{1}{2c}(x_n - \sqrt{a})\right]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

De aquí, por inducción, hallamos:

$$\frac{1}{2c}(x_n - \sqrt{a}) \leqslant \left[\frac{1}{2c}(x_{n-1} - \sqrt{a})\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left[\left(\frac{1}{2c}(x_{n-2} - \sqrt{a})\right)^2\right]^2 \leqslant \dots \leqslant \left[\frac{1}{2c}(x_0 - \sqrt{a})\right]^{2^n}. \tag{4.18}$$

Si escogemos la aproximación nula $x_0$ de forma tal, que

$$q \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2c}|x_0 - \sqrt{a}| < 1,$$

entonces de (4.18) se obtendrá que

$$0 \leqslant x_n - \sqrt{a} \leqslant 2cq^{2^n}, n = 1, 2, \dots ,$$

es decir, la sucesión (4.15) converge al valor de la raíz mucho más rápido que la progresión geométrica con denominador $q$, $0 < q < 1$.

Para la ilustración del cálculo aproximado de la raíz por la fórmula (4.15) demos los resultados del cálculo de $\sqrt{2}$ en la computadora, en el caso cuando en calidad de aproximación nula $x_0$ fue escogido $x_0 = 1$:

$$x_1 = \mathbf{1,}500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000$$

$$x_2 = \mathbf{1,41}66666666666666666666666666666666666666666666666666666666666$$

$$x_3 = \mathbf{1,41421}568627450980392156862745098039215686274509803921568627$$

$$x_4 = \mathbf{1,41421356237}468991062629557889013491011655962211574404458490$$

$$x_5 = \mathbf{1,41421356237309504880168}9623502530243614981925776197428498 28$$

$$x_6 = \mathbf{1,41421356237309504880168872420969807856967187537}723400156101$$

$$x_7 = \mathbf{1,41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667}$$

Aquí, con cifras gruesas se resaltan los números que son la aproximación correcta de $\sqrt{2}$ con exactitud hasta el número de las cifras significativas que entran en el número resaltado, (estas cifras se estabilizan en el proceso de cálculo). El número de las cifras correctas en este sentido, se duplica (como puede verse en la tabla) en el paso a la siguiente aproximación: en $x_1$ se tiene una cifra correcta, en $x_2$ ya son 3; en $x_3$, 6; en $x_4$, 12; en $x_5$, 24; en $x_6$, 48, y $x_7$ ya da la aproximación correcta de $\sqrt{2}$ con 60 cifras significativas, es decir, con todos los órdenes utilizados.

Observemos que si el número $a > 0$ es tal que su raíz se calcula en forma finita, en el sentido de que existe tal fracción decimal finita $x$ que $x^2 = a$, entonces esta fracción puede ser hallada (en cualquier caso en principio) con ayuda del método clásico del cálculo de raíz "por columna". En el caso del cálculo de la raíz de este número con ayuda de la fórmula (4.15), si $x_0$ es escogido diferente del valor exacto de la raíz: $x_0 \neq \sqrt{a}$, entonces el valor exacto de la raíz indicada no se obtiene en ningún paso. Esto se deduce de que en el caso de $x_0 \neq \sqrt{a}$ la sucesión (4.15) decrece estrictamente: $x_{n+1} < x_n$, $n = 1, 2, \dots$ .

Antes de analizar los ejemplos posteriores demostremos una desigualdad útil.

**Lema (desigualdad de Bernoulli)***). *Sea $\alpha > 0$, entonces para cualquier natural $n$ es válida la desigualdad*

$$(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha. \tag{4.19}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la fórmula del binomio de Newton tenemos

$$(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \dots + \alpha^n.$$

Todos los sumandos en el segundo miembro de la igualdad son positivos; eliminando todos, menos el primero y el segundo, con lo cual el segundo miembro sólo puede disminuir, obtenemos la desigualdad buscada (4.19)

Volvamos al análisis de los ejemplos.

2. Si $p > 1$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} p^n = +\infty$, y si $0 < p < 1$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} p^n = 0$.

Sea inicialmente $p > 1$, entonces $p = 1 + \alpha$, donde $\alpha > 0$ y por la desigualdad de Bernoulli (véase (4.19))

$$p^n = (1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha > n\alpha.$$

*) J. Bernoulli (1654—1705), matemático suizo.

Por cuanto $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, $\alpha > 0$, entonces también $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = +\infty$.

Si ahora $0 < p < 1$, entonces $q = \dfrac{1}{p} > 1$ y

$$\lim_{n\to\infty} p^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} q^n} = 0,$$

ya que por lo demostrado $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

3. Para cualquier $a > 0$:
$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1, \tag{4.20}$$
$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1. \tag{4.21}$$

Sea inicialmente $a > 1$, entonces $b \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a} > 1$. En realidad, por la definición de la raíz $b^n = a$. Si fuera $b \leqslant 1$ entonces, multiplicando por sí misma esta desigualdad $n$ veces, obtendríamos que $a = b^n \leqslant 1$, pero esto contradice la condición $a > 1$. Pongamos

$$x_n \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a} - 1. \tag{4.22}$$

Por lo dicho, $x_n > 0$. De (4.22) se deduce que $a = (1 + x_n)^n$. Aplicando la desigualdad de Bernoulli obtenemos

$$a = (1 + x_n)^n > nx_n.$$

Por consiguiente, $0 < x_n < \dfrac{a}{n}$, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, de donde por (4.22)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Si ahora, $0 < a < 1$, entonces $b \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{a} > 1$ y ya que por lo demostrado $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}} = 1.$$

Si $a = 1$, entonces $\sqrt[n]{a} = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, y por consiguiente también $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

De esta forma, (4.20) está demostrada para cualquier $a > 0$. De aquí inmediatamente se deduce (4.21):

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{1/n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}} = 1. \ \square$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, $a > 0$.

En realidad, sea $n_0 \in N$ tal que $\frac{a}{n_0} < \frac{1}{2}$. Entonces para todos los $n > n_0$ será válida la desigualdad $\frac{a}{n} < \frac{1}{2}$ y por esto

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!}\,\frac{a}{n_0+1}\,\frac{a}{n_0+2}\cdots\frac{a}{n} < \frac{a^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.$$

Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} = \frac{2^{n_0}a^{n_0}}{n_0!}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0.$$

La igualdad (4.23) se puede demostrar de otra forma. Analicemos la sucesión $x_n = \frac{a^n}{n!}$, entonces $x_{n+1} = x_n\frac{a}{n+1}$, y cuando $n+1 > a$, se cumple la desigualdad $x_{n+1} < x_n$, es decir, a partir de cierto número, la sucesión $\{x_n\}$ decrece. Ya que, además, para todos los $n \in N$ tiene lugar la desigualdad $x_n > 0$, entonces esta sucesión es acotada inferiormente, y, por lo tanto, tiene límite finito. Sea $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Pasando al límite para $n \to \infty$ en la igualdad $x_{n+1} = x_n\frac{a}{n+1}$, obtenemos $x = x\cdot 0$, de donde $x = 0$, es decir, tenemos otra vez (4.23).

$$5.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = +\infty. \tag{4.24}$$

Ya que para cualquier $a > 0$ tiene lugar la igualdad (4.23), entonces para cualquier $a > 0$ existe un $n_a \in N$ tal que para todos los $n > n_a$ se cumple la desigualdad

$$\frac{a^n}{n!} < 1,$$

es decir, cuando $n > n_a$, tiene lugar $\sqrt[n]{n!} > a$, y ya que $a > 0$ es arbitrario, entonces esto significa que es válida la igualdad (4.24).

$$6.\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) = e. \tag{4.25}$$

Recordemos (véase el p. 4.5) que el número $e$ es el límite de la sucesión

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad n = 1, 2, \ldots,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e. \tag{4.26}$$

Hagamos

$$s_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Se demostró (véase (4.11)) que

$$x_n < s_n,\ n = 1, 2, \ldots. \tag{4.27}$$

Por otra parte, fijando en la fórmula (4.10) un $k \geqslant 1$ arbitrario y elijiendo $n > k$, eliminemos en el segundo miembro de la igualdad (4.10) todos los sumandos, a partir del $(k + 2)$-ésimo orden. Como resultado, obtenemos la desigualdad

$$x_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Pasando al límite en esta desigualdad para $n \to \infty$ y un $k$ fijo, y notando que el segundo miembro tiene como límite $s_k$, obtenemos, por (4.26), la desigualdad

$$e \geqslant s_k, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{4.28}$$

Uniendo (4.27) y (4.28), tendremos

$$x_n < s_n \leqslant e, \quad n = 1, 2, \dots .$$

De aquí, según (4.26), se deduce directamente que $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = e$, es decir, la igualdad (4.25).

OBSERVACIÓN. Para el cálculo aproximado del número $e$, la fórmula

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

no es muy cómoda, ya que cuando se pasa de $n$ a $n + 1$, hay que realizar todos los cálculos de nuevo. La fórmula aproximada

$$e \approx s_n$$

en este sentido está mejor acondicionada para los cálculos numéricos, ya que durante el paso de $n$ a $n + 1$, es necesario agregar al valor ya hallado $s_n$ el número $\dfrac{1}{(n+1)!}$:

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)!},$$

es decir, los cálculos efectuados cuando se hallaba $s_n$, no se pierden. Además, en este caso, es fácil establecer también la estimación del error cuando se sustituye el número $e$ por el valor de la suma $s_n$. (Esto será hecho en el p. 34.14, véase el ejemplo 4).

Ejercicio 16. Sea $a_0 > 0, b_0 \geqslant 0, a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, b_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $n = 1, 2, \dots$ . Demuéstrese que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienden a un mismo límite $a$ y que $0 \leqslant a - a_n \leqslant \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}, 0 \leqslant b_n - a \leqslant \dfrac{|b_0 - a_0|}{2^n}$.

## 4.10. REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES POR FRACCIONES DECIMALES INFINITAS

Sea dado cualquier número $a$, para mayor exactitud $a \geqslant 0$. Por el principio de Arquímedes existe un número entero $n_0 > a$. Entre los números $n = 1, 2, \dots, n_0$, tomemos el menor que tiene la propiedad $n > a$ y denotémoslo por $\alpha_0 + 1$, entonces $\alpha_0 \leqslant a < \alpha_0 + 1$.

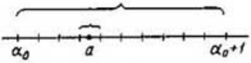



FIG. 11

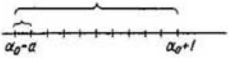



FIG. 12

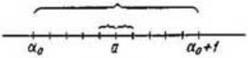



FIG. 13

Dividamos el segmento $I_0 = [\alpha_0, \alpha_0 + 1]$ en diez segmentos iguales, es decir, analicemos los segmentos

$$[\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + 1/10],$$

donde $\alpha_1 = 0, 1, 2, \dots, 9$.

Son posibles dos casos: o bien el punto $a$ no coincide con ninguno de los puntos de división (fig. 11), o bien el punto $a$ coincide con uno de los puntos de división (figs. 12, 13). En el primer caso, el punto $a$ pertenece sólo a uno de estos segmentos. Denotémoslo por

$$I_1 = \left[\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}\right],$$

donde $\alpha_1$ denota el número del segmento, es decir, una de las cifras $0, 1, \dots, 9$.

En el segundo caso, el punto $a$ puede pertenecer a dos segmentos vecinos (fig. 13). Entonces por $I_1 = \left[\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}\right]$ denotamos aquel de ellos para el cual el punto $a$ es el extremo izquierdo. En todos los casos $a \in I_1$. Dividamos el segmento $I_1$ a su vez en diez segmentos iguales y por $I_2 = \left[\alpha_0, \alpha_1\alpha_2; \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{10^2}\right]$ denotemos aquel de los segmentos obtenidos que contiene $a$ y para el cual $a$ no es extremo derecho. Continuando este proceso obtendremos un sistema de segmentos encajados

$$I_n = [\underline{a}_n, \bar{a}_n], \quad n = 1, 2, \dots,$$

donde

$$\underline{a}_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n, \quad \bar{a}_n = \alpha_0, \quad \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \frac{1}{10^n}$$

y $\alpha_n$ es una de las cifras $0, 1, 2, \cdots, 9$. Cada uno de los segmentos $I_n$ contiene $a$, y $a$ no es su extremo derecho,

$$a \in I_n, \ a \neq \bar{a}_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots;$$

la longitud del segmento $I_n$ es igual a $10^{-n}$ y por consiguiente tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Las fracciones decimales finitas $\underline{a}_n$ y $\bar{a}_n$ se llaman *fracciones decimales que aproximan el número a*. Más exactamente, el número $\underline{a}_n$ es la *aproximación decimal inferior* de orden $n$ y el número $\bar{a}_n$, la *aproximación decimal superior* del mismo orden del número $a$. Ellas poseen las siguientes propiedades que se deducen directamente de su definición:

$$\underline{a}_n \leqslant a < \overline{a}_n, \tag{4.29}$$

$$\underline{a}_n \leqslant \underline{a}_{n+1}, \quad \overline{a}_{n+1} \leqslant \overline{a}_n, \tag{4.30}$$

$$\overline{a}_n - \underline{a}_n = 1/10^n. \tag{4.31}$$

En el caso cuando $a < 0$, entonces, suponiendo que $b = -a$, determinamos

$$\underline{a}_n = -\overline{b}_n, \quad \overline{a}_n = -\underline{b}_n$$

y las propiedades (4.29) — (4.31) evidentemente se conservan, sólo en la desigualdad (4.29) los signos $\leqslant$ y $<$ se intercambian.

La propiedad (4.30) significa que los segmentos $[\underline{a}_n, \overline{a}_n]$ forman un sistema de segmentos encajados. De la propiedad (4.31) se deduce que las longitudes de los segmentos $[\underline{a}_n, \overline{a}_n]$ tienden a cero. Finalmente, (4.29) significa que el punto $a$ pertenece a todos estos segmentos, por lo que por la observación 2 del p. 4.5 es el límite de sus extremos $\underline{a}_n$ y $\overline{a}_n$.

Así pues, en particular, está demostrado el siguiente lema.

**Lema 1.** *Cualquiera que sea el número $a$, la sucesión $\{\underline{a}_n\}$ crece monótonamente, la sucesión $\{\overline{a}_n\}$ decrece monótonamente, y*

$$\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = a.$$

**Corolario.** *Cualquier número real es el límite de una sucesión de números racionales.*

El corolario del lema se deriva de que $\underline{a}_n$ y $\overline{a}_n$ son números racionales.

Sea ahora, de nuevo, $a \geqslant 0$ y $\underline{a}_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$. Pongamos en correspondencia al número $a$ la fracción decimal infinita $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ . Subrayemos que aquí $\alpha_0$ es un número entero no negativo y $\alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$ , una de las cifras $0, 1, 2, \ldots , 9$. Por cuanto, el número $a$ es el único número que pertenece a todos los segmentos $I_n$, $n = 1, 2, \ldots$ , entonces, en la correspondencia indicada, a números diferentes les corresponden diferentes fracciones decimales, es decir, que se diferencian al menos en un $\alpha_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Observemos a continuación que en nuestra construcción no puede obtenerse una fracción con período compuesto por la única cifra 9. En efecto, supongamos que al número $a$ le corresponde la fracción $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} 9 \ldots 9 \ldots$ , donde en el caso de $n_0 \neq 0$ se cumple la desigualdad $\alpha_{n_0} \neq 9$. Entonces por la construcción,

$$a \in \left[\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} 9 \ldots 9; \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}\right]$$

para todos los $n \geqslant n_0$, donde $n$ es el número de los símbolos decimales después de la coma en la fracción $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} 9 \ldots 9$. De aquí se deduce que $a$ es el extremo derecho de todos los segmentos $I_n$, $n \geqslant n_0$, lo que contradice la elección de estos segmentos.

De esta forma, por la correspondencia establecida, a cada número real $a \geqslant 0$ le corresponde cierta fracción decimal infinita que no tiene período compuesto por una sola cifra 9. Tales fracciones decimales se llaman *admisibles*.

Finalmente, cada fracción decimal infinita y admisible $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ como resultado de la correspondencia descrita resulta puesta en correspondencia a cierto número $a$, y específicamente a aquel número único que pertenece a todos los segmentos:

$$\left[\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n; \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + \frac{1}{10^n}\right], \quad n = 1, 2, \dots .$$

Esta correspondencia se puede extender también a los números negativos: si al número $a > 0$ le corresponde la fracción $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$, entonces al número $-a$ le ponemos en correspondencia la fracción $-\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$ .

Los resultados obtenidos se pueden enunciar en forma del teorema siguiente.

**Teorema 6.** *Entre el conjunto de todos los números reales y el conjunto de las fracciones decimales admisibles existe una correspondencia biunívoca, y, además, si en esta correspondencia al número $a$ le corresponde la fracción $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \dots \alpha_n \dots$, entonces*

$$\pm \lim_{n \to \infty} \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = a.$$

La fracción decimal infinita $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ correspondiente al número $a$ se llama su *notación decimal* y se utiliza para su designación, por lo que se escribe

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

Si una fracción decimal infinita tiene período compuesto sólo por ceros, $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n 00 \dots 0 \dots$, y, además, $\alpha_n \neq 0$, entonces se dice que esta fracción tiene $n$ cifras significativas después de la coma; y generalmente, el cero en el período no se escribe, es decir, el número indicado se escribe con la fracción decimal finita $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ (precisamente, tal escritura se usó anteriormente).

OBSERVACIÓN 1. A cualquier fracción decimal infinita

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

(no necesariamente admisible) se le puede también poner en correspondencia de forma natural un número real único perteneciente a todos los segmentos:

$$\left[\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n; \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + \frac{1}{10^n}\right].$$

No obstante, la correspondencia obtenida aquí ya *no será biunívoca*: puede ocurrir que a fracciones decimales diferentes les corresponda un mismo número real. Especialmente, a las fracciones del tipo

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n 99 \dots 9 \dots \quad \text{y} \quad \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots (\alpha_n + 1)\, 00 \dots 0 \dots \; (\alpha_n \neq 9)$$

les corresponde un mismo número. En la construcción descrita anteriormente de la correspondencia de los números reales y las fracciones decimales infinitas obtendríamos no sólo fracciones decimales admisibles, si hubiéramos rechazado la condición de elegir cada vez aquel segmento $I_n$ para el cual $a$ no es su extremo derecho.

Utilizando la escritura de los números reales, con ayuda de las fracciones decimales infinitas se puede obtener la regla para su comparación por su magnitud y las reglas de las operaciones aritméticas sobre ellas. Uno y otro se reducen a las operaciones análogas sobre sus correspondientes aproximaciones decimales y, tal vez, a un paso límite. Enunciemos estos resultados en forma de lemas.

**Lema 2.** *Sean $a$ y $b$ números reales. Entonces $a < b$ si y sólo si existe un natural $n_0$ tal que para todos los $n > n_0$, tiene lugar la desigualdad*

$$a_n < b_n.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $a < b$. De $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, por la propiedad III de los límites de las sucesiones del p. 4.3, se deduce inmediatamente la existencia del número exigido $n_0$, es decir, tal que para todos los números $n > n_0$ se cumple la desigualdad $a_n < b_n$.

Viceversa, si existe el número señalado $n_0$, entonces el caso $a > b$ es imposible, por lo demostrado. Es imposible también el caso $a = b$, ya que entonces por la univocidad de la escritura de los números con ayuda de las fracciones decimales admisibles, para todos los $n = 1, 2, \ldots$, tendría lugar la igualdad $a_n = b_n$. Por lo tanto, $a < b$. □

**Lema 3.** *Sean $a$ y $b$ dos números reales, entonces*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b, \quad \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n \underline{b}_n = ab$$

*y cuando $b \neq 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} = \frac{a}{b}.\text{[*]}$$

Todas las afirmaciones de este lema se deducen directamente del lema 1 y de las propiedades de los límites, relacionadas con las operaciones aritméticas sobre las sucesiones (véase el p. 4.9).

OBSERVACIÓN 2. Del lema 3 se deduce que para realizar, con un grado dado de exactitud, cualquier operación aritmética sobre números escritos en forma de fracciones decimales admisibles, es necesario tomar con suficiente exactitud las aproximaciones decimales finitas y realizar sobre ellas las operaciones correspondientes. En la suma, resta y multiplicación como resultado se obtiene de nuevo una fracción decimal finita. En el caso de la división, el cociente de dos fracciones decimales finitas será, en general, una fracción decimal infinita, y, como es conocido de la matemática elemental, periódica. No obstante, en este caso, también se puede obtener el resultado, con cualquier grado de exactitud, expresado en fracción decimal finita. Por ejemplo, si $\underline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)}_n$ es la aproximación decimal inferior de orden $n$ para el cociente $\underline{a}_n/\underline{b}_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)}_n = \frac{a}{b} \tag{4.32}$$

y, por consiguiente, el cociente $a/b$, $b \neq 0$ se puede expresar con ayuda de frac-

---

[*] Puede ocurrir que para algunos $n$ tengamos $\underline{b}_n = 0$ y, por consiguiente, la expresión $\underline{a}_n/\underline{b}_n$ carece de sentido. No obstante, por la condición $b \neq 0$ y la propiedad III de los límites de las sucesiones, demostrada en el p. 4.3, existe $n_0$ tal que $\underline{b}_n \neq 0$ para $n \geqslant n_0$. En este caso, en lugar de la sucesión $\underline{a}_n/\underline{b}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, es necesario analizar la sucesión $\underline{a}_n/\underline{b}_n$, $n = n_0$, $n_0 + 1, \ldots$.

ciones decimales finitas del tipo $\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)_n$ con cualquier exactitud.

Para la demostración de la igualdad (4.32) hagamos

$$\alpha_n = \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} - \frac{a}{b};$$

por el lema 3 tenemos (véase el lema en el p. 4.9) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Ahora, utilizando (4.29) y (4.31) obtenemos

$$\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)_n - \frac{a}{b} = \left[\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)_n - \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right] + \left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} - \frac{a}{b}\right) < \frac{1}{10^n} + \alpha_n.$$

Y por cuanto $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10^n} + \alpha_n\right) = 0$, entonces la igualdad (4.32) queda demostrada.

OBSERVACIÓN 3. Como resultado de los cálculos señalados anteriormente con las aproximaciones decimales inferiores de orden $n$, en el caso de la suma $\underline{a}_n + \underline{b}_n$, de la resta $\underline{a}_n - \underline{b}_n$ y de la división $\underline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)_n}$, de nuevo obtendremos fracciones decimales finitas con no más de $n$ cifras significativas después de la coma. En la multiplicación $\underline{a}_n\underline{b}_n$, se obtendrá, en general, una fracción decimal con $2n$ cifras significativas después de la coma. Si $\underline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)_n}$ es la aproximación decimal inferior del producto $\underline{a}_n\underline{b}_n$, entonces análogamente a (4.32) se demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \underline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)_n} = ab.$$

De esta forma, en los cálculos aproximados de las sumas $a + b$, de las diferencias $a - b$, de los productos $ab$ y de los cocientes $a/b$, $b \neq 0$, respectivamente por las fórmulas

$$\underline{a}_n + \underline{b}_n, \quad \underline{a}_n - \underline{b}_n, \quad \underline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)_n} \quad \text{y} \quad \underline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)_n},$$

como resultado de las operaciones indicadas sobre las fracciones decimales finitas $\underline{a}_n$ y $\underline{b}_n$ que tienen no más de $n$ cifras significativas después de la coma, se obtienen de nuevo fracciones decimales con no más de $n$ cifras significativas después de la coma y, además, el resultado puede ser obtenido con cualquier grado de exactitud dado. Precisamente de esta forma se realizan comúnmente las operaciones con números en la práctica.

OBSERVACIÓN 4. Señalemos que en la construcción del método de notación de los números reales con sucesiones de cifras, como base fue tomado el número 10 (los segmentos se dividieron consecutivamente en diez partes iguales). En lugar del número 10 se puede tomar cualquier número natural $n$. En la utilización de máquinas computadoras de acción rápida a menudo se usa el tal llamado sistema binario de notación de los números, correspondiente al caso $n = 2$. En la escritura de un número en el sistema binario participan sólo dos cifras, 0 y 1. Por ejemplo, el número 14,625 en el sistema binario tendrá la forma 1110,101, ya que

$$14{,}625 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3}$$

y las cifras en el sistema binario de escritura de un número son los coeficientes correspondientes a su descomposición según las potencias del dos.

OBSERVACIÓN 5. En la exposición de la teoría de los números reales se puede ir también en orden contrario: definir a los números reales como fracciones decimales infinitas y admisibles y utilizando esta escritura introducir en ellos de la forma correspondiente la relación de orden y las operaciones aritméticas.

Existen otras construcciones de los números reales, que parten de otros objetos concretos, no obstante, todas ellas nos llevan a conjuntos de elementos que satisfacen las propiedades I — V del p. 2.1. Recordemos (véase el p. 2.4*) que la presencia de las propiedades I — V definen unívocamente el conjunto de elementos que poseen estas propiedades. Unívocamente en el sentido de que dos conjuntos cualesquiera, para cuyos elementos se cumplen las condiciones I — V, son isomorfos con respecto a las operaciones de suma y multiplicación y a la propiedad de ordenamiento. Aquí nos encontramos con un rasgo característico de los métodos matemáticos de investigación, para los cuales es absolutamente indiferente la naturaleza de los elementos, y sólo son importantes las "relaciones cuantitativas" entre ellos, las cuales en el caso dado se expresan con las propiedades I — V.

## 4.11* NUMERABILIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES. INNUMERABILIDAD DE LOS NÚMEROS REALES

Surge una pregunta natural: ¿si todos los conjuntos infinitos contienen un número igual de elementos o hay diferentes infinitos? Ante todo, resulta que no se entiende qué significa, en general, el término "igual número de elementos" para los conjuntos infinitos. La comparación de conjuntos infinitos por la cantidad de elementos contenidos en ellos o, como se acostumbra decir, por su potencia, es cómodo realizarla con ayuda del concepto de correspondencia biunívoca entre los elementos de los conjuntos (véase el p. 1.2*).

**Definición 17.** *Dos conjuntos se llaman equipotentes, si entre sus elementos se puede establecer una correspondencia biunívoca.*

Desde este punto de vista los números naturales $1, 2, \ldots, n, \ldots$ forman un conjunto equipotente al conjunto de los números pares $2, 4, \ldots, 2n, \ldots$ aunque a primera vista parece que los últimos son dos veces menores. La correspondencia biunívoca exigida se obtiene si al número natural $n$ se le pone en correspondencia el número $2n$, $n = 1, 2, \ldots$ .

Los números pares forman una parte del conjunto de los números naturales, no obstante, estos conjuntos son equipotentes, por consiguiente, en el caso de conjuntos infinitos, ¡una parte puede igualarse en nuestro sentido al todo!

**Definición 18.** *Un conjunto equipotente al conjunto de todos los números naturales se llama numerable.*

De esta forma, si $X$ es numerable, entonces entre el conjunto $X$ y el conjunto de los números naturales se puede establecer una correspondencia biunívoca o, como se dice, se pueden numerar los elementos del conjunto $X$, entendiendo por número de cada elemento $x \in X$ el número natural que le corresponde en la correspondencia indicada.

Los conjuntos numerables en el sentido definido son los conjuntos infinitos más simples. Precisamente es válido el siguiente lema.

**Lema 1.** *Cualquier conjunto infinito contiene un subconjunto numerable.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sea $X$ un conjunto infinito. Tomemos cualquiera de sus elementos y denotémoslo por $x_1$. Ya que $X$ es un conjunto infinito, en él, a ciencia cierta, se tiene al menos un elemento diferente de $x_1$. Elijamos cualquiera de estos elementos y denotémoslo por $x_2$.

Supongamos que en el conjunto $X$ ya se escogieron los elementos $x_1, \dots, x_n$. Por cuanto $X$ es un conjunto infinito, entonces en él, a ciencia cierta, hay otros elementos más; escojamos cualquiera de los elementos restantes y denotémoslo por $x_{n+1}$, etc. Como resultado obtuvimos los elementos $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, que forman un subconjunto numerable del conjunto $X$. □

**Lema 2.** *Cualquier subconjunto infinito de un conjunto numerable es numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $X$ un conjunto numerable, sus elementos pueden ser numerados: $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Sea $Y$ un subconjunto infinito del conjunto $X$. Denotemos por $b_1$ el elemento del conjunto $Y$ que se encuentra primeramente en la serie $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$, es decir, aquel de los elementos $a_n \in X$ que pertenece al conjunto $Y$ y tiene el número mínimo $n_0 : b_1 = a_{n_0}$. Por $b_2$ denotemos aquel de los elementos $a_n$ que pertenece al conjunto $Y$ y tiene el número menor entre los números $n > n_0$, etc. Cada elemento del conjunto $Y$ se encuentra en la serie $a_1, a_2, \dots$ $\dots, a_n, \dots$, por lo que después de un número finito de pasos, será denotado por $b_m$, y por cuanto el conjunto $Y$ es infinito, entonces el índice $m$ toma cualquier valor $1, 2, 3, \dots$. De esta forma, todos los elementos del conjunto $Y$ resultaron numerados con los números naturales $m = 1, 2, \dots$. Esto significa que el conjunto $Y$ es un conjunto numerable. □

El siguiente teorema da un ejemplo interesante de conjunto numerable.

**Teorema 7.** *El conjunto de todos los números racionales es un conjunto numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Coloquemos los números racionales en una tabla de la siguiente forma. En la primera fila pongamos todos los números enteros en orden creciente por su valor absoluto y de forma tal que después de cada número natural esté colocado el opuesto a él:

$$0, 1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots, n \in N.$$

En la segunda fila coloquemos todas las fracciones racionales irreducibles con denominador 2, ordenadas por su valor absoluto y de nuevo, después de cada número positivo ponemos el opuesto a él:

$$1/2, -1/2, 3/2, -3/2, 5/2, -5/2, \dots .$$

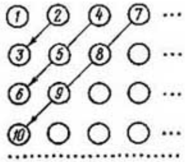
En general, en la $n$-ésima fila coloquemos todas las fracciones racionales irreducibles con denominador $n$, ordenadas por su valor absoluto de forma tal que después de cada número positivo va el opuesto.

Como resultado obtendremos una tabla con un número infinito de filas y columnas:

$$
\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \dots \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \dots \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill}
\end{array}
$$

Es evidente que cada número racional cae en algún lugar en esta tabla.

Numeremos ahora los elementos de la tabla obtenida, de acuerdo al siguiente esquema (en los círculos están los números de los elementos correspondientes, la flecha indica el sentido de la numeración):




Como resultado, todos los números racionales resultan numerados, es decir, el conjunto $Q$ de los números racionales es numerable. □

Naturalmente, surge la pregunta: ¿existen conjuntos infinitos que no sean numerables? Resulta que sí, existen y se llaman, naturalmente, *conjuntos innumerables*. Un ejemplo importante de conjunto innumerable se establece con el teorema que sigue.

**Teorema 8 (de Cantor).** *El conjunto de todos los números reales es innumerable.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario, que logramos numerar todos los números reales: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$; escribámoslos con ayuda de fracciones decimales admisibles:

$$
\begin{array}{l}
x_1 = \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)} \ \dots \ \alpha_m^{(1)} \dots \\
x_2 = \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)} \ \dots \ \alpha_m^{(2)} \dots \\
\dotfill \\
x_n = \alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}\alpha_1^{(n)} \ \dots \ \alpha_m^{(n)} \\
\dotfill
\end{array}
\tag{4.33}
$$

FIG. 14

FIG. 15

Aquí $\alpha_m^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots$, denota una de las cifras 0, 1, 2, ... , 9 y $\alpha_0^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, un número entero con uno u otro signo.

Escojamos la cifra $\alpha_n$, $n = 1, 2, \dots$, de forma tal que $\alpha_n \neq \alpha_n^{(n)}$ y $\alpha_n \neq 9$. Entonces, la fracción $0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ es admisible, pero el número $a = 0, \alpha_1\alpha_2 \dots \dots \alpha_n \dots$, a ciencia cierta, no está entre los números $x_n$, $n = 1, 2, \dots$, ya que la fracción decimal $0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$, al menos en un signo decimal se diferencia de cada una de las fracciones decimales (4.33). La contradicción obtenida demuestra el teorema. □

**Corolario 1.** *El conjunto de los números reales que forman cualquier intervalo es innumerable.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos que más aún, el conjunto de los números reales de cualquier intervalo es equipotente al conjunto de todos los números reales.

En realidad, ante todo, cualquier intervalo es equipotente al intervalo $(-1, +1)$. Una correspondencia biunívoca entre el intervalo $(a, b)$ y $(-1, +1)$ se puede establecer, por ejemplo, con ayuda de la representación lineal $x = \frac{2t - a - b}{b - a}$. Si $a < t < b$, entonces $-1 < x < +1$. El intervalo $(-1, +1)$ biunívocamente con ayuda de la aplicación

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|}, \quad -1 < x < 1,$$

se aplica sobre todo el eje real (compruébese esto). De esta forma, resulta que el intervalo $(a, b)$ es equipotente a todo el eje real y, por consiguiente, es un conjunto innumerable. □

Una correspondencia biunívoca entre un intervalo y toda la recta es fácil de realizar visualmente con el método geométrico: inicialmente, proyectamos una semicircunferencia abierta, es decir, una semicircunferencia sin sus puntos extremos con ayuda de una proyección paralela sobre el intervalo (fig. 14) y, por tanto, establecemos una correspondencia biunívoca entre sus puntos. Luego, con ayuda de una proyección central desde el centro de la semicircunferencia, la proyectamos sobre la recta (fig. 15). Esta proyección también establece una correspondencia biunívoca, pero esta vez, entre la semicircunferencia indicada y toda la recta.

**Corolario 2.** *En cualquier intervalo se tienen números irracionales.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si en cierto intervalo no hubiera números irracionales, entonces esto significaría que todos los puntos de este intervalo son números racionales, es decir, son un subconjunto del conjunto numerable de los números racionales y por tanto conforman un conjunto finito, o numerable (véase el lema 2) lo cual contradice el corolario 1. □

OBSERVACIÓN. En el punto 4.10 se demostró que un número real es el límite de una sucesión de números racionales (por ejemplo, de sus aproximaciones decimales superiores). De aquí inmediatamente se deduce que cualquier intervalo contiene una cantidad infinita de números racionales. En realidad, supongamos que está dado el intervalo $(a, b)$. Escojamos cualquier número $\xi \in (a, b)$, por ejemplo, $\xi = \frac{a + b}{2}$. Entonces, si $\overline{\xi}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, son las aproximaciones decimales superiores para $\xi$, pues $\overline{\xi}_n \neq \xi$ y $\lim\limits_{n \to \infty} \overline{\xi}_n = \xi$. Por cuanto el intervalo $(a, b)$ es un entorno del punto escogido $\xi$, entonces, por la definición de límite de una sucesión, casi todos los números racionales $\overline{\xi}_n$ se contendrán en el intervalo $(a, b)$. Dicho de otro modo, se encuentra un número $n_0$ tal que para todos los números $n \geqslant n_0$ se cumplirá la desigualdad $a < \overline{\xi}_n < b$, es decir, $\overline{\xi}_n$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, son los números racionales buscados.

De esta forma, en cualquier intervalo del eje numérico se contienen tanto números racionales, como irracionales. Esta propiedad se expresa brevemente diciendo que "los números racionales e irracionales forman subconjuntos siempre densos del conjunto de los números reales".

Ejercicio 17. *Demuéstrese que los conjuntos de los puntos de un intervalo, segmento e intervalo semiabierto son equipotentes.*

### 4.12* LÍMITES SUPERIOR E INFERIOR DE LAS SUCESIONES

En el p. 4.6 fue demostrado que cualquier sucesión numérica siempre tiene al menos un límite parcial finito o infinito. El mayor y menor de ellos (más adelante será mostrado que siempre existen) juegan un papel singular en la teoría de sucesiones. Aquí los conceptos de "mayor" y "menor" se interpretan en el sentido del conjunto extentido de los números reales $\overline{R}$ (véase el p. 3.1), es decir, en particular, el mayor elemento (menor) del conjunto $X \subset \overline{R}$ puede resultar $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$). Esto tendrá lugar cuando $+\infty \in X$ ($-\infty \in X$). En nuestro caso, esto significa que el infinito del signo correspondiente es un límite parcial de la sucesión analizada.

No todo conjunto en la recta numérica extendida tiene elemento máximo (mínimo). Sin embargo, si este conjunto es el conjunto de los límites parciales de cierta sucesión, entonces en él existe siempre un elemento máximo y un elemento mínimo.

**Definición 19.** *El mayor límite parcial de la sucesión $\{x_n\}$ se llama límite superior y se denota por $\varlimsup\limits_{n \to \infty} x_n$ y el menor límite parcial se llama límite inferior y se denota por $\varliminf\limits_{n \to \infty} x_n$.*

**Teorema 9.** *Cualquier sucesión $\{x_n\}$ tiene límite parcial tanto superior como inferior.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos la existencia del límite parcial superior. Para la sucesión $\{x_n\}$ dada son posibles dos casos: está acotada superiormente o bien no lo está. Si no está acotada superiormente, entonces $+\infty$ es un límite parcial y evidentemente el mayor, es decir, $\varlimsup\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

Si la sucesión $\{x_n\}$ está acotada superiormente, entonces de nuevo, son posibles dos casos: el conjunto de sus límites finitos que denotaremos por $A$ no es vacío o bien es vacío. Analicemos inicialmente el primer caso. De la acotación superior de la sucesión $\{x_n\}$ dada se deduce la acotación superior del conjunto no vacío $A$ de sus límites parciales finitos. Por esto, el conjunto $A$ tiene una cota superior finita. Mostremos que $b = \sup A$ es un límite parcial, es decir, que $b \in A$. En efecto, si $b \notin A$, entonces existiría $\varepsilon > 0$ tal que en el intervalo $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ se contendría sólo un número finito de términos de la sucesión $\{x_n\}$ (en particular, ninguno) y por lo tanto, (¿por qué?) en este intervalo no habría ni un elemento de $A$, lo cual contradice la condición $b = \sup A$.

De esta forma $b \in A$ y, por consiguiente, es el mayor elemento del conjunto $A$, por lo que $b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

En el otro caso, es decir, cuando la sucesión $\{x_n\}$ está acotada superiormente y el conjunto de sus límites parciales finitos $A$ es vacío, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ (demuéstrese esto), es decir, en este caso el conjunto de sus límites parciales está compuesto por un elemento $-\infty$ que a su vez es el mayor en este conjunto, es decir, aquí

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty.$$

De forma análoga, para cualquier sucesión se demuestra la existencia del límite parcial menor (finito o infinito). ☐

Ejercicio 18. Sea $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Hállese $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$.

**Teorema 10.** *Para que el número $a$ sea el límite superior de la sucesión $\{x_n\}$ es necesario y suficiente que para cualquier número $\varepsilon > 0$ se cumplan las dos condiciones siguientes.*

1. *Existe un número $n_\varepsilon$ tal para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$ es válida la desigualdad $x_n < a + \varepsilon$.*
2. *Para cualquier número $n_0$ existe un número $n'$ (que depende de $\varepsilon$ y de $n_0$) tal que $n' > n_0$ y $x_{n'} > a - \varepsilon$.*

La condición 1 significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo, en la sucesión $\{x_n\}$ existe sólo un número finito de términos $x_n$ tales que $x_n \geqslant a + \varepsilon$ (su número es menor que $n_\varepsilon$).

La condición 2 significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo, en la sucesión $\{x_n\}$ existe un número infinito de términos $x_n$ tales que $x_n > a + \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ y supongamos que $\varepsilon > 0$ está dado. Si en el intervalo semiabierto $[a + \varepsilon, +\infty]$ hubiera una cantidad infinita de elementos de la sucesión $\{x_n\}$, entonces se encontraría una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$ cuyos elementos pertenecen a este intervalo semiabierto y que tiene límite infinito o finito. Denotémoslo por $b$. Es evidente que $b \geqslant a + \varepsilon > a$, lo que contradice que $a$ es el límite parcial mayor de la sucesión $\{x_n\}$. La propiedad 1 queda demostrada.

Más adelante, por cuanto el límite superior es también un límite parcial, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Casi todos los términos de la sucesión $\{x_{n_k}\}$ son mayores que $a - \varepsilon$ y por consiguiente existe una cantidad infinita de términos de la sucesión $\{x_n\}$ dada, mayores que $a - \varepsilon$. La condición 2 también queda demostrada.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos que el número $a$ satisface las condiciones 1 y 2. Mostremos que entonces $a$ es un límite parcial. Tomemos $\varepsilon = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$ . Para cada natural $k$ existe un número $n_k$ tal que $x_{n_k} > a - 1/k$ (por la condición 2) y $x_{n_k} < a + 1/k$ (por la condición 1). Por cuanto, para cualquier $k$ el conjunto de los elementos $x_n$ de la sucesión dada, para los cuales se cumple la desigualdad $a - \frac{1}{k} < x_n < a + \frac{1}{k}$, es infinito, entonces, los números $n_k$ se puede escoger sucesivamente ($k = 1, 2, \ldots$) de forma tal que $n_{k_1} < n_{k_2}$ cuando $k_1 < k_2$. Como resultado obtendremos la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de la sucesión $\{x_n\}$ dada. De la desigualdad $|a - x_{n_k}| < \frac{1}{k}$ se deduce que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, es decir, que $a$ es un límite parcial de la sucesión $\{x_n\}$.

Mostremos ahora que el número $a$ es el límite parcial mayor. En efecto, si se encontrara un límite parcial $b$ de la sucesión $\{x_n\}$ tal que $b > a$, entonces, tomando $\varepsilon > 0$ de forma tal que $a + \varepsilon < b$, obtendríamos que sobre el intervalo $(a + \varepsilon, +\infty)$ se encontrará un número infinito de términos de la sucesión $\{x_n\}$ (y precisamente, casi todos los términos de la subsucesión convergente a $b$). Esto contradice la condición 1. □

Ejercicios. 19. Demuéstrese que para que una sucesión tenga límite (finito o infinito, igual a uno de los símbolos $+\infty$ o $-\infty$), es necesario y suficiente que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

20. Demuéstrese que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$.

21. Demuéstrese que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf_n \left\{\sup_{m\geqslant n} x_m\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{m\geqslant n} x_m\right\},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup_n \left\{\inf_{m\geqslant n} x_m\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\inf_{m\geqslant n} x_m\right\}.$$

# § 5. LÍMITE Y CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES

## 5.1. FUNCIONES REALES

En el estudio de unos u otros procesos del mundo real (físicos, químicos, biológicos, económicos y otros) constantemente nos encontramos con unas u otras magnitudes que los caracterizan y que cambian en el transcurso de los procesos analizados. A menudo ocurre que la variación de una magnitud va acompañada por la variación de otra o incluso, aún más, la variación de una magnitud es causa de la variación de otra. Las variaciones relacionadas entre sí de las características numéricas de las magnitudes analizadas nos llevan a su dependencia funcional en los modelos matemáticos correspondientes. Por esto, el concepto de función es uno de los conceptos más importantes en la matemática y sus aplicaciones.

En nuestro curso de análisis matemático, inicialmente serán estudiadas sólo las funciones reales de un argumento real, es decir, las funciones $f: X \to \boldsymbol{R}$, donde $X \subset \boldsymbol{R}$ y $X \neq \varnothing$. Las variables independientes y dependientes se llaman en este caso, *variables reales*. Luego aparecen las funciones de varias variables, es decir, las funciones definidas sobre cierto conjunto de elementos, cada uno de los cuales es un conjunto ordenado de números. Se estudiarán también las funciones que toman valores complejos, las funciones cuyos argumentos son números complejos y otras funciones de naturaleza más general.

Sobre las funciones que toman valores numéricos (tales funciones se llaman *funciones numéricas*) se pueden realizar diferentes operaciones aritméticas. Si están dadas dos funciones numéricas $f$ y $g$ definidas sobre un mismo conjunto $X$ y $c$ es un número (o, como se dice a menudo, una constante), entonces la función $cf$ se define como la función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $cf(x)$; la función $f + g$ como la función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $f(x) + g(x)$; $fg$ como la función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $f(x)g(x)$; y finalmente $f/g$ como la función que en cada punto $x \in X$ es igual a $f(x)/g(x)$ (lo cual, naturalmente, tiene sentido sólo para $g(x) \neq 0$).

La función numérica $f$ definida sobre el conjunto $X$ se llama *acotada superiormente* (*acotada inferiormente*) si el conjunto de sus valores está acotado superiormente (inferiormente). Dicho de otro modo, la función $f$ está acotada superiormente (inferiormente) si existe una constante $M$ tal que para cada $x \in X$ se cumple la desigualdad $f(x) \leqslant M$ (respectivamente $f(x) \geqslant M$).

La función $f$ acotada sobre el conjunto $X$ tanto superior como inferiormente se llama simplemente *acotada* sobre este conjunto. Evidentemente esta función está acotada sobre el conjunto $X$ si y sólo si existe un número $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para cada $x \in X$.

La cota superior (inferior) del conjunto de los valores $Y_f$ de la función numérica $y = f(x)$ definida sobre el conjunto $X$ se llama *cota superior* (*inferior*) de la función $f$ y se denota por

$$\sup f,\ \sup_X f,\ \sup_{x \in X} f(x)\ \left(\inf f,\ \inf_X f,\ \inf_{x \in X} f(x)\right).$$

Más detalladamente, esto significa que, por ejemplo, $\lambda = \sup f$, si, en primer lugar, para cada $x \in X$ se cumple la desigualdad $f(x) \leqslant \lambda$ y, en segundo lugar, para cada $\lambda' < \lambda$ existe $x_{\lambda'} \in X$ tal que $f(x_{\lambda'}) > \lambda'$. El índice $\lambda'$ del elemento del conjunto $X$ muestra que éste depende de la elección del número $\lambda'$

En la definición dada la cota superior (inferior) de una función puede ser tanto finita como infinita.

Por los resultados del p. 3.4 la función $f$ está acotada superiormente (inferiormente) sobre el conjunto $X$ si y sólo si tiene sobre este conjunto cota superior (inferior) finita.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que si la función $f$ no está acotada superiormente (respectivamente inferiormente) sobre el segmento $[a, b]$, entonces existe una sucesión de puntos $x_n \in [a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty$ (respectivamente, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty$).

2. Demuéstrese que si la función no está acotada sobre un segmento, entonces existe un punto de este segmento, en cada entorno del cual la función no está acotada. ¿Es válida esta afirmación para un intervalo?

3. Constrúyase un ejemplo de función definida sobre un segmento y no acotada sobre él.

Diremos que la función numérica $f$ definida sobre el conjunto $X$ toma en el punto $x_0 \in X$ el *valor máximo* (respectivamente, *mínimo*) si $f(x) \leqslant f(x_0)$ (respectivamente, $f(x) \geqslant f(x_0)$) para cada punto $x \in X$. En este caso, escribiremos $f(x_0) = \max\limits_X f$ o $f(x_0) = \max f$ (respectivamente, $f(x_0) = \min\limits_X f$ ó $f(x_0) = \min f$).

Los valores máximos y mínimos se llaman *extremales*.

Es evidente, que si la función $f$ toma en el punto $x_0$ el valor máximo (mínimo), entonces $f(x_0) = \sup f$ (respectivamente, $f(x_0) = \inf f$).

Señalemos, además, que si están dados los conjuntos $X$, $Y$ y la aplicación $f$ que pone en correspondencia a cada elemento del conjunto $X$ un único elemento del conjunto $Y$, entonces con esto la función $f$ definida sobre el conjunto $X$ y con el conjunto de valores contenido en el conjunto $Y$ está definida totalmente. En particular, es indiferente con qué letra se denota el argumento y con la cuál el valor de la función. Así, en la aplicación dada $f$, las escrituras $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ y $v = f(u)$, $u \in X$, $v \in Y$ denotan lo mismo. Por ejemplo, $y = \log_a x$, $x > 0$, y $x = \log_a y$, $y > 0$, denotan una misma función.

Hagamos para concluir una observación sobre la terminología. En el caso del entorno de un punto, junto con la expresión "función definida sobre un entorno" se utiliza "función definida en un entorno". En expresiones semejantes, utilizadas usualmente para conjuntos abiertos, las preposiciones "en" y "sobre" tienen un mismo sentido.

## 5.2. FORMAS DE REPRESENTAR FUNCIONES

En este capítulo se estudian sólo las funciones reales de una variable real, es decir, las funciones $f$ tales que $f: X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}$, $X \neq \varnothing$. Por esto nos detendremos aquí sólo en las formas de representar tales funciones.

Ante todo las funciones se pueden representar (definir) con ayuda de fórmulas: *método analítico*. Para esto se utiliza cierta reserva de funciones estudiadas y especialmente denotadas, operaciones algebraicas y pasos límites. Por ejemplo, $y = ax + b$, $y = ax^2$, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1 + \sqrt{\log \cos 2\pi x}$.

Siempre por función representada por cierta fórmula se entiende la función definida sobre el conjunto de todos aquellos números reales para los cuales, en primer lugar, la fórmula indicada tiene sentido y, en segundo lugar, en el proceso de la realización de todos los cálculos necesarios a base de esta fórmula se obtienen sólo números reales y, además, el resultado final de los cálculos para el número dado $x$ del dominio de la función analizada (conjunto de definición) es su *valor* en el punto $x$. Así, el campo de existencia de la función $f(x) = \dfrac{x + |x|}{\sqrt{1 - x^2}}$ es el intervalo $(-1, 1)$, aunque esta función toma valores reales en la semirrecta $x < 1$ con el "punto excluido" $x = -1$.

Señalemos que en esta definición las funciones reales $f(x) = x$ y $f(x) = (\sqrt{x})^2$ tienen diferentes dominios: la primera está definida sobre el conjunto de todos los números reales y la segunda, sólo sobre el conjunto de todos los no negativos.

A veces la función se da con ayuda de varias fórmulas, por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{para} \quad x > 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0, \\ x - 1 & \text{para} \quad x < 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Una función puede darse también simplemente con ayuda de la descripción de la correspondencia. Pongamos en correspondencia a cada número $x > 0$ el número 1, al número 0, el número 0 y a cada $x < 0$, el número $-1$. Como resultado obtendremos una función definida sobre todo el eje real y que toma tres valores: 1, 0 y $-1$. Esta función tiene una notación especial $\operatorname{sign} x$ *) y, naturalmente, puede ser escrita con ayuda de varias fórmulas:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad x > 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0, \\ -1 & \text{para} \quad x < 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Otro ejemplo: a cada número racional pongámosle en correspondencia el número 1 y a cada irracional, el cero. La función obtenida se llama *función de Dirichlet* **).

Señalemos que cualquier fórmula es una escritura simbólica de cierta correspondencia descrita anteriormente en algún lugar, así que al fin y al cabo no hay diferencia principal entre la representación de una función con ayuda de una fórmula o con ayuda de la descripción de la correspondencia; esta diferencia es simplemente externa.

Es necesario también tener en cuenta que cualquier función definida por primera vez, si para ella se introduce una notación especial, puede servir para la definición de otras funciones con ayuda de fórmulas que incluyan este nuevo símbolo.

Si se habla de funciones reales de un argumento real, entonces para la presentación evidente del carácter de la dependencia funcional, a menudo se construyen las gráficas de las funciones.

*Se llama gráfica de la función* $y = f(x)$ *(x e y son números) el conjunto de puntos sobre el plano con coordenadas* $(x, f(x))$, $x \in X$ *(X, como siempre, es el campo de definición de la función).*

Así, la gráfica de la función (5.1) tiene la forma representada en la fig. 16, la gráfica de la función $\operatorname{sign} x$ (véase (5.2)), en la fig. 17, y la gráfica de la función $y = 1 + \sqrt{\log \cos 2\pi x}$ está compuesta por puntos sueltos (fig. 18).

El conjunto de puntos $\{(x, y)\colon x \in X, y \geqslant f(x)\}$ se llama *supergráfica* de la función $f$ dada y el conjunto $\{(x, y)\colon x \in X, y \leqslant f(x)\}$ *su subgráfica.*

---

*) *Signum* en latín significa "signo".

**) L. Dirichlet (1805 — 1859), matemático alemán.

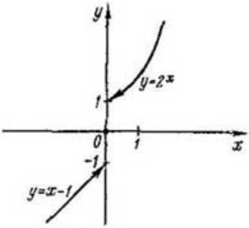



FIG. 16

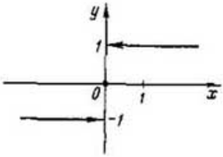



FIG. 17

La representación gráfica de una función también puede servir para la definición de la dependencia funcional. Claro, esta definición será aproximada, porque la medición de los segmentos prácticamente puede realizarse sólo con determinado grado de exactitud. Como ejemplos de definición gráfica de funciones que se encuentran en la práctica, pueden servir, por ejemplo, las indicaciones de un oscilógrafo.

Una función se puede representar además *con ayuda de tablas*, es decir, para algunos valores de la variable $x$ indicar los valores respectivos de la variable $y$. Los datos de las tablas pueden ser obtenidos tanto directamente de un experimento como con ayuda de unos u otros cálculos matemáticos. Ejemplos de tal definición de las funciones son las tablas logarítmicas y las tablas de las funciones trigonométricas.

Por último, en la realización de cálculos numéricos en computadoras, las funciones se dan *con ayuda de programas*, para su cálculo con los valores necesarios del argumento, o los valores exigidos de la función, en forma preparada, se introducen de uno u otro modo en la memoria de la computadora.

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones:

4. $y = 2x + 1$.
5. $y = ax + b$.
6. $y = a/x$.
7. $y = 2x^2$.
8. $y = ax^2 + bx + c$.
9. $y = 2^x$.
10. $y = (1/2)^x$.
11. $y = \log x$.
12. $y = \log_{1/2} x$.

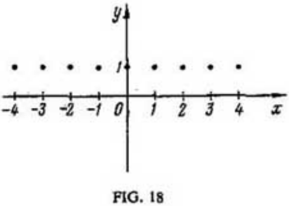



FIG. 18

13. $y = \operatorname{sen} 2x$.
14. $y = 2\cos(3x+2)+1$
15. $y = \operatorname{tg} 3x$.
16. $y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x$
17. $y = \operatorname{arcsen} x$.
18. $y = 3\arccos\frac{x}{2}+1$.
19. $y = \operatorname{arctg} x$.
20. $y = \frac{x^2+1}{x^2-4}$.
21. $y = \frac{x^2(x-1)^2}{x+1}$.

Analicemos más detalladamente algunos métodos analíticos especiales de definición de una función.

FUNCIONES IMPLÍCITAS. Supongamos que está dada una ecuación del tipo

$$F(x, y) = 0, \tag{5.3}$$

es decir, está dada la función $F(x, y)$ de dos variables reales $x$ e $y$ y se analizan sólo aquellos pares $x$, $y$ (si existen) para los cuales se cumple la condición (5.3).

Supongamos que existe el conjunto $X$ tal que para cada $x_0 \in X$ existe al menos un número $y$ que satisface la ecuación $F(x_0, y) = 0$. Denotemos uno de estos $y$ por $y_0$ y pongámosle en correspondencia al número $x_0 \in X$. Como resultado obtendremos la función $f$ definida sobre el conjunto $X$ y tal que $F(x_0, f(x_0)) = 0$ para todos los $x_0 \in X$. En este caso se dice que la función $f$ se da implícitamente por la ecuación (5.3). La misma ecuación (5.3) define, en general, no una, sino cierto conjunto de funciones.

Las funciones definidas implícitamente por ecuaciones del tipo (5.3) se llaman *funciones implícitas* a diferencia de las funciones definidas por una fórmula resoluble con respecto a la variable $y$, es decir, por una fórmula del tipo $y = f(x)$.

El término "función implícita" refleja no el carácter de la dependencia funcional, sino sólo el método de su representación. Una misma función se puede dar tanto explícita como implícitamente. Por ejemplo, las funciones $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ y $f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$ pueden ser definidas también de forma implícita con ayuda de la ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$, en el sentido de que entran en el conjunto de las funciones definidas por esta ecuación.

FUNCIONES COMPUESTAS. Recordemos que si están definidas las funciones $y = f(x)$ y $z = F(y)$ y, además, el dominio de la función $F$ contiene el campo de valores de la función $f$, entonces a cada $x$ del dominio de la función $f$, de forma natural, le corresponde un $z$ tal que $z = F(y)$, donde $y = f(x)$. Esta función definida por la correspondencia $z = F[f(x)]$ se llama, como es conocido, *función compuesta* o *composición* (*superposición*) de las funciones $f$ y $F$ y se denota por $F \circ f$, es decir,

$$(F \circ f)(x) \overset{\text{def}}{=} F(f(x)).$$

Una función compuesta refleja no el carácter de la dependencia funcional, sino sólo el método de su representación: puede ocurrir que una misma función puede ser representada tanto con ayuda de composiciones de algunas funciones como sin su ayuda. Por ejemplo, la función compuesta $z = 2^y$, $y = \log_2(1 + \operatorname{sen}^2 x)$ definida con ayuda de las superposiciones de las funciones logarítmica y exponencial puede ser representada sin esta composición $z = 1 + \operatorname{sen}^2 x$.

De forma similar, se pueden analizar las funciones compuestas que son la composición de más de dos funciones, por ejemplo, la función $w =$

$= \operatorname{sen}\log\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ se puede analizar como la composición de las siguientes funciones: $w = \operatorname{sen} v$, $v = \log u$, $u = 1 + z$, $z = 1/y$, $y = \sqrt{x}$.

### 5.3. FUNCIONES ELEMENTALES Y SU CLASIFICACIÓN

Las funciones: constante $y = c$, $c$ es una constante, potencial $y = x^{\alpha}$, exponencial $y = a^x$ $(a > 0)$, logarítmica $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, trigonométricas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, y trigonométricas inversas $y = \arcsen x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ e $y = \operatorname{arcctg} x$ se llaman *principales funciones elementales.*

*Cualquier función que pueda ser dada en forma explícita con ayuda de una fórmula que contiene sólo un número finito de operaciones aritméticas y de composiciones de las principales funciones elementales se llama simplemente función elemental.*

Por campo de existencia de una función elemental en correspondencia con el acuerdo general sobre las funciones dadas por fórmulas (véase el p. 5.2), comúnmente se entiende el conjunto de todos los números reales $x$ para los cuales, en primer lugar, la fórmula que define la función elemental analizada tiene sentido y, en segundo lugar, en el proceso de realización de todos los cálculos necesarios por esta fórmula se obtienen sólo números reales.

Las funciones analizadas anteriormente representadas por las fórmulas $y = ax + b$, $y = ax^2$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1 + \sqrt{\log\cos 2\pi x}$, $y = \operatorname{sen}\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $y = \dfrac{x + |x|}{\sqrt{1 - x^2}}$ (observemos que $|x| = \sqrt{x^2}$ es una función elemental) son funciones elementales.

Las funciones elementales comúnmente se dividen en las siguientes clases.

1. POLINOMIOS. A los polinomios pertenecen las funciones que pueden ser definidas por fórmulas del tipo

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Si $a_n \neq 0$, entonces el número $n$ se llama grado del polinomio dado. Los polinomios de primer grado también se llaman funciones lineales.

2. FUNCIONES RACIONALES (FRACCIONES RACIONALES). A esta clase de funciones pertenecen las funciones que pueden ser definidas de la forma

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Notemos que la clase de los polinomios está contenida en la clase de las funciones racionales.

3. FUNCIONES IRRACIONALES. Se llama función irracional la función que no es racional, la que puede ser representada con ayuda de composiciones de un número fi-

nito de funciones racionales, funciones potenciales con exponentes racionales y las cuatro operaciones aritméticas. Por ejemplo, la función

$$y = \sqrt[5]{(x-1)/(x^2+\sqrt{x})}$$

es una función irracional.

4. FUNCIONES TRASCENDENTES. Las funciones elementales que no son racionales ni irracionales se llaman funciones elementales trascendentes. Se puede mostrar que todas las funciones trigonométricas directas e inversas y también la exponencial y logarítmica son funciones trascendentes.

Por cuanto en nuestro curso de análisis se estudian principalmente las funciones reales de uno o varios argumentos reales, en lugar de "función real" diremos y escribiremos simplemente "función" En aquellos casos cuando se analicen funciones de otra naturaleza, esto se acordará especialmente o bien quedará claro del contexto.

## 5.4. PRIMERA DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Pasemos ahora al estudio de uno de los conceptos más fundamentales del análisis matemático, el concepto de límite de una función. Como "puntos" vamos a entender puntos finitos o infinitamente alejados, es decir, o bien números reales, o bien uno de los infinitos $\infty$, $+\infty$ o $-\infty$. Daremos primeramente la definición de límite de la función $f: X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}$ en términos de límites de sucesiones. Esta definición frecuentemente se nombra definición de límite de la función según Heine *).

**Definición 1.** *El punto $a$ se llama límite de la función $f: X \to R$ en el punto $x_0$ (o lo que es lo mismo cuando $x \to x_0$* **)*, si para cualquier sucesión $x_n \in X$, $n =$ $= 1, 2, \cdots$,* que tiene como límite el punto $x_0$, *es decir, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \tag{5.4}$$

*la sucesión $\{f(x_n)\}$ tiene como límite el punto $a$, es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a. \tag{5.5}$$

*En el caso cuando $a$ es el límite de la función $f$ en el punto $x_0$, se escribe*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad ó \quad f(x) \to a \text{ cuando } x \to x_0,$$

*y si $x_0$ es un número $x_0 \in R$, entonces, a veces también se escribe*

$$\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = a.$$

Subrayemos que en la definición 1 $x_0$ y $a$ pueden ser tanto números reales, como los infinitos: $\infty$, $+\infty$ y $-\infty$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ y $a$ es un número real, entonces se dice que en el punto $x_0$ la función $f$ tiene *límite finito* (igual a $a$).

---

*) H. Heine (1821 — 1881), matemático alemán.

**) La notación "cuando $x \to x_0$" se lee "cuando $x$ tiende a $x_0$".

La definición de límite para la función dada $f: X \to R$, tiene sentido, naturalmente, si y sólo si para el punto $x_0$ realmente existen sucesiones de puntos $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, que tengan como límite (finito o infinito) el punto $x_0$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

**Definición 2.** *Sea $X \subset R$. El punto $x_0$, para el cual existe la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, que tiene como límite el punto $x_0$:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \tag{5.6}$$

*se llama punto de adherencia del conjunto $X$.*

Si el punto de adherencia $x_0$ del conjunto $X$ es uno de los infinitos $\infty$, $+\infty$ ó $-\infty$, entonces se denomina también *punto de adherencia infinitamente alejado*. Es evidente que si $x_0 = \infty$ es un punto de adherencia infinitamente alejado del conjunto $X$, entonces el conjunto es no acotado; si $x_0 = +\infty$ (respectivamente, $x_0 = -\infty$) es un punto de adherencia infinitamente alejado del conjunto $X$, entonces el conjunto es no acotado superiormente (respectivamente, inferiormente).

Es evidente que cualquier punto $x_0$, perteneciente al mismo conjunto $X$, es su punto de adherencia, ya que la sucesión estacionaria $x_n = x_0 \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, satisface las condiciones de la definición 2: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ y $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$. Pero sin duda, en los conjuntos pueden existir puntos de adherencia finitos no pertenecientes a estos conjuntos. Así, por ejemplo, los puntos $x = a$ y $x = b$ son puntos de adherencia del intervalo $(a, b)$ y no están incluidos en él.

Ejercicio 22. Demuéstrese que si el punto $x_0$ es un punto de adherencia del conjunto $X$ y $X \subset Y \subset R$, entonces el punto $x_0$ es un punto de adherencia del conjunto $Y$.

OBSERVACIÓN 1. No es difícil convencerse de que un punto es punto de adherencia del conjunto dado si y sólo si cualquiera de sus entornos se interseca con este conjunto.

En realidad, si $x_0$ es un punto de adherencia del conjunto $X$, entonces existe una sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ y, por lo tanto, en cualquier entorno del punto $x_0$ caerán todos los términos de esta sucesión a partir de un cierto término (ellos son puntos del conjunto $X$).

Viceversa, si en cualquier entorno del punto $x_0$ se tienen puntos del conjunto $X$, entonces, eligiendo para cada natural $n$ algún punto en la intersección no vacía por hipótesis $X \cap U\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ y denotándolo por $x_n$, es decir,

$$x_n \in X \cap U\left(x_0, \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

obtenemos una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \to x_0$ (véase la observación 1 en el p. 4.2) y $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$. Esto significa que $x_0$ es un punto de adherencia del conjunto $X$. $\square$

Para cualquier conjunto no vacío $X \subset R$, su cota superior $\beta = \sup X$ y cota inferior $\alpha = \inf X$ son sus puntos de adherencia (ellos pueden ser finitos o infinitos). Esto inmediatamente se deduce, por el lema 1, de la definición 6' de cota superior y de la definición 7' de cota inferior, ya que en estas definiciones se exige que en cualquier entorno de la cota correspondiente del conjunto se encuentre un punto de éste (e incluso por un lado de la cota analizada).

De la definición 1 de límite de la función, se deduce directamente que en el punto de adherencia de la definición, la función no puede tener dos límites distintos, es decir, como se dice, la definición señalada es unívoca.

Más adelante, de la definición de límite de la función se deduce que los valores tomados por la función en los puntos que se encuentran fuera de cualquier entorno dado del punto $x_0$ no influyen en la existencia ni en el valor del límite de la función en el punto $x_0$. Dicho figuradamente el hecho de que existe o no el límite de la función en el punto dado $x_0$ y si existe, entonces, cuál es su valor, se determina completamente por los valores de la función en la intersección $U(x_0) \cap X$ de cualquier entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ (que es un punto de adherencia del conjunto $X$) con este mismo conjunto. En realidad, cualquiera que sea el entorno $U(x_0)$ y cualquiera que sea la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ se encuentra un número $n_0$ tal que cuando $n > n_0$, $n \in N$, va a tener lugar la inclusión $x_n \in U(x_0) \cap X$, y el número finito de términos restantes $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ de la sucesión $\{f(x_n)\}$ no influye en la existencia de su límite, ni en su valor, si éste existe.

Las propiedades de la función, que dependen sólo de los valores de la función en cualquier entorno del punto analizado, dicho más exacto, que no varían durante el paso a la restricción de la función en la intersección de su conjunto de definición con cualquier entorno del punto, se llaman propiedades locales de la función en el punto dado. De lo dicho se deduce, que tanto la existencia del límite en el punto, como su valor, si éste existe, son propiedades locales de la función en este punto.

Ejemplos. 1. Sea

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}. \tag{5.7}$$

El conjunto $X$, sobre el cual está definida la función (5.7) se obtiene del conjunto de todos los números reales $R$ restando del mismo la unidad: $X = R \setminus \{1\}$. Aclaremos si existe o no el límite de la función $f$ (5.7) en el punto $x_0 = 0$.

Tomemos cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$. Entonces, basándonos en los teoremas del p. 4.9, obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{2x_n^2 + x_n - 1}{x_n - 1} = \frac{2\left(\lim\limits_{n \to \infty} x_n\right)^2 + \lim\limits_{n \to \infty} x_n - 1}{\lim\limits_{n \to \infty} x_n - 1} = 1.$$

De esta manera, existe $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 1$, y ya que él no depende de la elección de la sucesión $x_n \to 0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, entonces también existe el límite $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = 1$.

2. Analicemos la función

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \tag{5.8}$$

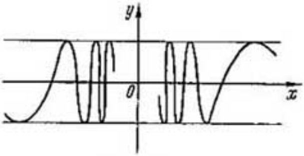



FIG. 19

(fig. 19). Ella está definida sobre el conjunto $X = R \setminus \{0\}$. Aclaremos de nuevo, si existe o no para la función $f$ el límite en el punto $x_0 = 0$. Tomemos dos sucesiones

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \text{ y } x_n' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Es evidente que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n' = 0, x_n \neq 0, x_n' \neq 0$ (la condición $x \neq 0$ en este caso significa que $x \in X$), $f(x_n) = \operatorname{sen} \pi n = 0$, $f(x_n') = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Por esto, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = 1$, lo que significa que el límite de la función (5.8) cuando $x \to 0$ no existe.

3. Sea

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2}.$$

Hallemos el límite de esta función cuando $x \to \infty$. Su dominio es el conjunto $X = R \setminus \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Tomando cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ $\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ tendremos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + x_n + 1}{x_n^2 - 2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n^2}}{1 - \frac{2}{x_n^2}} = \frac{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2}}{1 - 2 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2}} = 1.$$

De aquí se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2} = 1.$$

Ejercicio 23. Demuéstrese que el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ no existe, y los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ existen y hállense.

En el estudio de los límites de las funciones, frecuentemente tenemos que operar con los límites de las restricciones de las funciones sobre uno u otro conjunto, es decir, con límites de funciones que se obtienen de las funciones dadas analizándolas no sobre todo el conjunto, sobre el cual ellas están definidas, sino sobre un contenido en éste.

**Definción 3.** *Sea $f: X \to R$. El límite de la restricción $f_E: E \to R$, $E \subset X$, de la función $f$ sobre el conjunto $E$ en el punto $x_0$, se llama límite de la función $f$ por el conjunto $E$ en este punto y se denota por*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x).$$

De esta forma

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0} f_E(x), \tag{5.9}$$

es decir, el límite de la función por el conjunto $E \subset X$ no es un concepto nuevo en comparación con el límite de la función, éste es sencillamente el límite, en el sentido de la definición 1 de la función que es la restricción de la dada sobre este conjunto $E$.

El concepto de límite de la función por un conjunto en el punto $x_0$ tiene sentido sólo para un conjunto $E$, para el cual el punto $x_0$ es su punto de adherencia (en este caso evidentemente, es un punto de adherencia del conjunto $X$).

Utilizando la terminología de la definición 3, se puede decir que el límite de la función en el sentido de la definición 1 es su límite en el punto $x_0$ por todo el conjunto de definición $X$ de la función $f$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x).$$

En el caso, cuando la función $f$ está dada por una fórmula, entonces por $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ se entiende el límite de esta función en el punto $x_0$ por todo el conjunto de valores $X$, para los cuales la fórmula señalada tiene sentido y para los cuales en el proceso de realización de todos los cálculos según esta fórmula se obtienen sólo números reales (véase el p. 5.2).

Ejemplo 4. Sea $f$ la función de Dirichlet (véase el p. 5.2), es decir, la función igual a 1 sobre el conjunto $Q$ de todos los números racionales e igual a cero sobre el conjunto $I$ de todos los números irracionales. Entonces, en el punto $x_0 = 0$ su límite por el conjunto de los números racionales es igual a 1:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in Q}} f(x) = 1,$$

y por el conjunto de los irracionales es igual a cero:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in I}} f(x) = 0.$$

Por todo el conjunto de los números reales (es decir, por el conjunto de definición de la función de Dirichlet) el límite en el punto $x_0 = 0$ no existe, ya que la exis-

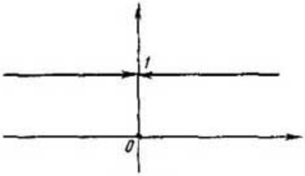



FIG. 20

tencia o no del límite de la sucesión $\{f(x_n)\}$ para $n \to \infty$ depende, en el caso dado, de la elección de la sucesión $\{x_n\}$ que tiende a cero.

Destaquemos la siguiente sencilla afirmación.

**Lema 1.** *Si $f: x \to R$, $E \subset X$, $x_0$ es un punto de adherencia del conjunto $E$ y existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ de la función $f$ en el punto $x_0$ (es decir, el límite por el conjunto $X$), entonces, en el punto $x_0$ existe también el límite de la función $f$ por el conjunto $E$ y los valores de ambos límites son iguales:*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x). \tag{5.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Si para cualquier sucesión $x_n \subset X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ todas las sucesiones $\{f(x_n)\}$ tienen un mismo límite $a$, entonces esto, a ciencia cierta, es válido también para cualquier sucesión $x_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, ya que $E \subset X$. □

Destaquemos un caso de límite de la función en el punto, que se encuentra con frecuencia, cuando el límite se toma por el así llamado entorno reducido de este punto o por la intersección del entorno reducido con el conjunto de definición de la función estudiada.

**Definición 4.** *Se denomina ε-entorno reducido del punto $x_0$ el conjunto que se obtiene al eliminar el punto $x_0$ de su ε-entorno.*

El ε-entorno reducido del punto $x_0$ se denota por $\mathring{U}(x_0, \varepsilon)$:

$$\mathring{U}(x_0, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} U(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}. \tag{5.11}$$

Cualquier ε-entorno reducido del punto $x_0$ se llama sencillamente entorno reducido y se denota también por $\mathring{U}(x_0)$.

Ejemplo 5. Analicemos la función $f(x) = |\operatorname{sign} x|$ (véase la difinición de la función $\operatorname{sign} x$ en el p. 5.2). Su gráfica está representada en la fig. 20. Cualquiera que sea el entorno del cero $U(0)$, para esta función, en el punto $x_0 = 0$, evidentemente, existe el límite por el entorno reducido $\mathring{U}(0)$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathring{U}(0)}} |\operatorname{sign} x| = 1.$$

Además, el límite $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in U(0)}} |\operatorname{sing} x|$ por todo el entorno $U(0)$ en el punto $x_0 = 0$ para la función $|\operatorname{sign} x|$ no existe, ya que, por ejemplo, para la sucesión

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{si } n = 2k, \\ 0, & \text{si } n = 2k - 1, \\ & k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

tenemos $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ (y, por lo tanto, todos sus términos a partir de uno, van a encontrarse en el entorno $U(0)$ dado), y la sucesión $|\operatorname{sign} x_n|$ no tiene límite (en los lugares pares tiene valor uno y en los impares, cero).

Los ejemplos 4 y 5 analizados muestran, en particular, que una misma función puede tener límite en un punto por un conjunto y por otro no tener límite en este punto o tenerlo, pero distinto.

OBSERVACIÓN 2. Si las funciones $f$ y $g$ están definidas en un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$, excepto, quizá, el mismo punto $x_0$, y para cada $x$ perteneciente al entorno reducido $\mathring{U}(x_0)$, $x \in \mathring{U}(x_0)$, ellas toman valores iguales

$$f(x) = g(x),$$

entonces, sus límites por el entorno reducido $\mathring{U}(x_0)$ existen o no simultáneamente, y si existen, entonces son iguales entre sí

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{U}(x_0)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{U}(x_0)}} g(x),$$

ya que en su definición participan sólo los valores de las funciones en los puntos del entorno reducido $\mathring{U}(x_0)$.

En esta sencilla observación está basada la llamada regla de resolución de las indeterminaciones, con ayuda de la simplificación de fracciones. Aclarémosla con un ejemplo.

Ejemplo 6. Hallemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2x^2 + x - 1)x}{x^2 - x}. \tag{5.12}$$

La repetición de los razonamientos, análogos a aquellos con ayuda de los cuales fue calculado el límite en el ejemplo 1, nos lleva a la expresión $\dfrac{0}{0}$, es decir, a una indeterminación, sin responder de este modo a la pregunta sobre la existencia del límite (5.12), ni a la cuestión sobre su valor, si éste existe. Por eso, analicemos la función

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$$

obtenida de la función

$$g(x) = \frac{(2x^2 + x - 1)x}{x^2 - x},$$

que se encuentra bajo el signo del límite en la expresión (5.12), simplificando el segundo miembro de la igualdad por $x$. Las funciones $f$ y $g$ coinciden en el entorno reducido $\mathring{U}(0, 1) = (-1, 1) \setminus \{0\}$ del punto $x_0 = 0$ y, por eso, según la observación hecha anteriormente, al mismo tiempo tienen límites o no en este punto por el entorno reducido señalado, además en el caso en que existan estos límites, son iguales. En el ejemplo 1 fue mostrado que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ por todo el dominio de la función $f$, por lo tanto por su subconjunto $\mathring{U}(0, 1)$. De esta forma,

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathring{U}(0,1)}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathring{U}(0,1)}} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

(la primera igualdad es válida porque el límite es una propiedad local de la función). Estos razonamientos son la base de los cálculos que en la notación utilizada comúnmente tienen la forma

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2x^2 + x - 1)x}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} = 1.$$

OBSERVACIÓN 3. Un caso particular de límite (finito o infinito) de una función es el límite de una sucesión (finito o infinito, respectivamente). En realidad, la sucesión $x_n \in \boldsymbol{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, es una función definida sobre el conjunto de los números naturales:

$$f\colon N \to \boldsymbol{R}$$

y, además, $f(n) = x_n$, $n = 1, 2, \ldots$. La definición dada anteriormente de límite de una sucesión $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ (véase la definición 5 en el p. 4.2) y la definición de su límite, como de un caso particular de la definición de límite de una función $\lim\limits_{n \to \infty} f(n)$ (véase la definición 1 de este punto), son equivalentes porque si la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite (finito o infinito) en el sentido de la definición 5 del p. 4.2, entonces para cualquier elección de la sucesión de los números naturales $\{n_k\}$, tal que $\lim\limits_{k \to \infty} n_k = +\infty$, la sucesión $\{x_{n_k}\}$ tiene el mismo límite que la sucesión $\{x_n\}$ (véase el lema en el p. 4.3) como esto se exige en la definición 1.

## 5.5. FUNCIONES CONTINUAS

En el estudio del límite de una función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ cuando $x \to x_0$ puede suceder que $x_0 \in X$ (entonces, $x_0$ es un número: $x_0 \in \boldsymbol{R}$) o viceversa, que $x_0 \notin X$. El caso $x_0 \in X$ presenta especial interés ya que conlleva al concepto importante de función continua. Su estudio lo comenzaremos por la demostración del siguiente lema.

**Lema 2.** *Sea $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ y $x_0 \in X$. Entonces, para que la función $f$ tenga límite en el punto $x_0$ es necesario y suficiente que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.13}$$

DEMOSTRACIÓN. La suficiencia de la condición (5.13) para la existencia del límite de la función $f$ en el punto $x_0$ es evidente: esta condición es incluso más fuerte, ya que ella afirma no sólo la existencia del límite, sino que señala su valor igual a $f(x_0)$.

Demostremos la necesidad de la condición (5.13) para la existencia del límite de la función $f$ en el punto $x_0$. Supongamos que para la función $f$ en el punto $x_0$ existe el límite igual a $a$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a. \tag{5.14}$$

Según la definición de límite, esto significa que para cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, es válida la igualdad

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a. \tag{5.15}$$

En particular, por cuanto $x_0 \in X$ esta igualdad es válida para la sucesión estacionaria, formada por un único punto $x_0$, es decir, para la sucesión $x_n = x_0$, $n = 1, 2, \dots$ En este caso, (5.15) tiene la forma

$$\lim_{n \to \infty} f(x_0) = a. \tag{5.16}$$

Por otro lado, ya que el límite de una constante es igual a esa misma constante, entonces

$$\lim_{n \to \infty} f(x_0) = f(x_0). \tag{5.17}$$

Comparando (5.16) y (5.17) obtenemos

$$f(x_0) = a. \ \square$$

Definamos ahora el concepto de función continua en un punto dado.

**Definción 5.** *La función $f: X \to R$ se llama continua en el punto $x_0 \in X$ si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.18}$$

La condición (5.18) significa que en el caso de continuidad de la función $f$ en el punto $x_0$, el límite de $f$ en este punto se halla por una regla muy sencilla: se debe calcular el valor de la función $f$ en el punto $x_0$.

Según el lema 2, la condición (5.18) es equivalente a que la función $f: X \to R$ tiene límite en el punto $x_0$ y que $x_0 \in X$. Se sobrentiende que en el caso, cuando para la función $f: X \to R$ el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ es igual a uno de los infinitos $\infty$, $+\infty$ ó $-\infty$, entonces, a ciencia cierta, $x_0 \notin X$. En el caso contrario, para la sucesión estacionaria $x_n = x_0$, $n = 1, 2, \dots$, tendría lugar $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_0) = f(x_0)$ y ya que, por condición, la función toma sólo valores numéricos, entonces, a pesar de la suposición, el límite $\lim_{x \to x_0} f_x$ sería finito. De lo dicho se deduce, en particular, que si para la función en algún punto existe límite infinito, entonces en él la función, a ciencia cierta, no es continua.

Señalemos además, que en la definición 5, el punto $x_0$, en el cual se define el concepto de continuidad de la función, pertenece a la recta numérica $R$, es decir, no es un punto infinito.

Para realizar el análisis del concepto de continuidad de la función en el punto, daremos las definiciones de puntos aislados y límite de los conjuntos.

**Definición 6.** *El punto $x_0 \in X$ se llama punto aislado del conjunto $X \subset R$ si existe un entorno $U(x_0)$ de este punto cuya intersección $U(x_0) \cap X$ con el conjunto $X$ está compuesta sólo por un punto $x_0$:*

$$U(x_0) \cap X = \{x_0\}. \qquad (5.19)$$

Todos los puntos del conjunto de los números naturales $N$ son aislados, y el conjunto $Q$ de todos los números racionales no tiene ningunos puntos aislados.

**Definición 7.** *El punto $x_0 \in R$ se llama punto de acumulación del conjunto $X \subset R$, si en cualquiera de sus entornos existe un punto diferente de él y perteneciente al conjunto $X$.*

Un punto de acumulación de un conjunto puede pertenecer o no a éste. Por ejemplo, cada punto del segmento $[a, b]$ es un punto de acumulación del intervalo $(a, b)$. En este caso, los puntos $a$ y $b$ no pertenecen al intervalo señalado, y todos los restantes están contenidos en él.

Si un punto pertenece a un conjunto, entonces, por las definiciones 6 y 7, es un punto aislado de éste, si y sólo si, no es un punto de acumulación.

Cualquier punto adherente del conjunto es o bien un punto aislado de este conjunto, o bien es su punto de acumulación, ya que o bien en cualquiera de sus entornos se contiene un punto del conjunto, diferente de él (entonces, este punto es de acumulación), o bien existe un entorno, que no contiene puntos del conjunto que no coincidan con él, y, por eso, ya que en este entorno, no obstante, existe un punto del conjunto (o sea, el punto dado por hipótesis, es su punto de adherencia), entonces este punto resulta ser el mismo, por lo tanto, en primer lugar, pertenece al conjunto analizado, y, en segundo lugar, es un punto aislado de este conjunto.

Es válida la proposición siguiente.

**Lema 3.** *Cualquier función es continua en cada punto aislado del conjunto de su definición.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0$ un punto aislado del conjunto de definición $X$ de la función $f$. Entonces, por la definición 6, existe un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$, cuya intersección con el conjunto $X$ está compuesta por un único punto $x_0$, es decir, $U(x_0) \cap X = \{x_0\}$. Cualquiera que sea la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ $\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, para el entorno señalado, por la definición de límite de una sucesión, existe un número $n_0$ tal que para todos los números $n > n_0$, se cumple la inclusión $x_n \in U(x_0)$ y, por lo tanto, la inclusión $x_n \in U(x_0) \cap X$. Pero ya que $U(x_0) \cap$ $\cap X = \{x_0\}$, entonces para todos los $n > n_0$ tenemos $x_n = x_0$. Esto significa que a partir del número $n_0 + 1$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ se hace estacionaria: $f(x_n) = f(x_0)$ para $n > n_0$. Por esto, existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, que por la elección arbitraria de la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, significa que se cumple la condición (5.18), es decir, la función $f$ es continua en el punto $x_0$.

Ejemplo. La función $f(x) = \sqrt{\ln \cos 2\pi x} + 1$ (véase el p. 5.2) está definida sólo para los valores enteros del argumento $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ . De esta forma, cada punto del conjunto de definición de esta función es un punto aislado de éste, por esto, según el lema 3, la función analizada es continua en todos los puntos de su conjunto de definición.

Del lema 3 se deduce que la cuestión sobre el límite de una función en un punto aislado del conjunto de su definición se resuelve muy fácilmente: existe siempre y es igual a $f(x_0)$. Por esto, el concepto de límite de una función (en particular, su continuidad), tiene sentido sólo para los puntos de acumulación del conjunto de definición de la función.

Ejercicio 24. Demostrar que la función $f\colon X \to R$ es continua en el punto de acumulación $x_0 \in X$ del conjunto $X$ si y sólo si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{U}(x_0) \cap X}} f(x) = f(x_0).$$

De modo semejante a como se analizó el límite de la función por cualquier conjunto, perteneciente a su dominio, se puede, en particular, analizar la continuidad de la función por el conjunto correspondiente.

**Definición 8.** *Sea $f\colon X \to R$ y $x_0 \in E \subset X$. La función $f$ se llama continua en el punto $x_0$ por el conjunto $E$, si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0).$$

Dicho de otra forma, *la función $f$ se llama continua en el punto $x_0 \in E$ por el conjunto $E$, si en este punto es continua la restricción $f_E$ de esta función sobre el conjunto $E$*:

$$\lim_{x \to x_0} f_E(x) = f_E(x).$$

Sobre la función $f\colon X \to R$, continua en el punto $x_0 \in X$ en el sentido de la definición 5, se puede decir que ella es continua en este punto según el conjunto $X$.

Por ejemplo, la función de Dirichlet $f$ (véase el ejemplo 3 en el p. 5.4) es continua en el punto $x_0 = 0$ por el conjunto $Q$ de todos los números racionales, ya que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in Q}} f(x) = 1 = f(0)$$

y no es continua en él por el conjunto de todos los números reales, o sea, el límite en el punto $x_0 = 0$ por el conjunto de todos los números reales, para la función de Dirichlet sencillamente no existe.

## 5.6. CONDICIONES DE LA EXISTENCIA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Por la definición de límite, la función $f\colon X \to R$ tiene límite en el punto $x_0$, si cualquiera que sea la sucesión $x_n \to 0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, la sucesión de los valores correspondientes de la función $\{f(x_n)\}$ tiene límite (finito o infinito), y estos límites no dependen de la elección de las sucesiones señaladas $\{x_n\}$, es decir, todas las sucesiones $\{f(x_n)\}$ tienen, el mismo límite $a$: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$. Este valor $a$ es el límite de la función $f$ en el punto $x_0$.

Mostremos que si debilitamos la hipótesis, de forma más precisa, si suponemos sólo la existencia del límite, finito o infinito de un signo determinado, para cada una de las sucesiones analizadas $\{f(x_n)\}$, entonces de esto se deducirá, que todos estos límites coinciden, y de esta forma la función $f$ en este caso, tendrá límite en el punto $x_0$

**Lema 4.** *Para que la función $f: X \to R$ tenga límite finito o infinito de signo determinado, en el punto $x_0$, que es punto adherente del conjunto $X$, es necesario y suficiente que para cualquier sucesión $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$*, la sucesión de los valores correspondientes de la función $\{f(x_n)\}$ *tenga límite finito o infinito de un signo determinado.*

**Corolario.** *Para que la función $f: X \to R$ tenga límite en el punto $x_0$, que es un punto adherente del conjunto $X$, es necesario y suficiente que para cualquier sucesión $x_n \to x_0, x_n \in X, n = 1, 2, \ldots$, la sucesión de los valores correspondientes de la función $\{f(x_n)\}$ sea convergente.*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. La necesidad de la condición, enunciada en las hipótesis del lema, para la existencia del límite de la función $f$ cuando $x \to x_0$, está contenida en la propia definición de este concepto (véase la definición 1 en el p. 5.4), en la que se afirma la existencia del límite $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ para todas las sucesiones $\{x_n\}$ analizadas.

Demostremos la suficiencia de la condición señalada en el lema, para la existencia del límite de la función. Sea $f: X \to R$ y para cualquier sucesión $x_n \to x_0, x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ tiene límite (finito o infinito de signo determinado). Analicemos dos sucesiones cualesquiera $x_n' \to x_0$ y $x_n'' \to x_0$, $x_n' \in X$, $x_n'' \in X$, $n = 1, 2, \ldots$. Entonces la sucesión

$$x_n = \begin{cases} x_k', & \text{si } n = 2k - 1, \\ x_n'', & \text{si } n = 2k, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

también tiene como límite el punto $x_0$ (finito o infinito) y $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$. Por esto, según la suposición hecha, existen los límites $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n')$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n'')$ y $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$, además, las sucesiones $\{f(x_n')\}$ y $\{f(x_n'')\}$ son subsucesiones de la sucesión $f(x_n)$, ya que las sucesiones $\{x_n'\}$ y $\{x_n''\}$ son subsucesiones de la sucesión $\{x_n\}$.

Recordemos ahora, que si una sucesión tiene límite (finito o infinito), entonces cualquiera de sus subsucesiones tiene el mismo límite (véase el p. 4.6). Por esto

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n') = \lim_{n \to \infty} f(x_n), \qquad \lim_{n \to \infty} f(x_n'') = \lim_{n \to \infty} f(x_n),$$

de donde

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n') = \lim_{n \to \infty} f(x_n'').$$

De esta forma, los límites de las sucesiones $\{f(x_n)\}$, donde $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, no dependen de la elección de las sucesiones $\{x_n\}$. Designando el valor común de los límites de las sucesiones $\{f(x_n)\}$ por $a$, tendremos, por la definición 1 del p. 5.4, que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

La afirmación del corolario se deduce directamente del lema 4 (recordemos que el término "sucesión convergente" se utiliza sólo para las sucesiones que tienen límite finito).

## 5.7. SEGUNDA DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Existe otra definición del límite de una función, que no utiliza el concepto de límite de una sucesión, sino que se enuncia en términos de entornos y se llama defi-

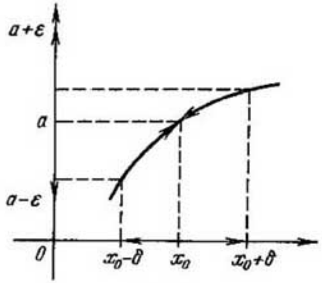



FIG. 21

nición del límite de una función según Cauchy. Esta definición es equivalente a la definición 1 en el p. 5.4.

**Definición 9.** *El punto a se llama límite de la función $f: X \to R$ cuando $x \to x_0$ (o lo que es lo mismo, en el punto $x_0$), si para cualquier entorno $U(a)$ del punto a existe un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ tal que*

$$f(X \cap U(x_0)) \subset U(a). \tag{5.20}$$

El límite según Cauchy para una función también lo denotaremos por $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Esto es natural, ya que el concepto de límite de una función dado según Cauchy, como se ha señalado más arriba y próximamente será demostrado, es equivalente a la definición de límite de una función dada en el p. 5.4.

La figura 21 ilustra la definición 9 en el caso cuando $x_0$ y $a$ son números reales y el conjunto $X$ es un entorno reducido del punto $x_0$.

Utilizando los símbolos lógicos la definición 9 puede ser escrita en la forma siguiente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall U(a))(\exists U(x_0)) : f(X \cap U(x_0)) \subset U(a).$$

Descifrando detalladamente la inclusión (5.20), la definición 9 se puede enunciar de la forma siguiente.

El punto $a$ se llama límite de la función $f: X \to R$ cuando $x \to x_0$, si para cualquier entorno $U(a)$ del punto $a$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ tal que para cualquier punto

$$x \in X \cap U(x_0) \tag{5.21}$$

se cumple la inclusión

$$f(x) \in U(a). \tag{5.22}$$

En símbolos lógicos esta definición se presenta en la forma siguiente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall U(a))(\exists U(x_0))(\forall x \in X \cap U(x_0)) : f(x) \in U(a). \tag{5.23}$$

Recordando la definición de entornos de los puntos finitos e infinitamente alejados, la definición 9 puede ser expresada, en cada caso concreto, en términos de desigualdades. Enunciemos inicialmente en esta forma la definición del límite finito en un punto finito.

El número $a$ se llama límite de la función $f$ en el punto $x_0 \in \boldsymbol{R}$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ *) tal que para todos los $x$, que satisfacen las condiciones

$$|x - x_0| < \delta, \quad x \in X,$$

se cumple la desigualdad

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

En símbolos lógicos esta definición tiene el aspecto siguiente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \boldsymbol{R} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, \quad |x - x_0| < \delta) : |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Demos un ejemplo más de la definición de límites infinitos en términos de desigualdades. Por ejemplo, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ para la función $f \colon X \to \boldsymbol{R}$ significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos los $x$ que satisfacen la condición

$$x > \delta, \quad x \in X,$$

se cumple la desigualdad

$$f(x) < -\varepsilon$$

o en símbolos lógicos

$$\lim_{x \to +x_0} f(x) = -\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, x > \delta) : f(x) < -\varepsilon.$$

De lo dicho se ve que pueden encontrarse diferentes combinaciones del paso a los valores límites (tanto finitos, como infinitos) de las variables dependientes e independientes. El enunciado de la definición de límite de una función para cada caso particular en términos de desigualdades, o como se dice también, a veces, "en el lenguaje de $\varepsilon$ y $\delta$", aunque frecuentemente es más cómodo en situaciones concretas (por esto es necesario saber hacerlo) conviene peor para resolver cuestiones generales, ya que exige la realización de demostraciones especiales para cada caso por separado, en correspondencia con el enunciado de la definición dada. Por esto, es cómodo utilizar la definición 9, que abarca todos los casos concretos.

Pasemos ahora a la comparación de las definiciones de límite de una función dadas por Heine (definición 1) y por Cauchy (definición 9).

**Teorema 1.** *Las definiciones 1 y 9 de límite de una función en un punto adherente del conjunto de definición de una función son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. I. Sean $f \colon X \to \boldsymbol{R}$, $x_0$ un punto adherente del conjunto $X$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ en el sentido de la definición 1. Mostremos que entonces se cumple también la condición que se encuentra en la parte derecha de la fórmula (5.23).

Supongamos que esto no es así, es decir, que

---

*) A veces se escribe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ para subrayar que la elección de $\delta$ depende de $\varepsilon$.

$$(\exists\, U(a))(\forall\, U(x_0))(\exists\, x \in X \cap U(x_0)) : f(x) \notin U(a) \tag{5.24}$$

o, dicho de otra forma, se encuentra un entorno $U(a)$ del punto $a$ tal que en cualquier entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ existe un punto $x \in X$ tal que los valores de la función $f(x)$ en este punto no pertenecen al entorno $U(a)$. En particular, los puntos $x$ señalados se encuentran en cada entorno $U\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right)$. Denotémoslos por $x_n$, es decir,

$$x_n \in X \cap U\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \tag{5.25}$$

y

$$f(x_n) \notin U(a). \tag{5.26}$$

De la condición (5.25) se deduce que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \tag{5.27}$$

(véase la observación 1 en el p. 4.2). Ya que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ en el sentido de la definición 1, entonces para cualquier sucesión $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, tiene lugar la igualdad $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$. Por la definición de límite de una sucesión, esto significa que para cualquier entorno $U(a)$ existe un número $n_0$ tal que para todos los números $n > n_0$ tiene lugar la inclusión

$$f(x_n) \in U(a). \tag{5.28}$$

Sin embargo, si se toma el entorno $U(a)$ del punto $a$, según la condición (5.24), y después se construye, como esto fue hecho anteriormente, la sucesión $\{x_n\}$, que satisface las condiciones (5.25) y (5.26), y, por lo tanto, la condición (5.27), entonces, para ella, por la condición (5.26), para ningún $n_0$ se cumplirá la condición (5.28). La contradicción obtenida demuestra la afirmación hecha. □

II. Sea ahora $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, en el sentido de la definición 9 de límite de la función, $f \colon X \to \boldsymbol{R}$, $x_0$ es un punto adherente del conjunto $X$ y sea

$$x_n \to x_0, \quad x_n \in X, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{5.29}$$

Mostremos que entonces

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a, \tag{5.30}$$

es decir, que el punto $a$ es límite de la función $f$ en el sentido de la definición 1.

Demos un entorno arbitrario $U(a)$ del punto $a$ y escojamos para él el entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$, que satisface las condiciones (5.21) — (5.22). Para este entorno $U(x_0)$, por la condición (5.29) se encuentra un número $n_0$ tal que para todos los números $n > n_0$ se cumplirá la inclusión

$$x_n \in X \cap U(x_0).$$

Pero entonces por (5.22) tendremos

$$f(x_n) \in U(a).$$

Esto significa que se cumple la condición (5.30). □

El límite de una función, como fue señalado en el p. 5.4, es una propiedad local de la función en el sentido de que su existencia para una función en el punto dado, y si existe, entonces también su valor no dependen de la restricción de la función de la intersección de cualquier entorno del punto $x_0$ con el conjunto de definición de la función dada. Esto también se ve claramente de la definición 9: si se da un entorno arbitrario $U_0(x_0)$ del punto $x_0$ y se agrega en la definición 9 la condición complementaria, que consiste en que todos los entornos $U(x_0)$, cuya existencia se afirmaba allí, deben además estar contenidas en el entorno $U_0(x_0)$:

$$U(x_0) \subset U_0(x_0),$$

entonces se obtiene una definición equivalente a la inicial. En efecto, si la condición (5.23) se cumple para cierto entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$, entonces se cumple también para cualquier entorno de este punto contenido en él.

Para concluir, señalemos que por límite de una función en un punto dado, usualmente se entiende un límite finito, si no se ha dicho otra cosa, y por $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0)$, cuando no se ha dicho nada sobre el conjunto por el cual se toma el límite, se denota el límite, finito o infinito, por todo el conjunto de definición de la función $f$.

*Ejercicio 25. Demuéstrese que si* $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geqslant 1$, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \infty$.

La definición de límite de una función en un punto, sin mayor esfuerzo, puede ser generalizada también para las funciones cuyos conjuntos de sus valores, así como los conjuntos de definición pertenecen al conjunto extendido de los números reales $\overline{R}$, es decir, para las funciones de la forma $f\colon X \to \overline{R}$, $X \subset \overline{R}$. El lector en caso de necesidad puede enunciar las definiciones correspondientes por sí mismo.

## 5.8. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN POR LA UNIÓN DE CONJUNTOS

Ya sabemos que si la función $f\colon X \to R$ tiene límite en el punto $x_0$, que es punto adherente del conjunto $E \subset X$, entonces tiene el mismo límite en este punto también por conjunto $E$ (véase el lema 1 en el p. 5.4). Demostremos una propiedad sencilla, pero útil en el futuro, de los límites de funciones por los conjuntos.

**Lema 5.** *Sean $f\colon X \to R$, $X_1 \subset X$, $X_2 \subset X$ y $x_0$ un punto adherente de los conjuntos $X_1 \neq \varnothing$ y $X_2 \neq \varnothing$. Entonces, si la función $f$ para $x \to x_0$ tiene límites, finitos o infinitos, por los conjuntos $X_1$ y $X_2$ y además ellos son iguales*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_2}} f(x) = a, \tag{5.31}$$

*entonces tiene el mismo límite por el conjunto $X_1 \cup X_2$:*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1 \cup X_2}} f(x) = a. \tag{5.32}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la igualdad (5.31), para cualquier entorno $U(a, \varepsilon)$ del punto $a$, existen entornos $U(x_0, \delta_1)$ y $U(x_0, \delta_2)$ del punto $x_0$ tales que

$$f(X_1 \cap U(x_0, \delta_1) \subset U(a, \varepsilon), f(X_2 \cap U(x_0, \delta_2)) \subset U(a, \varepsilon). \tag{5.33}$$

Sea

$$\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\},$$

entonces

$$U(x_0, \delta) \subset U(x_0, \delta_1) \text{ y } U(x_0, \delta) \subset U(x_0, \delta_2),$$

y por esto

$$(X_1 \cup X_2) \cap U(x_0, \delta) = (X_1 \cap U(x_0, \delta)) \cup (X_2 \cap$$
$$\cap\, U(x_0, \delta)) \subset (X_1 \cap U(x_0, \delta_1)) \cup (X_2 \cap U(x_0, \delta_2)).$$

Por consiguiente, por (5.33):

$$f((X_1 \cup X_2) \cap U(x_0, \delta)) \subset f(X_1 \cap U(x_0, \delta_1)) \cup f(X_2 \cap U(x_0, \delta_2)) \subset U(a, \varepsilon).$$

Esto significa, por la definición 9, el cumplimiento de las condiciones (5.32). □

Ejemplo. Si $\{x_n\}$ es una sucesión tal que $\lim\limits_{k \to \infty} x_{2k} = \lim\limits_{k \to \infty} x_{2k-1} = a$ y $a$ es un número real o bien uno de los infinitos $\infty$, $+\infty$ o $-\infty$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Esto se deduce directamente del lema 5 si analizamos la función $f(n) = x_n$, $n \in N$, y hacemos $X_1 = \{2k\}$, $X_2 = \{2k - 1\}$, $k = 1, 2, \ldots$ .

## 5.9. LÍMITES UNILATERALES Y CONTINUIDAD UNILATERAL

En el estudio de las funciones, a veces resulta útil el análisis de los límites de sus restricciones sobre los conjuntos correspondientes al caso particular cuando estos conjuntos son partes de los conjuntos de definición de las funciones dadas, que están por un lado del punto, en el cual se analiza el límite. Estos límites se llaman *límites unilaterales.* Este concepto tiene sentido sólo cuando en realidad existen los conjuntos que están por lados diferentes del punto $x_0$, en el cual se analiza el límite. En el caso cuando el punto $x_0$ es uno de los infinitos $\infty$, $+\infty$ o $-\infty$, esto, a ciencia cierta, no es posible. Por esto, en el presente punto, en el futuro supondremos siempre que $x_0$ es un número real: $x_0 \in R$. Introduzcamos para simplificar la escritura algunas notaciones.

Para cualquier conjunto $X \in R$ y para $x_0 \in R$ haremos:

$$X_-(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x : x \in X, x \leqslant x_0\},$$

$$X_+(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x : x \ni X, x \geqslant x_0\}.$$

Dicho de otro modo, el conjunto $X_+(x_0)$, respectivamente $X_-(x_0)$, es la intersección del conjunto $X$ con el rayo cerrado del eje numérico, cuyo vértice es el punto $x_0$ y que está dirigido en el sentido positivo, respectivamente negativo.

**Definición 10.** *Sea $f: X \to R$ y $x_0 \in R$. El punto $a$ se llama límite de la función $f$ por la izquierda, respectivamente por la derecha, cuando $x \to x_0$, si es límite de la* *función $f$ para $x \to x_0$ por el conjunto $X_-(x_0)$, es decir,*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_-(x_0)}} f(x) = a,$$

*respectivamente, por el conjunto $X_+(x_0)$, es decir*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_+(x_0)}} f(x) = a.$$

Para los límites por la izquierda y por la derecha de la función $f$ por el conjunto $X \setminus \{x_0\}$ se tienen notaciones especiales: el límite por la izquierda se denota por $f(x_0 - 0)$ o $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ y el límite por la derecha por $f(x_0 + 0)$ o $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. De esta forma,

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \subset X_-(x_0) \setminus \{x_0\}}} f(x),$$

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_+(x_0) \setminus \{x_0\}}} f(x).$$

Si $x_0 = 0$, entonces en lugar de $0 + 0$, respectivamente, en lugar de $0 - 0$, tanto en el caso de los límites de las funciones, como en el caso de los límites de las sucesiones (véase el p. 4.1), se escribe simplemente $+0$, respectivamente $-0$.

Los límites por la izquierda y por la derecha se llaman límites unilaterales. Si el punto $x_0$ es la cota superior para el conjunto $X_-(x_0) \setminus \{x_0\}$ y la cota inferior para $X_+(x_0) \setminus \{x_0\}$ ($X$ es el conjunto de definición de la función $f$):

$$x_0 = \sup(X_-(x_0) \setminus \{x_0\}) = \inf(X_+(x_0) \setminus \{x_0\}),$$

entonces el límite común de la función $f$ cuando $x \to x_0$ se llama también límite bilateral.

En calidad de ejemplo analicemos la función $y = \operatorname{sign} x$ (véase el ejemplo en el p. 5.2 y fig. 17). Sean $x_n > 0$, $x_n' < 0$, $n = 1, 2, \ldots$ y $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} x_n' = 0$. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{sign} x_n = \lim_{n \to \infty} 1 = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \operatorname{sign} x_n' = \lim_{n \to \infty} (-1) = -1.$$

Esto significa que

$$\lim_{x \to +0} \operatorname{sign} x = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -0} \operatorname{sign} x = -1.$$

El concepto de límite por la izquierda, respectivamente por la derecha, cuando $x \to x_0$ (como en general, el concepto de límite en un punto) tiene sentido sólo cuando $x_0$ es un punto de adherencia del conjunto por el cual se toma el límite, en el caso dado, del conjunto $X_-(x_0)$, respectivamente del conjunto $X_+(x_0)$. Por cuanto cada uno de estos conjuntos está por un lado del punto $x_0$, entonces él es su punto de adherencia si y sólo si

$$x_0 = \sup X_-(x_0)$$

y respectivamente

$$x_0 = \inf X_+(x_0).$$

**Teorema 2.** *La función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ tiene límite en el punto $x_0 = \sup X_-(x_0) = \inf X_+(x_0)$, $X_-(x_0) \neq \varnothing$, $X_+(x_0) \neq \varnothing$ si y sólo si en este punto existen los límites de la función $f$ tanto por la izquierda como por la derecha y son iguales. En este caso, su valor común es el límite de la función en el punto $x_0$.*

**Corolario.** *Para que la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ tenga el límite bilateral por el conjunto $X \setminus \{x_0\}$ en el punto $x_0$ es necesario y suficiente que existan y sean iguales entre sí los límites unilaterales $f(x_0 - 0)$ y $f(x_0 + 0)$.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. En realidad, sea $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, $x_0 = \sup X_-(x_0) = \inf X_+(x_0)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, es decir, para la función $f$ existe el límite (por el conjunto $X$) en el punto $x_0$. Pero entonces, en este punto, ese mismo límite existe para la restricción por cualquier conjunto (véase el lema 1 en el p. 5.4), en particular, por los conjuntos $X_-(x_0)$ y $X_+(x_0)$, es decir, existen ambos límites unilaterales cuando $x \to x_0$ y son iguales a $a$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_-(x_0)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_+(x_0)}} f(x) = a. \tag{5.34}$$

Supongamos, por el contrario, que en el punto $x_0 = \sup X_-(x_0) = \inf X_+(x_0)$ se cumple la condición (5.34). Entonces, por cuanto $X = X_-(x_0) \cup X_+(x_0)$, entonces por el lema 5 existe el límite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x)$ y es igual a $a$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = a.$$

Para convencerse de la validez del corolario es suficiente aplicar el teorema 2 a la restricción de la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ sobre el conjunto $X \setminus \{x_0\}$.

Si uno de los límites unilaterales de la función en cierto punto coincide con el valor de la función en este punto, entonces tal función se llama continua unilateralmente en el punto analizado. Enunciemos esta definición más detalladamente.

**Definición 11.** *La función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ se llama continua por la izquierda, respectivamente por la derecha, en el punto $x_0 \in X$, si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_-(x_0)}} f(x) = f(x_0),$$

*respectivamente, si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_+(x_0)}} f(x) = f(x_0).$$

Ejemplo. Analicemos la función definida sobre todo el eje numérico e igual, para cada número real $x$, al mayor entero que sea menor o igual que $x$. Esta función tiene una notación especial $y = [x]$ y se lee "y es la parte entera de $x$" o "y es igual a entier $x$" *). Su gráfica se representa en la fig. 22. La función $[x]$ en los puntos ente-

*) entier, entero (del francés).

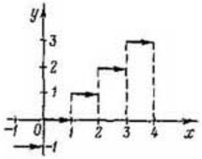



FIG. 22

ros $x = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, de la recta numérica es continua por la derecha y descontinua por la izquierda. En todos los otros puntos es contínua tanto por la derecha como por la izquierda. De esta forma, en particular, la función $[x]$ es continua por la derecha en todos los puntos del eje numérico.

OBSERVACIÓN. Si para la función $f\colon X \to R$ existe el límite finito $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, y además, para todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad $f(x) < a$ (respectivamente, la desigualdad $f(x) > a$), entonces se escribe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a - 0$ (respectivamente, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a + 0$). En este caso, si $a = 0$, entonces, en lugar de $0 + 0$ y $0 - 0$ se escribe simplemente $+0$ y $-0$.

## 5.10. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES DE LAS FUNCIONES

Todas las funciones analizadas en este punto están definidas sobre cierto conjunto $X \subset R$ y todos sus límites se toman por el conjunto $X$ en cierto punto $x_0$, que es un punto de adherencia (finito o infinitamente alejado) del conjunto $X$. Recordemos que $x_0$ es un número real: $x_0 \in R$, entonces $x_0$ es un punto común de adherencia del conjunto $X$. Si $x_0 = \infty$, entonces el conjunto $X$ no está acotado, y si $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$, entonces el conjunto $X$ no está acotado superior, respectivamente inferiormente.

1°. *Si la función $f\colon X \to R$ tiene límite finito en el punto $x_0$, entonces existe un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ tal que la función $f$ está acotada sobre la intersección $U(x_0) \cap X$ de este entorno con el conjunto de definición $X$ de la función $f$.*

**Corolario.** *La función $f\colon X \to R$ continua en el punto $x_0 \in X$ está acotada sobre la intersección de cierto entorno de este punto con el conjunto $X$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ un límite finito, entonces por la definición del p. 5, para cualquier $\varepsilon > 0$, en particular para $\varepsilon = 1$, existe un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ tal que $f(X \cap U(x_0)) \subset U(a, 1)$, es decir, para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la inclusión $f(x) \in U(a, 1)$. Dicho de otro modo, para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ es válida la desigualdad

$$a - 1 < f(x) < a + 1,$$

y esto significa que la función $f$ está acotada sobre la intersección $X \cap U(x_0)$. □

El corolario se deriva directamente de la afirmación demostrada, ya que la continuidad de la función en el punto es un caso particular de la existencia del límite finito en el punto.

2 °. **(Lema sobre la conservación del signo).** *Si la función $f\colon X \to R$ tiene en el punto $x_0$ límite diferente de cero: $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, entonces existen un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ y el número $c > 0$ tales que para todos los puntos $x$ del dominio $X$ de la función $f$ que pertenecen al entorno $U(x_0)$, es decir, para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la desigualdad*

$$\begin{aligned} &f(x) > c \quad \text{si} \quad a > 0, \\ &f(x) < -c \quad \text{si} \quad a < 0. \end{aligned} \tag{5.35}$$

**Corolario 1.** *Si la función $f\colon X \to R$ es continua en el punto $x_0 \in X$ y $f(x_0) \neq 0$, entonces existen un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$* y una constante c $> 0$ *tales que para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la desigualdad*

$$\begin{aligned} &f(x) > c \quad \text{si} \quad f(x_0) > 0, \\ &f(x) < -c \quad \text{si} \quad f(x_0) < 0. \end{aligned} \tag{5.36}$$

**Corolario 2.** *Si la función $f\colon X \to R$ es continua en el punto $x_0 \in X$ y $f(x_0) > c$ (respectivamente, $f(x_0) < c$), entonces existe un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ tal que para todos los puntos $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la desigualdad $f(x) > c$ (respectivamente, $f(x) < c$).*

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 2 °. Sea $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in R$ y $a \neq 0$. Entonces, por la definición de límite, para cualquier $\varepsilon > 0$, en particular, para $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ tal que para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la inclusión $f(x) \in U\left(a, \dfrac{|a|}{2}\right)$, es decir, es válida la desigualdad

$$a - \frac{|a|}{2} < f(x) < a + \frac{|a|}{2}.$$

Dicho de otro modo, cuando $a > 0$:

$$f(x) > a - \frac{|a|}{2} = \frac{a}{2} > 0$$

y cuando $a < 0$;

$$f(x) < a + \frac{|a|}{2} = -|a| + \frac{|a|}{2} = -\frac{|a|}{2} < 0.$$

De esta forma, la desigualdad (5.35) se cumple para $c = \dfrac{|a|}{2}$.

El corolario 1 se deriva de la afirmación demostrada, ya que en el caso de la continuidad de la función $f$ en el punto $x_0$ su límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ es finito e igual a $f(x_0)$. Como se ve de la demostración, en calidad de constante $c$, en este caso se puede tomar $c = \dfrac{|f(x_0)|}{2}$.

Para obtener la afirmación del corolario 2 es suficiente aplicar el corolario 1 a la función $f(x) - c$, la cual, como es fácil ver, también es continua en el punto $x_0$.

OBSERVACIÓN. Si en el punto $x_0$ la función $f: X \to R$ tiene el límite infinito igual a $\infty$, $+\infty$ o $-\infty$, entonces, para cualquier $c > 0$ tiene lugar la afirmación análoga a la propiedad 2°. Esto se deduce directamente de la definición de límite infinito enunciada en términos de desigualdades. Precisamente, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (respectivamente, $+\infty$ o $-\infty$) significa que para cualquier $c > 0$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ tal que para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la desigualdad $|f(x)| > c$ (respectivamente, la desigualdad $f(x) > c$ o $f(x) < -c$).

3°. *Si $f(x) = c$ es una constante $x \in X$, entonces* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

4°. *Si $f(x) \geqslant a$, $x \in X$, y existe el límite finito o infinito de signo determinado* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *entonces*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geqslant a. \tag{5.37}$$

5°. *Si $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$, $x \in X$, y existen los límites finitos o infinitos de signo determinado* $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = a$, *entonces*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a. \tag{5.38}$$

6°. *Si existen los límites finitos* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ *entonces existen también los límites finitos* $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\, g(x)$ *y si* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, *entonces existe el límite* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *además*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x), \tag{5.39}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x), \tag{5.40}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}. \tag{5.41}$$

**Corolario 1.** *Si existe el límite finito* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *entonces para cualquier número* $c \in R$ *existe el límite* $\lim\limits_{x \to x_0} cf(x)$ *y además*

$$\lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x). \tag{5.42}$$

En el caso $c \neq 0$ la igualdad (5.42) es válida para los límites infinitos de signo determinado.

**Corolario 2.** *Si las funciones $f$ y $g$ son continuas en el punto $x_0 \in X$, entonces las funciones $cf$ ($c$ es una constante), $f + g$, $fg$ y, si además $g(x_0) \neq 0$, también la función $\dfrac{f}{g}$ son continuas en el punto $x_0$.*

Observemos que según las suposiciones enunciadas en la afirmación 6 y su corolario 2, el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$, naturalmente, puede no estar definido sobre todo el conjunto $X$ inicial, ya que en él pueden existir puntos $x$ en los cuales $g(x) = 0$. No obstante, por la propiedad 2, de la condición $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ se deduce que existe un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ sobre la intersección del cual con el conjunto $X$ se cumple la desigualdad $g(x) \neq 0$ y por consiguiente, sobre esta intersección ya está definido el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$. En la fórmula (5.41) por límite se sobrentiende el límite de la restricción de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$ sobre el conjunto $U(x_0) \cap X$. Puesto que el límite de la función en el punto es una propiedad local (véase el p. 5.4 y el p. 5.7), este límite no depende de la elección del entorno $U(x_0)$ indicado.

Las propiedades 3 ° — 6 ° pueden ser demostradas con un método único, basado en las propiedades correspondientes de los límites de las sucesiones (véase el p. 4.9).

Demostremos, por ejemplo, la fórmula (5.40). Sea $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y $b = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Entonces, por la definición 15 de límite de una función (véase el p. 5.9), para cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ son válidas las igualdades

$$a = \lim_{n \to \infty} f(x_n), \quad b = \lim_{n \to \infty} g(x_n).$$

Por esto, recordando que el límite del producto de sucesiones convergentes existe y es igual al producto de sus límites (véase el p. 4.9), obtendremos que existe el límite

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n)\, g(x_n) = ab. \tag{5.43}$$

Por cuanto este límite, siendo igual a $ab$, no depende de la elección de la sucesión $\{x_n\}$ indicada, entonces, por la misma definición 15, la igualdad (5.43) demostrada significa que

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = ab = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x). \ \square$$

El corolario 1 por la propiedad 3 es un caso particular de la fórmula (5.40). El corolario 2 se deriva directamente de la propiedad 6, por cuanto la continuidad de una función en el punto significa la existencia del límite finito para ella en este punto, igual al valor de la función en este punto. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0)\, g(x_0), \tag{5.44}$$

ya que los límites $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ por la continuidad de las funciones $f$ y $g$ en el punto $x_0$ son iguales a $f(x_0)$ y $g(x_0)$, respectivamente. El cumplimiento de la igualdad (5.44) significa que el producto $fg$ es continuo en el punto $x_0$.

## 5.11. FUNCIONES INFINITAMENTE PEQUEÑAS E INFINITAMENTE GRANDES

Supondremos que todas las funciones analizadas en este punto están definidas sobre el conjunto $X \subset R$ y analizaremos sus límites finitos o infinitos cuando el argumento tiende a un punto $x_0$ finito o infinitamente alejado.

**Definición 12.** *La función $\alpha: X \to R$ se llama infinitamente pequeña (infinitesimal) para $x \to x_0$, si*

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0. \tag{5.45}$$

Las funciones infinitamente pequeñas juegan un papel singular entre todas las funciones que tienen límite, relacionado, en particular, con que el concepto general de límite finito puede ser reducido al concepto de un infinitésimo. Enunciemos esta afirmación en forma de lema.

**Lema 6.** *El límite finito $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe y es igual a $a$ si y sólo si $f(x) = a + \alpha(x)$, $x \in X$, donde $\alpha = \alpha(x)$ es un infinitésimo cuando $x \to x_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, entonces, haciendo $\alpha(x) = f(x) - a$, $x \in X$, obtendremos que $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - a = a - a = 0$.

Viceversa, si $f(x) = a + \alpha(x)$, $x \in X$ y $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a + \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = a$. □

**Teorema 3.** *La suma y el producto de un número finito de infinitésimos para $x \to x_0$ y también el producto de un infinitésimo para $x \to x_0$ por una función acotada sobre $X$ son infinitésimos cuando $x \to x_0$.*

DEMOSTRACIÓN. El hecho de que la suma y el producto de un número finito de infinitésimos son infinitésimos se deduce directamente de la propiedad de la suma y del producto de los límites de las funciones (véase la propiedad 6 en el p. 5.10), en el particular cuando estos límites son iguales a cero.

Demostremos la última afirmación del teorema. Sean $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ y $f(x)$ una función acotada, es decir, existe una constante $b > 0$ tal que para todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad $|f(x)| \leqslant b$. Si $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, es una sucesión tal que $\lim\limits_{n \to x_0} x_n = 0$, entonces por la definición 15 de límite de una función (véase el p. 5.9) tendremos $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha(x_n) = 0$. Por cuanto para todos los $n = 1, 2, \cdots$ se cumple la desigualdad $|f(x_n)| \leqslant b$, entonces la sucesión $\{f(x_n)\}$ está acotada. Pero el producto de una sucesión infinitesimal, en el caso dado de la sucesión $\{\alpha(x_n)\}$, por una sucesión acotada, en el caso dado por $\{f(x_n)\}$, es una sucesión infinitesimal (véase la propiedad 2 ° en el p. 4.8), por eso $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)\alpha(x_n) = 0$. Por cuanto esto es cierto para cualquier sucesión $\{x_n\}$ indicada, entonces, por la definición de límite de una función, obtendremos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\alpha(x) = 0$ y esto significa que la función $f(x)\alpha(x)$ es infinitamente pequeña cuando $x \to x_0$. □

Junto con las funciones infinitamente pequeñas, en el análisis, a menudo se encuentran las funciones infinitamente grandes. Definámoslas.

**Definición 13.** *La función $f: X \to R$ se llama infinitamente grande (infinita) para $x \to x_0$ si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty. \tag{5.46}$$

Entre las funciones infinitas e infinitesimales existe una estrecha relación. Precisamente, la magnitud inversa a una función infinita es infinitesimal y viceversa. Más exactamente, son válidas las siguientes afirmaciones.

**Lema 7.** *Si la función $f: X \to R$ es infinitamente grande para $x \to x_0$, entonces la función $\frac{1}{f}$ es infinitamente pequeña para $x \to x_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces, por la condición $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, existe un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ tal que para todos los puntos $x \in U(x_0) \cap X$ se cumple la desigualdad

$$|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$$

y por consiguiente, la desigualdad

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon.$$

Esto significa que $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$, es decir, que la función $\frac{1}{f(x)}$ es infinitesimal.

OBSERVACIÓN 1. Como siempre, cuando se habla de un cociente de funciones con un denominador que tiene límite diferente de cero, aquí por $\frac{1}{f(x)}$ se entiende, en general, el cociente de la división de 1 por la restricción de la función $f$ sobre la intersección $U(x_0) \cap X$ del entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ con el dominio $X$ de la función $f$ tal que para todos los puntos $x \in U(x_0) \cap X$ la función $f$ es diferente de cero. La existencia del entorno $U(x_0)$ indicado se deriva de la propiedad 2 de los límites de las funciones (véase el p. 5.10). Es más, esto fue obtenido otra vez en el proceso de demostración del lema 9: evidentemente de la condición $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, se deduce que $f(x) \neq 0$.

OBSERVACIÓN 2. Si al contrario $\alpha(x)$ es una función infinitamente pequeña para $x \to x_0$, entonces la magnitud inversa $\frac{1}{\alpha(x)}$, puede resultar que no estará definida sobre un conjunto para el cual el punto $x_0$ será un punto de adherencia (por ejemplo, a ciencia cierta, esto ocurre cuando $\alpha(x) \equiv 0$ sobre $X$) por esto, el concepto de $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\alpha(x)}$ cuando $x \in X$ no tendrá sentido. No obstante, si $X_0$ es un subconjunto del conjunto $X$ sobre el cual $\alpha(x) \neq 0$:

$$X_0 = \{x: x \in X,\ \alpha(x) \neq 0\}$$

y si $x_0$ es un punto de adherencia del conjunto $X_0$, entonces la función $\frac{1}{\alpha(x)}$ está definida sobre $X_0$ y sobre este conjunto

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_0}} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty.$$

Precisamente en este caso, se dice que la función inversa a una infinitamente pequeña es infinitamente grande.

El hecho de que la función inversa a una infinitamente pequeña es infinitamente grande y viceversa, hace naturales las siguientes notaciones simbólicas que se utilizan a menudo para abreviar la escritura: para cualquier número $a > 0$ se escribe

$$\frac{a}{+0} = +\infty, \ \frac{a}{-0} = -\infty, \ \frac{a}{0} = \infty, \ \frac{a}{+\infty} = +0, \ \frac{a}{-\infty} = -0, \ \frac{a}{\infty} = 0. \qquad (5.47)$$

OBSERVACIÓN 3. Las propiedades de los límites finitos relacionadas con las operaciones aritméticas sobre los límites (véase la propiedad 6 en el p. 5.10) no se trasladan directamente a las funciones infinitamente grandes. No obstante, algunas analogías tienen lugar.

Por ejemplo, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$. No obstante, sobre la existencia de cualquier límite $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)]$, en general, aquí no se puede afirmar nada. Se puede mostrar que las afirmaciones positivas sobre los límites infinitos tienen lugar en los casos para los cuales fueron definidas algunas "operaciones aritméticas" con infinitos por las fórmulas (5.47) y en el p. 3.1.

## 5.12. DIFERENTES FORMAS DE ESCRITURA DE LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

La condición de continuidad de la función $f$ dada sobre el conjunto $X$ en el punto $x_0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (5.18)$$

se puede entender tanto en el sentido de la definición de límite de una función según Heine (véase la definición 1 en el p. 5.4) como en el sentido de la definición según Cauchy (véase la definición 9 en el p. 5.7). En el primer caso esto significa que para cualquier sucesión

$$x_n \in X, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \qquad (5.48)$$

se cumple la condición

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0). \qquad (5.49)$$

En el segundo caso, que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos los puntos $x$ que satisfacen la condición

$$|x - x_0| < \delta, \quad x \in X \qquad (5.50)$$

se cumple la desigualdad (fig. 23).

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \qquad (5.51)$$

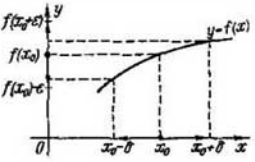



FIG. 23

El concepto de continuidad de una función enunciada en términos de sucesiones (definición (5.48) — (5.49)) representa la circunstancia que a menudo se encuentra en la práctica y que consiste en que en la medición indirecta de cierto valor $y_0$ de una magnitud $y$ con ayuda del parámetro $x$, del cual depende continuamente esta magnitud: $y = f(x)$, se tiene la seguridad objetiva de que cuanto más exactamente obtengamos (como consecuencia de experimentos cualesquiera, mediciones o cálculos) sucesivamente los valores $x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, que acercan los valores del parámetro $x_0$ al cual corresponde el valor $y_0$, más exactamente se obtendrán los valores aproximados correspondientes $y_n = f(x_n)$ de la magnitud $y_0 = f(x_0)$.

La definición (5.50) — (5.51) de continuidad de una función $f$ en el punto $x_0$ se puede aún parafrasear de la forma: la función $f$ es continua en el punto $x_0$ si cualquiera que sea el grado de exactitud dado $\varepsilon > 0$ para los valores de la función $f$, existe tal grado de exactitud $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ para el argumento, que en cuanto tomemos el valor del argumento $x$ igual a $x_0$ con exactitud $\delta$, es decir, que satisface la condición (5.50), y tomemos en él el valor de la función $f$, entonces obtendremos el valor $f(x_0)$ con el grado de exactitud dado, es decir, se cumplirá la desigualdad (5.51). Lo dicho, naturalmente, es una paráfrasis literaria de la definición (5.50) — (5.51), que aclara la representación intuitiva sobre una función continua.

Por cuanto la continuidad de una función en un punto es un caso particular de la existencia del límite de una función, entonces la definición de continuidad de una función en un punto se puede dar en términos de entornos, sólo hace falta agregarle a la condición (5.20) la exigencia: $x_0 \in X$. De esta forma, la función $f$ definida sobre el conjunto $X$ es continua en el punto si para cualquier entorno $U(y_0)$ del punto $y_0 = f(x_0)$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ tal que se cumple la inclusión

$$f(U(x_0) \cap X) \subset U(y_0), \quad x_0 \in X. \tag{5.52}$$

Finalmente, trasladando la constante $f(x_0)$ en la igualdad (5.18) al segundo miembro, incluyéndola bajo el signo del límite y observando que la notación $x \to x_0$ en el límite de la función es equivalente a la notación $x - x_0 \to 0$ (véase el p. 5.4), obtendremos

$$\lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \tag{5.53}$$

La diferencia $x - x_0$ se llama *incremento del argumento* y se denota por $\Delta x$, y la diferencia $f(x) - f(x_0)$, *incremento de la función* $y = f(x)$ correspondiente al incremento dado del argumento $\Delta x$ y se denota por $\Delta y$. De esta forma,

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad x_0 \in X, \quad x \in X. \tag{5.54}$$

En esta notación, la igualdad (5.50) se transcribe de la forma

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \tag{5.55}$$

es decir, dicho descriptivamente, la continuidad de una función en un punto significa que a un incremento infinitamente pequeño del argumento le corresponde un incremento infinitamente pequeño de la función.

Ejemplos. 1. La función $f(x) = c$, donde $c$ es una constante, es continua sobre toda la recta numérica.

En realidad, para cualquier $x_0 \in \boldsymbol{R}$ tiene lugar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c = f(x_0). \ \square$$

2. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en cada punto $x_0 \neq 0$.

En realidad,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x_0}{(x_0 + \Delta x)x_0},$$

de donde para $x_0 \neq 0$ tenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0} = -\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (x_0 + \Delta x)x_0} = -\frac{0}{x_0^2} = 0.$$

Esto, por (5.52) significa la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el punto $x_0 \neq 0$. $\square$

3. La función $f(x) = |\operatorname{sign} x|$ (véase la fig. 20) no es continua en el punto $x_0 = 0$, ya que el límite de esta función (por todo el eje numérico) en el punto $x_0 = 0$ simplemente no existe (véase el ejemplo 4 en el p. 5.4).

Ejercicios. 26. Aclárese con qué grado de exactitud es suficiente dar los valores del argumento de la función $x^3$ en un punto $x_0$ dado para obtener el valor de la función con un grado de exactitud $\varepsilon > 0$ dado.

27. Aclárese si la función

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{x} & \text{para} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua en el punto $x = 0$.

## 5.13. CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS DE DISCONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

**Definición 14.** *Supongamos que la función $f$ está definida en cierto entorno del punto $x_0$ excepto, posiblemente, del propio punto.*

*El punto $x_0$ se llama punto de discontinuidad de la función $f$ si la función $f$ no está definida en el punto $x_0$ o si está definida en este punto pero no es continua en él.*

Ejercicio 28. Enúnciese en sentido positivo la definición de punto de discontinuidad de una función.

**Definición 15.** *Si $x_0$ es un punto de discontinuidad de la función $f$ y existen los límites unilaterales finitos* [*)]

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

*entonces el punto $x_0$ se llama punto de discontinuidad de primer género.*

La magnitud $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ se llama *salto de la función $f$* en el punto $x_0$. Si el salto de la función $f$ en el punto de discontinuidad $x_0$ es igual a cero, es decir, $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, entonces $x_0$ se llama *punto de discontinuidad evitable*.

El último término está justificado con que si en este caso se define de nuevo o se define la función $f$ (si la función $f$ no estaba definida en el punto $x_0$) haciendo

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0), \tag{5.56}$$

entonces se obtendrá una función continua en el punto $x_0$.

En efecto, mostremos que si para la función $f\colon X \to R$ se cumple la condición (5.56), entonces es continua en el punto $x_0$. Hagamos $X_1 = X \setminus \{x_0\}$ y $X_2 = \{x_0\}$. Por el teorema 2 del p. 5.9 de la igualdad $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ se deduce que en el punto $x_0$ existe el límite de la función $f$ por el conjunto $X_1$, y además, por la condición (5.56) es igual a $f(x_0)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1}} f(x) = f(x_0).$$

Por otro lado, el límite de la función $f$ cuando $x \to x_0$ por el conjunto $X_2 = \{x_0\}$ de un solo punto, evidentemente es igual a $f(x_0)$ (el límite de una constante es igual a esta propia constante):

$$\lim_{x \to x_0,\, x \in X_2} f(x) = f(x_0).$$

Por esto, por el lema 5 del p. 5.8, para $x \to x_0$ la función $f$ tiene el límite igual a $f(x_0)$ por el conjunto $X = X_1 \cup X_2$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Esto significa que la función $f$ es continua en el punto $x_0$.

El punto de discontinuidad de una función que no sea punto de discontinuidad de primer género se llama punto de discontinuidad de segundo género.

Es evidente que en los puntos de discontinuidad de segundo género al menos uno de los límites $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ o $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ no existe. Aquí, por límite, como comúnmente se hace, se entiende sólo límite finito.

Ejercicio 29. Enúnciese en sentido positivo la definición de punto de discontinuidad de segundo género.

Las funciones $\operatorname{sign} x$ (véase la fig. 17 en el p. 5.2) y $|\operatorname{sign} x|$ (véase la fig. 20 en el p. 5.4) tienen en el punto $x_0 = 0$ discontinuidad de primer género y además, para la

[*)] Recordemos que límites unilaterales $f(x_0 - 0)$ y $f(x_0 + 0)$ se toman por el conjunto que no contiene el propio punto $x_0$.

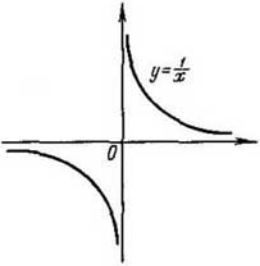



FIG. 24

función $|\operatorname{sign} x|$ es una discontinuidad evitable y las funciones $\frac{1}{x}$ (fig. 24) y sen $\frac{1}{x}$ (fig. 19 en el p. 5.4) en el punto $x_0 = 0$ tienen discontinuidad de segundo género.

## 5.14. LÍMITES DE LAS FUNCIONES MONÓTONAS

**Definición 16.** *La función $f\colon X \to R$, $X \subset R$ se llama creciente (decreciente) sobre el conjunto $X$ si para cualesquiera $x_1 \in X$ y $x_2 \in X$ tales que $x_1 < x_2$, se cumple la desigualdad $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (respectivamente, la desigualdad $f(x_1) \geqslant \geqslant f(x_2)$).*

Las funciones crecientes (decrecientes) se llaman también no decrecientes (respectivamente no crecientes).

Si la función es creciente (decreciente) sobre el conjunto $X$, entonces también se dice que crece (decrece) sobre este conjunto.

Si la función $f$ crece (decrece) sobre el conjunto $X$, entonces la función $-f$ obtenida de $f$ con un cambio de signo para todos sus valores, es decir,

$$(-f)(x) \overset{\text{def}}{=} -f(x), \quad x \in X,$$

es una función decreciente (creciente) sobre el conjunto $X$.

Las funciones crecientes y decrecientes sobre el conjunto $X$ se llaman monótonas sobre este conjunto.

**Teorema 4.** *Supongamos que la función $f\colon X \to R$ crece sobre el conjunto $X$, $\alpha = \inf X$, $\beta = \sup X$ y además $\alpha \notin X$, $\beta \notin X$, entonces para la función $f$ en el punto $\alpha$ existe el límite por la derecha y*

$$\lim_{x \to \alpha + 0} f(x) = \inf_{x \in X} f(x)$$

*y en el punto $\beta$, el límite por la izquierda y*

$$\lim_{x \to \beta - 0} f(x) = \sup_{x \in X} f(x).$$

De esta forma, si en las condiciones del teorema la función $f$ está acotada superiormente, entonces en el punto $\beta$ para ella existe el límite finito por la izquierda, y si $f$ no está acotada superiormente, entonces $\lim\limits_{x \to \beta - 0} f(x) = +\infty$.

Por analogía, si la función $f$ está acotada inferiormente, entonces en el punto $\alpha$ para ella existe el límite finito por la derecha y si $f$ no está acotada inferiormente, entonces $\lim\limits_{x \to \alpha + 0} f(x) = -\infty$.

Afirmaciones semejantes son válidas también para las funciones decrecientes, que se pueden obtener pasando de la función $f$ a la función $-f$.

**Corolario.** *Si la función $f$ es monótona sobre el conjunto $X$, $x_0 \in \boldsymbol{R}$, los conjuntos $X_<(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x \in X, x < x_0\}$ y $X_>(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x \in X, x > x_0\}$ son no vacíos, y $x_0$ es un punto de adherencia de cada uno de ellos, entonces en el punto $x_0$ existen los límites unilaterales finitos*

$$f(x_0 - 0) = \sup_{X_>(x_0)} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_0 + 0) = \inf_{X_>(x_0)} f(x), \tag{5.57}$$

*además, en el caso de una función creciente*

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0 + 0) \tag{5.58}$$

*y en el caso de una decreciente*

$$f(x_0 - 0) \geqslant f(x_0 + 0). \tag{5.59}$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Sea

$$b = \sup_{x \in X} f(x) \leqslant +\infty$$

y $\beta = \sup X$, $\beta \notin X$. Demos un entorno arbitrario $U(b)$ del punto $b$ y sean $\eta$ su extremo izquierdo. Evidentemente

$$\eta < b$$

y por esto, por la definición de cota superior de una función existe un punto $\xi \in X$ tal que

$$f(\xi) > \eta, \tag{5.60}$$

además, por las condiciones $\xi \in X$, $\beta = \sup X$ y $\beta \notin X$ tendremos

$$\xi < \beta.$$

Denotemos por $U(\beta)$ el entorno del punto $\beta$ para el cual $\xi$ es el extremo izquierdo (es decir, si $\beta$ es un número real, entonces es el extremo izquierdo del intervalo $U(\beta, \varepsilon) = (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$, $\varepsilon = \beta - \xi$, y si $\beta = +\infty$, entonces es el extremo izquierdo del intervalo semiabierto infinito $(\xi, +\infty]$). Entonces para cualquier punto

$$x \in X \cap U(\beta) \tag{5.61}$$

tiene lugar la desigualdad (fig. 25)

$$\xi < x$$

y por consiguiente, en virtud del crecimiento de la función $f$, la desigualdad

$$f(\xi) \leqslant f(x).$$

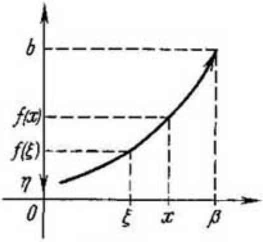



FIG. 25

Por esto, para todos los $x$ que satisfacen la condición (5.61) tendremos (véase (5.60))

$$\eta < f(x) \leqslant \sup_X f(x) = b. \tag{5.62}$$

Recordando que el punto $\eta$ es el extremo izquierdo del entorno $U(b)$ del punto $b$, obtendremos de (5.62) la inclusión

$$f(x) \in U(b).$$

De esta forma, para cualquier entorno $U(b)$ del punto $b$ existe un entorno $U(\beta)$ del punto $\beta$ tal que en cuanto $x \in X \cap U(\beta)$, se cumple la inclusión $f(x) \in U(\beta)$. Esto significa que

$$\lim_{x \to \beta - 0} f(x) = b = \sup_X f(x).$$

Análogamente se demuestra que $\lim\limits_{x \to \alpha + 0} f(x) = \inf\limits_X f(x)$. □

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Supongamos, para mayor exactitud, que la función $f$ crece sobre el conjunto $X$ y $x_0$ es un punto de adherencia de los conjuntos no vacíos $X_<(x_0)$ y $X_>(x_0)$. Entonces, para cualesquiera puntos $x' \in X_<(x_0)$ y $x'' \in X_>(x_0)$ es válida la desigualdad

$$f(x') \leqslant f(x'').$$

Por esto, la función $f$ está acotada superiormente sobre el conjunto $X_<(x_0)$ por el número $f(x'')$ y está acotada inferiormente sobre el conjunto $X_>(x_0)$ por el número $f(x')$. Por lo tanto

$$\sup_{X_<(x_0)} f(x) \leqslant f(x''), \quad \inf_{X_>(x_0)} f(x) \geqslant f(x'). \tag{5.63}$$

En particular, las cotas superiores e inferiores indicadas son finitas y además, por cuanto la primera de las desigualdades (5.63) es válida para cualquier punto $x'' \in X_>(x_0)$, entonces, pasando en su segundo miembro a la cota inferior de los valores de la función sobre el conjunto $X_>(x_0)$ obtendremos

$$\sup_{X_<(x_0)} f(x_0) \leqslant \inf_{X_>(x_0)} f(x). \tag{5.64}$$

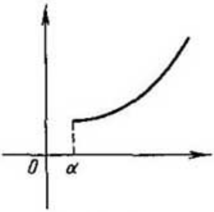



FIG. 26

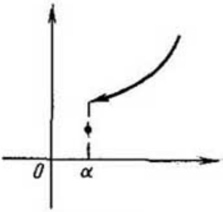



FIG. 27

Con esto culmina la demostración del corolario, ya que, por el teorema 4, los límites por la izquierda $f(x_0 - 0)$ y por la derecha $f(x_0 + 0)$ existen y además

$$f(x_0 - 0) = \sup_{X<(x_0)} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \inf_{X>(x_0)} f(x)$$

por lo que las desigualdades (5.58) coinciden con la desigualdad (5.64). □

OBSERVACIÓN 1. En el teorema 4 para la función creciente $f\colon X \to R$ fueron analizados los casos cuando $\inf X = \alpha \notin X$ y $\sup X = \beta \notin X$. Si por ejemplo, $\alpha \in X$, entonces, como para una función arbitraria (no monótona), aquí son posibles dos casos: el límite $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x \in X}} f(x)$ puede existir (entonces la función $f$ es continua en el punto $\alpha$) (fig. 26) o no existir (fig. 27). Una situación análoga tiene lugar para el punto $\beta$.

OBSERVACIÓN 2. De la matemática elemental es conocido que la función

$$f(r) = a^r, \quad a > 0, \tag{5.65}$$

donde $r$ es un número racional: $r \in Q$, es monótona sobre el conjunto de todos los números racionales $Q$ (véase también el p. 2.6•). Por cuanto cualquier número real $x$ es límite de números racionales (véase el corolario del lema 1 en el p. 4.10), entonces por el teorema 4 para cualquier $x \in R$ existen los límites $f(x - 0)$ y $f(x + 0)$ (por el conjunto de los números racionales ya que sólo por ellos está definida la función $f$ aquí analizada). En el futuro (véase el p. 7.2) será mostrado que en el caso de la función (5.65) tiene lugar la igualdad

$$f(x - 0) = f(x + 0).$$

Este valor común de los límites unilaterales de la función (5.65) en el punto $x$ se denota por $a^x$.

Este ejemplo muestra que el concepto de límite por los conjuntos se encuentra ya en las situaciones más simples.

OBSERVACIÓN 3•. Del teorema 4 se deduce que cualquier función monótona sobre un intervalo finito o infinito puede tener sólo puntos de discontinuidad de primer género, el conjunto de los cuales puede ser, a lo sumo, numerable (es decir, finito o numerable).

En realidad, supongamos para mayor exactitud, que la función $f\colon (a, b) \to R$ crece sobre el intervalo $(a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Ante todo, por el corolario del teorema 4, la función $f$ en cada punto $x_0 \in (a, b)$ tiene límites finitos por la izquierda $f(x_0 - 0)$ y por la derecha $f(x_0 + 0)$ y por consiguiente puede tener sólo discontinuidades de primer género (véase la definición de punto de discontinuidad de primer género en el p. 5.13) y además no puede tener puntos de discontinuidad evitable. En efecto, si $x_0 \in (a, b)$, entonces para todos los $x' \in (a, x_0)$ y $x'' \in \in (x_0, b)$ por el crecimiento de la función $f$ es válida la desigualdad

$$f(x') \leqslant f(x_0) \leqslant f(x''),$$

de donde

$$\sup_{(a, x_0)} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \inf_{(x_0, b)} f(x). \tag{5.66}$$

Por cuanto aquí $(a, x_0) = \{x \in (a, b) : x < x_0\}$ y $(x_0, b) = \{x \in (a, b) : x > x_0\}$, entonces por (5.57) la desigualdad (5.66) se puede escribir en la forma

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0). \tag{5.67}$$

Si $x_0$ fuera un punto de discontinuidad evitable, es decir, tuviera lugar la igualdad $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, entonces por (5.67) se cumpliría la condición

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$$

que significa (véase el p. 5.9) que $f$ es continua en el punto $x_0$.

Así pues, si $x_0$ es un punto de discontinuidad de la función $f$, entonces

$$f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0).$$

Hagámosle corresponder a cada punto de discontinuidad $x_0$ de la función $f$ el intervalo $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ y mostremos que estos intervalos no se intersecan. En realidad, si $x_1$ y $x_2$ son dos puntos de discontinuidad de la función $f$ y por ejemplo, $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1 + 0) \leqslant f(x_2 - 0)$. Demostremos esto. Por el crecimiento de la función $f$ para cualesquiera puntos $x'$ y $x''$ tales que $x_1 < x' < < x'' < x_2$ es válida la desigualdad $f(x') \leqslant f(x'')$. Pasando en esta desigualdad al límite cuando $x' \to x_1 + 0$, obtendremos $f(x_1 + 0) \leqslant f(x'')$. Haciendo tender $x''$ a $x_2$ por la izquierda: $x'' \to x_2 - 0$, tendremos

$$f(x_1 + 0) = f(x_2 - 0),$$

es decir, el extremo derecho del intervalo $(f(x_1 - 0), f(x_1 + 0))$ no es mayor que el extremo izquierdo del intervalo $(f(x_2 - 0), f(x_2 + 0))$. De aquí evidentemente se deduce que los intervalos indicados no se intersecan.

Así pues, a los puntos de discontinuidad de una función monótona $f\colon (a, b) \to R$ se puede poner en correspondencia biunívoca cierto sistema de intervalos que no se intersecan dos a dos. En cada uno de estos intervalos escojamos un número racional (tales números siempre existen en virtud de que el conjunto de los números racionales es siempre denso en el eje numérico, véase la observación en el p. 4.11*). Como resultado se obtendrá ua correspondencia biunívoca entre lol intervalos del sistema indicado y por consiguiente entre los puntos de discontinuidad de la función $f$ y cierto subconjunto del conjunto de los números racionales. Pero cualquier subconjunto de un conjunto numerable (como es el conjunto de los números racionales, véase el p. 4.11*) es finito o numerable, por consiguiente, el conjunto de los puntos de discontinuidad de una función monótona es finito o numerable.

## 5.15. CRITERIO DE CAUCHY DE EXISTENCIA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

En el presente punto por analogía con el caso de las sucesiones será obtenida la condición necesaria y suficiente para que la función tenga límite finito en un punto $x_0$ dado y además, esta condición será enunciada sólo en términos de los valores de la propia función por lo que el propio valor del límite indicado, en esta condición no participa.

Como antes, por punto $x_0$ se entiende un número real o uno de los infinitos $\infty$, $+\infty$ o $-\infty$ y el punto $x_0$ es punto de adherencia del conjunto de definición de la función analizada.

**Teorema 5 (criterio de Cauchy).** *Para que la función $f\colon X \to R$ tenga límite finito en el punto $x_0$ es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ tal que para cualesquiera $x' \in U(x_0) \cap X$ y $x'' \in U(x_0) \cap \cap X$ se cumpla la desigualdad*

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sean $f\colon X \to R$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in R$. Esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ que para cada $x \in U(x_0) \cap X$ es válida la desigualdad

$$|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.68}$$

Sean $x' \in U(x_0) \cap X$ y $x'' \in U(x_0) \cap X$, entonces por (5.68) tendremos

$$|f(x'') - f(x')| = |[f(x'') - a] + [a - f(x')]| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x'') - a| + |a - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ \square$$

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea $f\colon X \to R$ una función tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ tal que para todos los

$$x' \in U(x_0) \cap X,\ x'' \in U(x_0) \cap X \tag{5.69}$$

se cumple la desigualdad

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon. \tag{5.70}$$

Mostremos que de aquí se deduce la existencia para $f$ del límite finito en el punto $x_0$. Tomemos cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \tag{5.71}$$

y demos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Para este $\varepsilon$, por la suposición hecha, existe un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ que satisface las condiciones (5.69) — (5.70). Por la condición

(5.71) para este entorno $U(x_0)$ existe un $n_0 \in N$ tal que para todos los $n > n_0$, $n \in N$, tiene lugar $x_n \in U(x_0)$ y ya que $x_n \in X$, entonces $x_n \in U(x_0) \cap X$, $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$ . De aquí, recordando las suposiciones (5.69) — (5.70) obtendremos que para todos los $n > n_0$ y todos los $m > n_0$ se cumple la desigualdad

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

es decir, la sucesión $\{f(x_n)\}$ satisface las condiciones del criterio de Cauchy para las sucesiones numéricas (véase el p. 4.7) y por consiguiente converge.

De esta forma, para cada sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge. De aquí, como es conocido (véase el lema 4 en el p. 5.6), se deduce la existencia del límite finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$. □

En el caso cuando $x_0$ es un número la condición de Cauchy se puede enunciar de la siguiente forma.

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x' \in X$ y $x'' \in X$, que satisfacen las condiciones $|x' - x_0| < \delta$, $|x'' - x_0| < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

En el caso cuando $x_0 = \infty$ la condición de Cauchy se puede dar de la siguiente forma.

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x' \in X$ y $x'' \in X$ que satisfacen las condiciones $|x'| > \delta$, $|x''| > \delta$ se cumple la desigualdad

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Para el caso de los límites unilaterales la condición de Cauchy se puede parafrasear sin el término de entorno, de la siguiente forma: para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\eta$ ($\eta < x_0$ cuando se analiza el límite por la izquierda y $\eta > x_0$ cuando el límite por la derecha), tal que para cualesquiera $x' \in X$ y $x'' \in X$ que satisfacen la condición $\eta < x' \leqslant x_0$, $\eta < x'' \leqslant x_0$ ó, respectivamente, $x_0 \leqslant x' < \eta$, $x_0 \leqslant x'' < \eta$ se cumple la desigualdad $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Señalemos que todos estos criterios de existencia del límite de una función, relacionados con diferentes casos y que tienen diferentes enunciados, gracias a la terminología acertadamente escogida (el concepto de entorno) obtuvieron una demostración única.

### 5.16. LÍMITE Y CONTINUIDAD DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Analicemos la cuestión sobre la existencia de los límites finitos e infinitos de las composiciones de funciones, cada una de las cuales tiene el límite correspondiente.

Si $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, $g\colon X \to \boldsymbol{R}$ y se cumple la condición $f(X) \subset Y$, entonces sobre el conjunto $X$ está definida la composición $g_0 f$ de las funciones $f$ y $g$ o como se dice, la función compuesta $g[f(x)]$. Se analizarán los límites finitos o infinitos $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{y \to y_0} g(y)$ donde $x_0$ e $y_0$ se supondrán puntos de adherencia finitos o infinitamente alejados (véase el p. 5.4) de los conjuntos $(X)$ y $f(X)$, respectivamente.

**Teorema 6.** *Supongamos que $f$: $X \to R$, $g$: $Y \to R$, $f(X) \subset Y$ y existen los límites finitos o infinitos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \tag{5.72}$$

$$\lim_{y \to y_0} g(y), \tag{5.73}$$

*entonces, cuando $x \to x_0$ existe también el límite (finito o infinito) de la función compuesta $g[f(x)]$ y además*

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

**Corolario.** *Si $f$: $X \to R$, $g$: $Y \to R$, $f(X) \subset Y$ y la función $f$ es continua en el punto $x_0 \in X$ y la función $g$ es continua en el punto $y_0 = f(x_0)$, entonces la función $g[f(x)]$ es continua en el punto $x_0$.*

Más brevemente, pero menos exacto la función continua de una función continua es continua.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Denotemos el valor del límite (5.73) por $z_0$:

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = z_0$$

($z_0$ es un número o uno de los infinitos) y fijemos de forma arbitraria un entorno $U = U(z_0)$ del punto $z_0$. Entonces, por la definición de límite, existe un entorno $V = V(y_0)$ del punto $y_0$ que si

$$y \in Y \cap V(y_0), \tag{5.74}$$

entonces

$$g(y) \in U(z_0). \tag{5.75}$$

Más adelante, para el entorno $V(y_0)$ obtenido, por la existencia del límite (5.72) se encuentra un entorno $W = W(x_0)$ tal que si

$$x \in X \cap W(x_0), \tag{5.76}$$

entonces

$$f(x) \in V(y_0)$$

y ya que $f(x) \in Y$, entonces

$$f(x) \in Y \cap V(y_0). \tag{5.77}$$

Del cumplimiento de las condiciones (5.76) — (5.77) por (5.74) — (5.75) para $y = f(x)$ tenemos: si se cumple la inclusión (5.76), entonces

$$g[f(x)] \in U(z_0)$$

(véase la fig. 28). Por cuanto el entorno $U(z_0)$ del punto $z_0$ era arbitrario, esto significa que cuando $x \to x_0$ para la función $g[f(x)]$ existe el límite igual a $z_0$:

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = z_0 = \lim_{y \to y_0} g(y). \ \square$$

La afirmación del corolario es un caso particular del teorema cuando $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ y $\lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0)$ (en estas suposiciones los puntos $x_0$ e

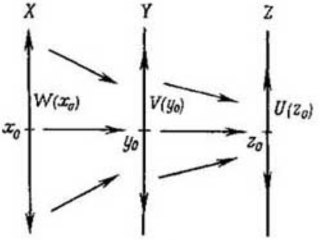



FIG. 28

$y_0$ perteneciendo a los conjuntos $X$ y $Y$, respectivamente, siempre son sus puntos de adherencia):

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) = g[f(x_0)].$$

OBSERVACIÓN 1. Si $f: X \to \boldsymbol{R}$, $g: Y \to \boldsymbol{R}$, existe el límite (5.72) y el conjunto $Y$ contiene cierto entorno $V(y_0)$ del punto $y_0$:

$$V(y_0) \subset Y, \tag{5.78}$$

entonces, por la existencia del límite (5.72) se encuentra un entorno $W = W(x_0)$ del punto $x_0$ tal que

$$f(X \cap W) \subset V(y_0) \subset Y$$

y por consiguiente para la restricción $f_0$ de la función $f$ sobre el conjunto $X \cap W$ se cumple la inclusión

$$f_0(X \cap W) \subset Y. \tag{5.79}$$

De esta forma, si pasamos a la restricción $f_0$ de la función $f$, entonces en la suposición complementaria indicada (5.78), en las condiciones del teorema 7 se puede no exigir la existencia de la composición de las funciones $g$ y $f_0$, es decir, el cumplimiento de la condición $f(X) \subset Y$, pues en el sentido indicado anteriormente ella se cumple automáticamente, precisamente tiene lugar la inclusión (5.79) y por esto existe la composición $g_0 f_0$.

OBSERVACIÓN 2. La afirmación del corolario del teorema 7 se puede escribir en forma de fórmula

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = g[\lim_{x \to x_0} f(x)] \tag{5.80}$$

de la cual se ve que, dicho en sentido figurado, *la operación del paso límite es permutable con la operación de composición con una función continua.*

En realidad, la parte izquierda de la igualdad (5.80) por la continuidad de la función $g[f(x)]$ en el punto $x_0$ (véase el corolario del teorema 6) es igual a $g[f(x_0)]$. A este mismo valor $g[f(x_0)]$ es igual la parte derecha de la igualdad, pero ya por la continuidad de la función $f$ en el mismo punto $x_0$.

OBSERVACIÓN 3. La fórmula demostrada en el teorema 7

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y), \tag{5.81}$$

donde $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ se puede analizar como *la regla del cambio de variable para el cálculo de los límites de las funciones compuestas.*

Utilizando la notación de la composición de funciones $g_0 f$ la igualdad (5.81) se puede escribir en la forma

$$\lim_{x \to x_0} (g_0 f)(x) = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

OBSERVACIÓN 4. Sean $f: X \to \boldsymbol{R}$, $g: Y \to \boldsymbol{R}$ y $f(X) \subset Y$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. En este caso, por el teorema 6, de la existencia del límite (finito o infinito), que aparece en el segundo miembro de la igualdad (5.81), se deduce la existencia del límite correspondiente en el primer miembro y la igualdad de estos límites. Si además, la aplicación $f: X \to Y$ es una aplicación biunívoca del conjunto $X$ *sobre el conjunto* $Y$, es decir, sobre $Y$ existe la función inversa unívoca $f^{-1}$ y si $\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = x_0$, entonces viceversa, de la existencia del límite finito o infinito que aparece en el primer miembro de la igualdad (5.81) se deduce la existencia del límite correspondiente que aparece en el primer miembro.

De esta forma, *según las suposiciones hechas, el límite (finito o infinito)* $\lim_{x \to x_0} g[f(x)]$ *existe si y sólo si existe el límite* $\lim_{y \to y_0} g(y)$ *(respectivamente, finito o infinito) y además, en el caso de que existan son iguales.*

En un sentido esta afirmación es el contenido del teorema 6. En el otro, también se deduce de este teorema si lo aplicamos a la composición $(g_0 f) \circ f^{-1}$ de las funciones $f^{-1}$ y $g \circ f$. Por el teorema 6, de la existencia de los límites $\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = x_0$ y $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x)$ se deduce que existe el límite

$$\lim_{y \to y_0} ((g \circ f) \circ f^{-1})(y) = \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x),$$

pero $(g \circ f) \circ f^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) = g$. De esta forma, existe el límite $\lim_{y \to y_0} g(y)$ y $\lim_{y \to y_0} g(y) = \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x)$.

## § 6. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS SOBRE LOS INTERVALOS

### 6.1. ACOTACIÓN DE LAS FUNCIONES CONTINUAS. VALORES EXTREMALES

En el presente párrafo será estudiada una serie de propiedades importantes de las funciones continuas y que encuentran muchas aplicaciones.

**Definición 1.** *La función* $f: X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}$ *se llama continua sobre el conjunto* $X$, *si es continua por* $X$ *en cada uno de sus puntos* (véase las definiciones 5 y 8 en el p. 5.6).

Una clase importante de funciones continuas es la clase de funciones continuas sobre los intervalos del eje numérico. Comencemos su estudio por las funciones continuas sobre los segmentos. Si la función $f$ es continua sobre el segmento $[a, b]$

entonces su continuidad en el punto $x = a$ es equivalente a la continuidad por la derecha y su continuidad en el punto $x = b$, a la continuidad por la izquierda en este punto.

Diremos que la función $f\colon X \to R$ alcanza sobre el conjunto $X$ su cota superior (inferior) $\beta = \sup\limits_X f$ ($\alpha = \inf\limits_X f$) si existe un punto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = \beta$ (respectivamente, $f(x_0) = \alpha$).

**Teorema 1 (de Weierstrass).** *Cualquier función continua sobre un segmento está acotada y alcanza sobre él su cota superior y su cota inferior.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función $f$ continua sobre el segmento $[a, b]$ y sea

$$M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x);$$

$M$, como cualquier cota superior de un conjunto no vacío de números, puede ser finita o infinita, igual a $+\infty$. Mostremos que $M < +\infty$ y que existe un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = M$.

Escojamos cualquier sucesión de números $a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, tales que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = M, \quad a_n < M, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{6.1}$$

Por la definición de cota superior de una función, para cada $a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, existe un punto $x_n \in [a, b]$ tal que

$$f(x_n) > a_n, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{6.2}$$

Por otro lado, por cuanto $M$ es la cota superior de la función $f$, entonces para todos los puntos $x \in [a, b]$ es válida la desigualdad

$$f(x) \leqslant M. \tag{6.3}$$

La sucesión $\{x_n\}$ está acotada: $a \leqslant x_n \leqslant b$, $n = 1, 2, \ldots$, por lo que por el teorema de Bolzano — Weierstrass (véase el p. 4.6) de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0. \tag{6.4}$$

Por cuanto $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces (¿por qué?), también $a \leqslant x_0 \leqslant b$.

De las desigualdades (6.2) y (6.3) se deduce que para todos los $k = 1, 2, \ldots$, son válidas las desigualdades

$$a_{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant M. \tag{6.5}$$

El límite de cualquier subsucesión de una sucesión que tiene límite finito o infinito es igual al límite de toda la sucesión, por lo que de (6.1) tenemos $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = M$. Pasando en (6.5) al límite cuando $k \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = M. \tag{6.6}$$

Por otro lado, por la continuidad de la función $f$ sobre el segmento $[a, b]$, ella es continua en el punto $x_0$ de este segmento, y por consiguiente, de (6.4) se deduce que

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0). \tag{6.7}$$

De (6.6) y (6.7) obtenemos $M = f(x_0)$.

De esta forma está demostrado que la cota superior $M$ de la función $f$ coincide con el valor de la función en el punto $x_0$ y por consiguiente es finita. Por eso, la función $f$ está acotada superiormente y su cota superior se alcanza en el punto $x_0 \in [a, b]$.

Análogamente se demuestra que una función continua sobre un segmento está acotada inferiormente y que alcanza sobre él su cota inferior. □

El teorema análogo al teorema 1 no es válido para los intervalos que no son segmentos, de esto es fácil convencerse construyendo los ejemplos correspondientes. Por ejemplo, la función $y = \dfrac{1}{x}$ es continua en cada punto del intervalo $(0; 1)$ y junto con esto no está acotada sobre él; la función $y = x$ es continua sobre todo el eje numérico y no está acotada sobre él.

Señalemos además, que si la función $f$ es continua no sobre un segmento, sino sobre un intervalo de otro tipo e incluso, además está acotada sobre él, en general, no tiene valor máximo y mínimo. Por ejemplo, las funciones $y = x$ sobre el intervalo $(0; 1)$ e $y = \operatorname{arctg} x$ sobre toda la recta numérica, aunque son continuas (la continuidad de la función $y = \operatorname{arctg} x$ será demostrada en el p. 7.3) y están acotadas en los intervalos indicados, no alcanzan sus cotas superiores e inferiores.

Ejercicio 1. Sea la función $f$ definida y continua sobre el segmento $[a, b]$ y $f(x) > 0$ para todos los $x \in [a, b]$. Entonces existe $c > 0$ tal que $f(x) > c$ para todos los $x \in [a, b]$.

## 6.2. VALORES INTERMEDIOS DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

**Teorema 2 (de Bolzano — Cauchy).** *Si la función $f$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y $f(a) = A$, $f(b) = B$, entoces para cualquier $C$ incluida entre $A$ y $B$ existe un punto $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = C$.*

Dicho de otro modo, *una función continua sobre un segmento, tomando dos valores cualesquiera, toma cualquier valor que se encuentre entre ellos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea para mayor exactitud $f(a) = A < B = f(b)$, $A < C < B$. Dividamos al segmento $[a, b]$ con el punto $x_0$ en dos segmentos iguales por longitud, entonces o bien $f(x_0) = C$ y el punto buscado $\xi = x_0$ se ha encontrado, o bien $f(x_0) \neq C$ y entonces sobre los extremos de uno de los segmentos obtenidos la función $f$ toma valores que están por lados diferentes del número $C$, más exacto, en el extremo izquierdo el valor es menor que $C$ y en el derecho, mayor.

Denotemos este segmento por $[a_1, b_1]$ y dividámoslo de nuevo en dos segmentos iguales por longitud, etc. Como resultado después de un número finito de pasos o bien llegamos al punto $\xi$ buscado, en el cual $f(\xi) = C$ o bien obtendremos una sucesión de segmentos encajados $[a_n, b_n]$ que tienden a cero por su longitud y tales que

$$f(a_n) < C < f(b_n). \tag{6.8}$$

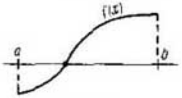


FIG. 29

Sea $\xi$ el punto común de todos los segmento $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (véase el p. 3.6). Como sabemos (véase (4.9)), $\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Por esto, por la continuidad de la función $f$

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n). \qquad (6.9)$$

De (6.8) obtendremos (véase el p. 4.3)

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant C \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n). \qquad (6.10)$$

De (6.9) y (6.10) se deduce que $f(\xi) = C$. □

**Corolario 1.** *Si una función es continua sobre un segmento y en sus extremos toma valores de diferente signo, entonces en este segmento existe al menos un punto en el cual la función se iguala a cero.*

Este corolario es un caso particular del teorema (fig. 29).

**Corolario 2.** *Sea $f$ una función continua sobre el segmento $[a, b]$ y $M = \sup f$, $m = \inf f$. Entonces la función $f$ toma todos los valores del segmento $[m, M]$ y sólo estos valores.*

Para la demostración observemos que si $M = \sup\limits_{[a,b]} f$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f$, entonces $m \leqslant f(x) \leqslant M$ y por el teorema 1, existen los puntos $\alpha \in [a, b]$ y $\beta \in [a, b]$ tales que $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$. Ahora el corolario analizado se deduce directamente del teorema 2 aplicándolo al segmento $[\alpha, \beta]$ si $\alpha \leqslant \beta$ o, respectivamente, al segmento $[\beta, \alpha]$ si $\beta < \alpha$.

De esta forma, *el conjunto de todos los valores de la función dada, continua sobre cierto segmento es también un segmento.*

Señalemos que la propiedad de las funciones continuas de tomar todos los valores intermedios es válida para cualquier intervalo (finito o infinito). Precisamente: si una función continua sobre cierto intervalo toma en dos de sus puntos $a$ y $b$, y además $a < b$, dos valores cualesquiera, entonces toma cualquier valor intermedio. En realidad, por el teorema 2, la función analizada, a ciencia cierta, toma el valor indicado en algún punto del segmento $[a, b]$ que es una parte del intervalo inicial.

OBSERVACIÓN. Tanto en el teorema 1 como en el teorema 2 fue demostrada la existencia del punto sobre el segmento dado, en el cual el valor de la función continua analizada posee determinada propiedad (en el primer teorema en este punto se alcanza el valor extremal, en el segundo se toma el valor intermedio dado). No obstante, entre los métodos aplicados para la demostración de estas afirmaciones se tiene una diferencia sustancial. El método de demostración del teorema 2 da la posibilidad no sólo de demostrar en el caso general la existencia del punto indicado, sino en realidad hallarlo con cualquier grado de exactitud dado, para cada función concreta: es necesario dividir el segmento en el cual se busca el punto, un número suficiente de veces por la mitad, eligiendo cada vez una mitad según la regla indicada en la demostración; los extremos del segmento obtenido serán los valores aproximados del punto indicado.

El método de demostración del teorema 1 no permite indicar un medio con ayuda del cual para cada función continua sobre el segmento sea posible hallar los puntos en los cuales ésta toma sus valores extremales. Esto está condicionado por que la demostración de este teorema está basada en el teorema de Bolzano — Weierstrass que afirma sólo la posibilidad de extraer de cada sucesión acotada una subsucesión convergente. Un método concreto, o como se acostumbra decir, un *algoritmo* para la extracción de cualquier sucesión acotada una subsucesión convergente, no existe.

Observemos además, que en la utilización de cualquier algoritmo en la práctica es importante con qué rapidez éste nos lleva al objetivo. Desde este punto de vista, en la resolución aproximada de la ecuación $f(x) = 0$ comúnmente se aplica no el método de la división sucesiva del segmento por la mitad, sino otros algoritmos que nos llevan al objetivo más rápidamente (véase el Complemento al final del segundo tomo, § 60).

**Problema 6.** Demuéstrese que una función continua y periódica sobre todo el eje numérico diferente de una constante tiene un periodo mínimo. Cítese un ejemplo de función periódica definida sobre todo el eje numérico y diferente de una constante, que no tenga periodo mínimo.

## 6.3. FUNCIONES INVERSAS

**Definición 2.** *La función $f$ definida sobre un conjunto numérico $X$ se llama estrictamente creciente* (*estrictamente decreciente*) *si para dos números cualesquiera $x_1 \in X$ y $x_2 \in X$ tales que $x_1 < x_2$ se cumple la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) > f(x_2)$).*

*Una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente se llama estrictamente monótona.*

Si una función es estrictamente creciente (decreciente) sobre el conjunto $X$, entonces diremos también que crece (decrece) estrictamente sobre este conjunto.

Es evidente que una función estrictamente monótona (creciente, decreciente) es también simplemente monótona (respectivamente, creciente, decreciente), en el sentido de la definición 16 del p. 5.14.

Lema 1. *Supongamos que la función $f$ crece* (*decrece*) *estrictamente sobre cierto conjunto $X \in R$ y sea $Y$ el conjunto de sus valores. Entonces la función inversa $f^{-1}$* (*véase* el p. 1.2*) *es una función unívoca, estrictamente creciente* (*decreciente*) *sobre el conjunto $Y$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, para mayor exactitud, que la función $f$ crece monótonamente sobre el conjunto $X$. Demostremos que la función inversa es unívoca.

Supongamos lo contrario. Supongamos que existe un punto $y \in Y$ tal que el conjunto $f^{-1}(y)$ contiene al menos dos puntos diferentes $x_1$ y $x_2$:

$$x_1 \in f^{-1}(y) \quad \text{y} \quad x_2 \in f^{-1}(y), \quad x_1 \neq x_2,$$

por consiguiente

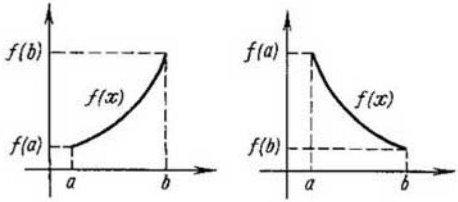


FIG. 30

$$f(x_1) = f(x_2). \tag{6.11}$$

Para dos números $x_1$ y $x_2$, $x_1 \neq x_2$ es válida una de las desigualdades: $x_1 < x_2$ ó $x_1 > x_2$; en el primer caso, por el crecimiento monótono estricto de la función $f$ tenemos $f(x_1) < f(x_2)$ y en el segundo $f(x_1) > f(x_2)$, es decir, en ambos casos la igualdad (6.11) no se cumple. De esta forma, para cada $y \in Y$ el conjunto $f^{-1}(y)$ está compuesto exactamente por un punto, es decir, la función $f^{-1}$ es unívoca.

Demostremos ahora que la función $f^{-1}$ crece estrictamente sobre el conjunto $Y$. Sea

$$y_1 < y_2, \quad y_1 \in Y, \quad y_2 \in Y \tag{6.12}$$

y sean $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Por consiguiente $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Para dos números cualesquiera $x_1$ y $x_2$ es válida una de las tres relaciones: o bien $x_1 > x_2$, o bien $x_1 = x_2$, o bien $x_1 < x_2$. Si $x_1 > x_2$ ó $x_1 = x_2$, entonces respectivamente sería $y_1 > y_2$ (por el crecimiento mónotono estricto de la función $f$) o $y_1 = y_2$ (por la univocidad), lo cual estaría en contradicción con la desigualdad (6.12). De esta forma, de la desigualdad (6.12) se deduce que $x_1 < x_2$ y esto significa el crecimiento estricto de la función $f^{-1}$ sobre el conjunto $Y$.

En el caso del decrecimiento estricto de la función $f$ sobre el conjunto, la demostración se puede o bien realizar de forma análoga, o bien llevarla al caso ya analizado con el análisis de la función $-f$, ya que cuando la función $f$ decrece estrictamente sobre el conjunto $x$, la función $-f$ crece estrictamente sobre este conjunto. □

**Teorema 3.** *Supongamos que la función $f$ está definida, crece (decrece) estrictamente y es continua sobre el segmento $[a, b]$, entonces la función inversa $f^{-1}$ está definida, es unívoca, crece (decrece) estrictamente y es continua sobre el segmento con extremos en los puntos $f(a)$ y $f(b)$* (fig. 30).

DEMOSTRACIÓN. Realicemos la demostración del teorema para las funciones estrictamente crecientes. Sean $c = f(a)$, $d = f(b)$.

Mostremos que el dominio de la función inversa $f^{-1}$ es el segmento $[c, d]$ o lo que es lo mismo, que $[c, d]$ es el conjunto de valores de la función $f$. En realidad, del crecimiento monótono de la función $f$ se deduce que $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, es decir, que $f(x) \in [c, d]$ para cualquier $x \in [a, b]$. Por otro lado, cualquiera que sea $y \in [c, d]$, es decir, $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, por el teorema 2 existe un punto $x \in [a, b]$ tal que

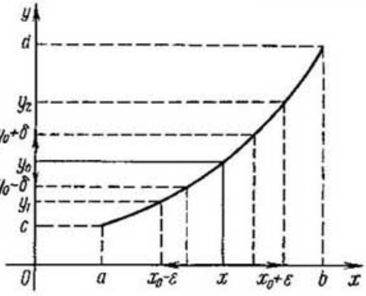



FIG. 31

$f(x) = y$. De esta forma, todos los valores de la función $f$ dada están sobre el segmento $[c, d]$ y cada punto de este segmento es valor de la función $f$ en cierto punto. Esto significa que el segmento $[c, d]$ es el conjunto de valores de la función $f$.

Señalemos que esta afirmación se deduce también del corolario 2 del teorema 2 si observamos que en el caso dado

$$c = \min_{[a,\, b]} f(x),\ d = \max_{[a,\, b]} f(x).$$

En virtud del lema, la función $f^{-1}$ es unívoca y crece estrictamente sobre el segmento $[c, d]$.

Mostremos, finalmente, que la función $f^{-1}$ es continua sobre $[c, d]$. Sean $y_0 \in [c, d]$ y $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Sea $c < y_0 < d$, es decir, $y_0$ es un punto interior del segmento $[c, d]$, entonces por el crecimiento estricto de la función $f^{-1}$ también $a < x_0 < b$. Fijemos cierto $\varepsilon > 0$. Sin perder generalidad en los razonamientos futuros se puede considerar (¿por qué?), que $\varepsilon$ es tal que

$$a \leqslant x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \leqslant b. \tag{6.13}$$

Sean $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Entonces de la condición (6.13) por el crecimiento estricto de la función $f$ se deduce que

$$c \leqslant y_1 < y_0 < y_2 \leqslant d.$$

Tomemos $\delta > 0$ de forma tal que $y_1 \leqslant y_0 - \delta < y_0 + \delta \leqslant y_2$ (fig. 31). Si ahora escogemos $y$ de forma tal que $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$, entonces con más razón

$$y_1 < y < y_2,$$

y por consiguiente, por el crecimiento estricto de la función $f^{-1}$ es válida la desigualdad

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon.$$

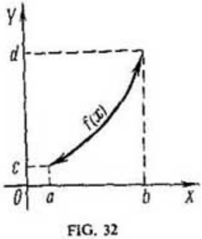



FIG. 32

De esta forma, para $\varepsilon > 0$ está indicado $\delta > 0$ tal que para todos los $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ se cumple la desigualdad

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon,$$

es decir, la función $f^{-1}$ es continua en el punto $y_0$. Si ahora $y_0 = c$ o $y_0 = d$, entonces con razonamientos análogos se demuestra que la función $f^{-1}$ es continua por la derecha en el punto $c$ y continua por la izquierda en el punto $d$.

El teorema para las funciones estrictamente crecientes está demostrado completamente.

Recordemos que la función $f$ decrece estrictamente si y sólo si la función $-f$ crece estrictamente, por lo que la validez del teorema para las funciones estrictamente decrecientes se deduce del caso analizado. □

Analicemos ahora el caso de una función definida sobre un intervalo.

**Teorema 4.** *Supongamos que la función $f$ está definida, crece (decrece) estrictamente y es continua sobre el intervalo $(a, b)$ (finito o infinito) y sean*

$$c = \lim_{x \to a+0} f(x), \quad d = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

*Entonces la función inversa $f^{-1}$ está definida, es unívoca, crece (decrece) estrictamente y es continua sobre el intervalo (finito o infinito) con extremos $c$ y $d$ (fig. 32).*

Además, en el caso cuando $a = -\infty$ por $\lim\limits_{x \to -\infty+0} f(x)$ se entiende $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y en el caso $b = +\infty$ por el límite $\lim\limits_{x \to +\infty-0} f(x)$ el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos para mayor exactitud, que la función $f$ crece estrictamente en el intervalo $(a, b)$. Mostremos que en este caso el conjunto de sus valores es el intervalo $(c, d)$. En efecto, por el teorema sobre los límites de las funciones monótonas (véase el p. 5.14) tenemos: $c = \inf\limits_{(a,b)} f$, $d = \sup\limits_{(a,b)} f$ y por consiguiente para cualquier $x \in (a, b)$ es válida la desigualdad $c \leqslant f(x) \leqslant d$. Es más para todos los $x \in (a, b)$ se cumplen también las desigualdades $f(x) \neq c, f(x) \neq d$. En realidad, si por ejemplo, existiera un $x_0$ tal que $a < x_0 < b$ y $f(x_0) = c$ (esto, evidentemente, es posible sólo cuando la cota inferior $c$ es finita), entonces para $a < x < x_0$ se cumpliría la desigualdad $f(x) < f(x_0) = c$, lo cual estaría en contra-

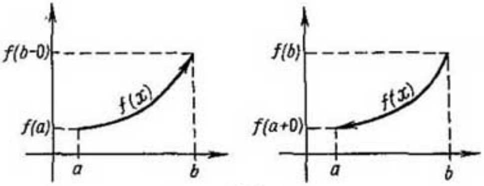



FIG. 33

dicción con que $c = \inf f$. Así pues, para todos los $x \in (a, b)$ se cumplen las desigualdades $c < f(x) < d$. Por otro lado, por cuanto $c = \inf\limits_{(a,b)} f$, $d = \sup\limits_{(a,b)} f$ entonces para cualquier $y$, $c < y < d$, existen $x_1 \in (a, b)$ y $x_2 \in (a, b)$ tales que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$ satisfacen las desigualdades

$$c < y_1 < y < y_2 < d.$$

De aquí se deduce que $x_1 < x_2$ [*)] y por cuanto $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces según el teorema de Bolzano — Cauchy sobre los valores intermedios de las funciones continuas existe un punto $x \in [x_1, x_2]$ tal que $f(x) = y$. De esta forma, para cualquier punto $y \in (c, d)$ existe un punto $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = y$.

Por lo mismo, está demostrado que efectivamente, el conjunto de valores de la función $f$, o lo que es lo mismo, el conjunto de definición de la función inversa $f^{-1}$ es el intervalo $(c, d)$. El hecho de que la función $f^{-1}$ es unívoca y crece estrictamente en el intervalo $(c, d)$ se deduce del lema. Su continuidad se demuestra repitiendo al pie de la letra la demostración de la continuidad de la función inversa en el teorema anterior. Finalmente, como antes, el teorema para una función monótona estrictamente decreciente se deriva del teorema ya demostrado sobre la función monótona estrictamente creciente con ayuda del análisis de la función $-f$. □

OBSERVACIÓN. De forma análoga se demuestra que si una función crece estrictamente y es continua sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, o sobre $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, entonces la función inversa está definida, crece estrictamente y es continua sobre el intervalo semiabierto $[c, d)$, donde $c = f(a)$, $d = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$ y respectivamente sobre $(c, d]$, donde $c = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $d = f(b)$ (fig. 33).

El caso de una función $f(x)$ estrictamente decreciente sobre un intervalo semiabierto se puede reducir al caso de una función estrictamente creciente analizando la función $-f(x)$.

Ejemplo. Para cualquier entero positivo $n$, la función potencial $y = x^n$ crece estrictamente y es continua en el semieje positivo $x \geqslant 0$.

---

*) El caso $x_1 \geqslant x_2$ no es posible, ya que entonces en virtud del crecimiento de la función $f$ se cumpliría la desigualdad $y_1 \geqslant y_2$.

En efecto, si $0 \leqslant x_1 < x_2$, entonces, multiplicando $n$ veces estas desigualdades, obtendremos $x_1^n < x_2^n$, es decir la función $y = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, crece monótona y estrictamente. Para la demostración de la continuidad de la función $y = x^n$ observemos que la función $y = f(x) = x$ es continua en cualquier punto $x_0 \in \boldsymbol{R}$. En efecto, en este caso $y_0 = f(x_0) = x_0$ por lo que $\Delta y = y - y_0 = x - x_0 = \Delta x$. Por consiguiente, si está dado $\varepsilon > 0$, entonces tomando $\delta = \varepsilon$ obtendremos que de la condición $|\Delta x| < \delta$ se deduce $|\Delta y| = |\Delta x| < \delta = \varepsilon$. Esto significa la continuidad de la función $y = x$ en el punto $x = x_0$. La función $y = x^n$ es el producto de $n$ funciones iguales $f(x) = x$ y por esto (véase el p. 5.10) también es continua en todos los puntos $x \in \boldsymbol{R}$.

De que $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, evidentemente se deduce que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $n = 1, 2, \ldots$ Además, en el cero la función $y = x^n$ es igual a cero. Por esto, de acuerdo con la observación al teorema 4, el conjunto de valores de la función potencial $y = x^n$ cuando $x \geqslant 0$ es el eje no negativo $y \geqslant 0$.

La función inversa a la función $y^n = x$ es la raíz de $n$-ésimo grado $\sqrt[n]{y}$, $n = 1, 2, \ldots$. Según el teorema 4, por las propiedades demostradas de la función potencial $y = x^n$, la raíz de $n$-ésimo grado $\sqrt[n]{y}$, $n = 1, 2, \ldots$, está definida para cualquier $y$ no negativo.

Así pues, de los teoremas demostrados se deduce, en particular, *la existencia y la unicidad de la raíz positiva de n-ésimo grado de cualquier número positivo.*

OBSERVACIÓN. Del ejemplo analizado se deduce de nuevo que cualquier intervalo contiene números irracionales (véase el corolario 2 del teorema 8 en el p. 4.11*). Mostremos inicialmente que el número $\sqrt{2}$ (cuya existencia se deduce del ejemplo analizado anteriormente) es irracional. Supongamos lo contrario: supongamos que existe un número racional igual a la raíz cuadrada del dos. Escribamos este número en forma de fracción irreducible $p/q$ ($p$ y $q$ son números naturales primos entre sí):

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Entonces $p^2 = 2q^2$ y por consiguiente el número $p$ se divide por 2. En efecto, si $p$ fuera impar, es decir, $p = 2k + 1$, $k \in N$, entonces $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 2k + 1$ también sería impar y la igualdad $p^2 = 2q^2$ no tendría lugar. Así pues, $p = 2k$ pero entonces $4k^2 = 2q^2$, $q^2 = 2k^2$. De aquí, como antes se deduce que $q$ es un número par. La paridad de los números $p = q$ contradice la suposición de que la fracción $p/q$ es irreducible.

De lo demostrado, evidentemente se deduce que cualquier número del tipo $m\sqrt{2}/n$, donde $m$ y $n$ son números naturales, también es irracional. En realidad, si fuera racional $\dfrac{m\sqrt{2}}{n} = \dfrac{p}{q}$, entonces $\sqrt{2}$ resultaría ser un número racional: $\sqrt{2} = \dfrac{np}{mq}$. De aquí, a su vez, se deduce que cualquier intervalo contiene un número irracional (compárese con el p. 4.11*) y además, del tipo $m\sqrt{2}/n$, donde $m$ y $n$ son enteros.

En efecto, sea $0 \leqslant a < b$. Elijamos el natural $n$ de forma tal que

$$\sqrt{2}/n < b - a$$

y después el natural $m$ de forma tal que

$$\frac{(m-1)\sqrt{2}}{n} \leqslant a < \frac{m\sqrt{2}}{n}.$$

Entonces $a < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$. Si $a < b \leqslant 0$, entonces por lo demostrado existen los enteros $m$ y $n$ tales que

$$0 \leqslant -b < \frac{m\sqrt{2}}{n} < -a;$$

y por esto

$$a < -\frac{m\sqrt{2}}{n} < b.$$

En el caso $a < 0 < b$, por lo demostrado existen los enteros $m$ y $n$ tales que $a < 0 < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$. □

## § 7. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

### 7.1. POLINOMIOS Y FUNCIONES RACIONALES FRACCIONALES

**Teorema 1.** *Cualquier polinomio es continuo en cada punto.*

En realidad, la función $y = c$, donde $c$ es una constante, es continua sobre todo el eje numérico, lo cual fue mostrado en el ejemplo 1 del p. 5.12.

Las funciones del tipo $y = x^n$ también son continuas para cada $n \in N$ dado, en cualquier punto $x \in R$. Esto fue mostrado en el p. 6.3 (véase el ejemplo allí dado).

Cualquier polinomio se obtiene de las funciones del tipo $y = c$ e $y = x^n$ con ayuda de la suma y multiplicación y por esto es una función continua en cada punto (véase el p. 5.10).

**Teorema 2.** *Cualquier función racional $P(x)/Q(x)$ ($P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios) es continua en todos los puntos del eje numérico $R$, en los cuales su denominador $Q(x)$ no se anula.*

Esto se deduce directamente de que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son continuos en cada punto $x \in R$ y el cociente de funciones continuas también es continuo en todos los puntos del eje numérico en los cuales el denominador no se anula (véase el p. 5.10).

Este teorema es muy cómodo utilizarlo hallando los límites de las funciones racionales. Supongamos que se exige hallar $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$. Para esto es necesario inicialmente realizar, si por supuesto, esto es posible, la reducción de la función $P(x)/Q(x)$ por el factor $(x - x_0)^n$ con el mayor exponente posible $n \geqslant 1$. Si denotamos por $P_1(x)/Q_1(x)$ la fracción racional obtenida, entonces (véase el p. 5.4)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Si $Q_1(x_0) \neq 0$, entonces por el teorema 2, este límite es simplemente igual a $P_1(x_0)/Q_1(x_0)$; si $Q_1(x_0) = 0$ (y por lo tanto $P_1(x_0) \neq 0$, ya que en el caso contrario la fracción $P_1(x)/Q_1(x)$ seriá reducible por $(x - x_0)$), entonces este límite es igual a $\infty$.

Ejemplos. 1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x + 1} = -\dfrac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x - 1} = \infty$.

### 7.2. FUNCIONES EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y POTENCIALES

Recordemos las propiedades de la potencia $a^r$, donde $a > 0$, $r$ es número racional: $r = p/q$, $p$ y $q$ son enteros, $q \neq 0$.

1 °. Sea $r_1 < r_2$. Si $a > 1$, entonces $a^{r_1} < a^{r_2}$ y si $a < 1$ entonces $a^{r_1} > a^{r_2}$.

2 °. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$.

3 °. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$.

4 °. $(ab)^r = a^r b^r$.

Aquí en todos casos $r$, $r_1$ y $r_2$ son números racionales. Recordemos además, que $a^0 = 1$. De la propiedad 2 ° se deduce que $a^r \cdot a^{-r} = a^0 = 1$, de donde

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}. \tag{7.1}$$

A continuación, de la propiedad 1° y de (7.1) se deduce que $a^r > 0$ para cualquier racional $r$. En efecto, si $r > 0$ y $a \geqslant 1$, entonces por 1° $a^r \geqslant a^0 = 1 > 0$. De aqui, por (7.1) tenemos

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} > 0.$$

De forma análoga se demuestra la desigualdad $a^r > 0$ cuando $a < 1$.

Señalemos además, que para cualesquiera $a > 0$, $b > 0$ y $r \in Q$ tiene lugar

$$(ab)^r = a^r b^r.$$

Recordemos que (véase el ejemplo 3 en el p. 4.9)

$$\lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1, \quad a > 0, \tag{7.2}$$

y con ayuda de esto demostremos el siguiente lema.

**Lema 1.** *Para cualquier $a > 0$ tiene lugar la igualdad*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in Q}} a^x = 1. \tag{7.3}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $a > 1$, para mayor exactitud. Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por (7.2) se encuentra un $n_0 \in N$ tal que

$$\left| a^{\frac{1}{n_0}} - 1 \right| < \varepsilon, \left| a^{-\frac{1}{n_0}} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Por consiguiente (véase la propiedad 1 ° de la potencia con exponentes racionales)

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon.$$

Si $x$ es un número racional y $|x| < \dfrac{1}{n_0}$, es decir

$$-\frac{1}{n_0} < x < \frac{1}{n_0},$$

entonces por la misma propiedad 1° se cumplirá la desigualdad

$$a^{-\frac{1}{n_0}} < a^x < a^{\frac{1}{n_0}}$$

y por esto, la desigualdad

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon.$$

De esta forma, si $x$ es un número racional y $|x| < \delta$ donde $\delta = \dfrac{1}{n_0}$, entonces

$$|a^x - 1| < \varepsilon.$$

Esto significa la validez de la igualdad (7.3).

Si $0 < a < 1$, entonces el lema se demuestra análogamente, sólo es necesario utilizar que la función $a^x$, $0 < a < 1$, decrece estrictamente sobre el conjunto de los números racionales $\boldsymbol{Q}$. En el caso $a = 1$ el lema es evidente. □

Definamos ahora la potencia $a^x$ para cualquier real $x$ y $a > 0$.

**Definición 1.** *Sean $a > 0$, $x$ un número real arbitrario y $\boldsymbol{Q}$ el conjunto de todos los números racionales. Hagamos*

$$a^x = \lim_{\substack{r \to x \\ r \in Q}} a^r. \tag{7.5}$$

Esta definición tiene sentido, ya que cada punto del eje numérico es un punto de adherencia del conjunto de todos los números racionales (véase el corolario del lema 1 en el p. 4.9). Ella es correcta en el sentido de que el límite señalado existe, como esto será demostrado, para cualquier número real $x \in \boldsymbol{R}$. En la demostración utilizaremos la definición del límite de una función según Heine (véase la definición 1 en el p. 5.4).

Sea $a > 0$, $x \in \boldsymbol{R}$, $r_n \in \boldsymbol{Q}$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. Mostremos que la sucesión $\{a^{r_n}\}$ satisface las condiciones del criterio de Cauchy (véase el p. 3.7) y por lo tanto es una sucesión convergente. Para esto es necesario estimar la diferencia

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1|, \quad n \in N, \quad m \in N. \tag{7.6}$$

La sucesión $\{r_n\}$ converge y por consiguiente está acotada (véase el p. 3.4), por esto existe un número $A$ que sin perder generalidad podemos considerar racional (¿por qué?), tal que $-A < r_n < A$. De aquí, en el caso $a \geqslant 1$ tenemos $a^{-A} \leqslant a^{r_n} \leqslant a^A$, y en el caso $a < 1$, respectivamente, $a^{-A} > a^{r_n} > a^A$, $n = 1, 2, \ldots$, por lo que para cualquier $a > 0$ existe un número $B$ tal que

$$a^{r_n} \leqslant B, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.7}$$

$(B = a^A$ cuando $a \geqslant 1$ y $B = a^{-A}$ cuando $a < 1)$, es decir, la sucesión $\{a^{r_n}\}$ está acotada superiormente por el número $B$.

A continuación, por el lema, para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta = \delta_{(\varepsilon)} > 0$ tal que para todos los racionales $r$ que satisfacen la condición $|r| < \delta$ se sumple la desigualdad

$$|a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{B}. \tag{7.8}$$

De la convergencia de la sucesión $\{r_n\}$, por el criterio de Cauchy (véase el p. 3.7), se deduce que para el $\delta > 0$ hallado existe un número $n_\delta$ tal que para todos los $n > n_\delta$ y $m > n_\delta$ se cumple la desigualdad $|r_n - r_m| < \delta$ y esto quiere decir, que por (7.8) se cumple la desigualdad

$$|a^{r_n - r_m} - 1| < \frac{\varepsilon}{B}. \tag{7.9}$$

De (7.6), (7.7) y (7.9) se deriva que para todos los $n \geqslant n_\delta$ y $m \geqslant n_\delta$ es válida la desigualdad $|a^{r_n} - a^{r_m}| < \varepsilon$, de donde, por el criterio de Cauchy, se deduce que la sucesión $\{a^{r_n}\}$ converge.

Así pues, para cualquier sucesión de números racionales $r_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$, la sucesión $a^{r_n}$ converge. De aquí, por el lema 4 del p. 5.6, directamente se deduce la existencia del límite (7.5) de la función $a^r$, $r \in Q$, en el punto $x \in R$.

El hecho de que la definición de $a^x$ es correcta está demostrado. □

La definición 1 es natural en el sentido de que en el caso cuando $x$ es un número racional $r$, entonces la potencia $a^x$ coincide con el valor $a^r$ en el sentido anteriormente conocido. En realidad, si $x = r$ es un número racional, entonces en calidad de sucesión de los números racionales $r_n$, $n = 1, 2, \ldots$, convergente a $x = r$, se puede tomar $r_n = r$, $n = 1, 2, \ldots$ Entonces, por la definición 1

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^r = a^r. \tag{7.10}$$

**Definición 2.** *Sea dado cierto número $a > 0$. La función $a^x$ definida para todos $x \in R$ se llama función exponencial con base $a$.*

Por definición $1^x = 1$ para todos los reales $x$. Por esto el caso $a = 1$ no brinda ningún interés para su estudio y en el futuro no lo analizaremos.

**Teorema 3.** *La función exponencial $a^x$ $(a > 0)$ posee las siguientes propiedades.*

1°. *Cuando $a > 1$, crece estrictamente y cuando $a < 1$ decrece estrictamente sobre todo el eje numérico.*

*Para cualesquiera reales $x$ e $y$ son válidas las igualdades:*

2°. $a^x a^y = a^{x+y}$.

3°. $(a^x)^y = a^{xy}$.

4°. *La función $a^x$ es continua sobre todo el eje numérico.*

5°. *El conjunto de los valores de la función $a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ es el conjunto de todos los números positivos.*

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 1°. Sean para mayor exactitud $a > 1$ y $x < y$. Existen (¿por qué?) los números racionales $r'$ y $r''$ tales que $x < r' < r'' < y$. Escojamos cualesquiera sucesiones de números racionales $\{r_n'\}$ y $\{r_n''\}$ de forma tal que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n' = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n'' = y$ y $r_n' < r' < r'' < r_n''$ para todos los $n = 1, 2, \ldots$. Entonces

$$a^{r_n'} < a^{r'} < a^{r''} < a^{r_n''}; \tag{7.11}$$

pasando al límite cuando $n \to \infty$ obtendremos

$$a^x \leqslant a^{r'} < a^{r''} \leqslant a^y. \tag{7.12}$$

De esta forma, si $x < y$, entonces $a^x < a^y$, lo que significa el crecimiento estricto de la función $a^x$ cuando $a > 1$.

El caso $a < 1$ se analiza de forma análoga.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 2 °. Sean $\{r_n'\}$ y $\{r_n''\}$ sucesiones de números racionales tales que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n' = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n'' = y$ y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n' + r_n'') = x + y$ (véase el p. 3.9). Entonces, por la definición de función exponencial:

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n' + r_n''} = \lim_{n\to\infty}(a^{r_n'}a^{r_n''}) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n'} \lim_{n\to\infty} a^{r_n''} = a^x a^y.$$

Antes de pasar a la demostración de las propiedades siguientes, observemos que de la propiedad 2 ° se deduce que para cualquier real $x$ es válida la igualdad $a^x a^{-x} = a^0 = 1$, por eso $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 4 °[a]. Ante todo señalemos que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in R}} a^x = 1.$$

Esta igualdad, por la monotonía estricta ya establecida sobre todo el eje numérico, de la función $a^x$ (propiedad 1°), se demuestra al pie de la letra como la igualdad (7.3) (véase el lema), sólo no se debe suponer que $x \in Q$, sino analizar cualesquiera $x \in R$.

Sea $x$ dado, $x \in R$, $y = a^x$ y

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x a^{\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

Entonces, por lo dicho

$$\lim_{\Delta x\to 0} a^{\Delta x} = 1$$

y por esto

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = a^x \lim_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x} - 1) = 0,$$

esto significa la continuidad de la función $a^x$ en el punto $x$. □

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 3 °. Sea inicialmente $y = p$ un número entero positivo, entonces aplicando $p$ veces la propiedad 2 ° obtendremos

$$(a^x)^p = \underbrace{a^x \cdot a^x \cdot \ldots \cdot a^x}_{p \text{ veces}} = a^{\overbrace{x + x + \ldots + x}^{p \text{ veces}}} = a^{xp}. \tag{7.13}$$

Sea a continuación $y = \dfrac{1}{q}$, donde $q$ es un número entero positivo. Mostremos que $(a^x)^{1/q} = a^{x/q}$, es decir, que $a^{x/q}$ es la raíz de grado $q$-ésimo del número $a^x$. Pa-

[a] La propiedad 3 ° será demostrada después de la demostración de la propiedad 4 °.

ra esto, por la definición de raíz, es necesario demostrar que $(a^{\frac{x}{q}})^q = a^x$; esto se deduce de la igualdad (7.13).

Sea ahora $y = \dfrac{p}{q}$, $p$ y $q$ son naturales, entonces, por lo ya demostrado

$$(a^x)^{p/q} = [(a^x)^p]^{1/q} = (a^{xp})^{1/q} = a^{xp/q}.$$

Si $y = -\dfrac{p}{q}$, entonces

$$(a^x)^{-p/q} = \frac{1}{(a^x)^{p/q}} = \frac{1}{a^{xp/q}} = a^{-xp/q}.$$

Finalmente, es evidente que $(a^x)^0 = 1 = a^0$. De esta forma está demostrado que para cualquier real $x$ y cualquier racional $r$

$$(a^x)^r = a^{xr}. \tag{7.14}$$

Supongamos ahora dado aún otro número real $y$. Analicemos una sucesión arbitraria $\{r_n\}$ de números racionales convergente a $y$. Entonces, por (7.14), para todos los $n = 1, 2, \ldots$ tendremos

$$(a^x)^{r_n} = a^{xr_n}. \tag{7.15}$$

Por cuanto $\lim\limits_{n \to \infty} xr_n = xy$, entonces por la continuidad de la función $a^x$ demostrada anteriormente

$$\lim_{n \to \infty} a^{xr_n} = a^{xy}. \tag{7.16}$$

Por otro lado, por la definición de la función exponencial

$$\lim_{n \to \infty} (a^x)^{r_n} = (a^x)^y. \tag{7.17}$$

Pasando al límite en la igualdad (7.15) cuando $n \to \infty$, de (7.16) y (7.17) obtendremos la propiedad analizada para cualesquiera $x, y \in \boldsymbol{R}$. □

De las propiedades 2° y 3° se deduce que

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}, \quad a > 0, \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

En efecto

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = (a^{-1})^x = a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \ \square$$

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 5° Sea de nuevo para mayor exactitud $a > 1$. Para demostrar que el conjunto de los valores de la función $a^x$ es el conjunto de todos los números positivos, es decir, el intervalo infinito $(0, +\infty)$, en virtud de su continuidad y crecimiento estricto sobre todo el eje numérico, por el teorema 4 del p. 6.3, es suficiente mostrar que

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0. \tag{7.18}$$

Por cuanto, en virtud de la monotonía de la función $a^x$ los límites (finitos o infinitos) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x$ existen, entonces es suficiente demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a^{x_n'} = 0$$

para cualesquiera sucesiones dadas $x_n \to +\infty$, $x_n' \to -\infty$, por ejemplo, para las sucesiones $x_n = n$, $x_n' = -n$, $n = 1, 2, \ldots$

Por suposición $a > 1$, es decir, $a = 1 + \alpha$, donde $\alpha > 0$. Por esto, de acuerdo con la desigualdad de Bernoulli (véase el lema en el p. 4.9)

$$a^n = (1 + \alpha)^n > n\alpha,$$

y ya que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha = +\infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

De aquí

$$\lim_{n\to\infty} a^{-n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^n} = 0.$$

Con esto, la igualdad (7.18) cuando $a > 1$ está demostrada.

Si ahora $0 < a < 1$, entonces $b = \dfrac{1}{a} > 1$ y

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} b^x} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty} b^x} = +\infty.$$

OBSERVACIÓN 1. Por cuanto de todos los valores el conjunto de la función $a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, constituye el conjunto de todos los números reales positivos, entonces, en particular, para cualquier $x \in R$ tiene lugar la desigualdad

$$a^x > 0.$$

OBSERVACIÓN 2. Si $a > 0$, $b > 0$, entonces para cualquier $x \in R$ es válida la igualdad

$$(ab)^x = a^x b^x.$$

En efecto, si $r_n \to x$, $r_n \in Q$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces

$$(ab)^x = \lim_{n\to\infty}(ab)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} b^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} b^{r_n} = a^x b^x. \ \square$$

Ejercicio. Sean $a > 0$, $b > 0$. Demuéstrese que para cualquier $x \in R$ tiene lugar la igualdad $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

OBSERVACIÓN 3. Si $r$ es un número racional y $r > 0$, entonces $0^r = 0$ y por consiguiente, para cualquier número real $x > 0$ existe el límite

$$\lim_{\substack{r\to x\\ r\in Q}} 0^r = 0.$$

Por esto, para $x > 0$ la definición (7.5) se puede extender al caso $a = 0$ y además tendrá lugar la igualdad

$$0^x = 0, x > 0.$$

Sea $a$ un número positivo distinto de la unidad. De la matemática elemental es conocido que la operación inversa a la elevación a una potencia y que pone en correspondencia a un número dado $x > 0$ el número $y$ tal que $a^y = x$ (claramente, si el $y$ indicado existe), se llama determinación por logaritmos con base $a$. El número $y$ se llama logaritmo de base $a$ del número $x$ y se denota por $\log_a x$. De esta forma, por definición

$$a^{\log_a x} = x \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Cuando $a = e$ el logaritmo del número $x$ se denota por $\ln x$ y se llama logaritmo natural del número $x$.

**Definición 3.** *La función que pone en correspondencia a cada número $x$ su logaritmo $\log_a x$ con base $a$ ($a > 0$, $a \neq 1$) si este logaritmo existe, se llama función logarítmica $y = \log_a x$.*

**Teorema 4.** *La función $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ está definida para todos los $x > 0$ y sobre este conjunto es una función estrictamente monótona (creciente cuando $a > 1$ y decreciente cuando $a < 1$) y continua. Ella tiene las siguientes propiedades:*

1 °) $\log_a x_1x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$, $x_1 > 0, x_2 > 0$;

2 °) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, x > 0, \alpha \in \boldsymbol{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto el conjunto de los valores de la función $a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ es el conjunto de todos los números positivos $(0, +\infty)$, entonces este conjunto es el conjunto de definición de la función inversa, es decir, de la función $\log_a x$.

Con esto, en particular, está demostrada la existencia del logaritmo de cualquier número positivo. Las afirmaciones restantes del teorema 4 se deducen directamente del teorema 4 del p. 6.3 y del teorema 3 del presente párrafo.

Por ejemplo, mostremos cómo la propiedad 1 ° se deriva de las propiedades de la función exponencial indicadas en el teorema 3. Hagamos

$$y_1 = \log_a x_1, \quad y_2 = \log_a x_2,$$

por la definición de logaritmo esto significa que

$$x_1 = a^{y_1}, x_2 = a^{y_2}.$$

De aquí (véase la propiedad 1 ° de la función exponencial en el teorema 3), tenemos

$$x_1x_2 = a^{y_1}a^{y_2} = a^{y_1 + y_2},$$

y por consiguiente, de nuevo, por la definición de logaritmo

$$\log_a x_1x_2 = y_1 + y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2. \; \square$$

**Definición 4.** *Sea dado un número real $\alpha$. La función $x^\alpha$ definida para todos los $x > 0$ se llama función potencial con exponente $\alpha$.*

**Teorema 5.** *La función potencial $a^\alpha$ es continua para todos los $x > 0$.*

En efecto, de la definición de logaritmo tenemos $x = e^{\ln x}$, y por esto $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, es decir, $x^\alpha$ es la composición de la función exponencial $e^u$ y la función logarítmica multiplicada por una constante: $u = \alpha \ln x$. Las funciones exponencial y logarítmica son continuas (véase los teoremas 3 y 4), por lo que en virtud del teorema de la continuidad de la composición de funciones continuas (véase el p. 5.2), la función $x^\alpha$ también es continua. $\square$

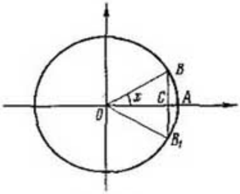



FIG. 34

En el análisis de la función $y = x^\alpha$ se suponía que $x > 0$, ya que cuando $x \leqslant 0$ la expresión $x^\alpha$ tiene sentido en la región de los números reales no para todos los $\alpha$. No obstante, si $\alpha$ es racional y $x^\alpha$ tiene sentido cuando $x < 0$ (por ejemplo, $x^2$, $\frac{1}{x^3}$, $\sqrt[5]{x}$), entonces la función $y = x^\alpha$ será para $\alpha > 0$ continua sobre todo el eje real y para $\alpha < 0$ sobre todo el eje real menos el punto $x = 0$.

En estos casos la función $y = x^\alpha$ también se llama potencial.

Cuando $x \neq 0$ esto se deduce directamente del teorema 5, ya que la función $y = x^\alpha$, si está definida también para todos los $x < 0$, será siempre par o impar y si una función par o impar es continua para $x > 0$, entonces es continua también para $x < 0$ (¿por qué?). Si en el punto $x = 0$ una función par o impar es continua por la derecha e igual a cero, entonces simplemente es continua en este punto (¿por qué?). Este caso tiene lugar cuando $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to +0} x^\alpha = 0 = 0^\alpha,$$

ya que $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ y (véase el teorema 4) $\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$ por lo que en este caso la función $x^\alpha$ es continua también cuando $x = 0$.

## 7.3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Pasemos a la cuestión sobre la continuidad de las funciones trigonométricas. En este caso no daremos las definiciones analíticas estrictas de estas funciones (como fue hecho anteriormente con la función exponencial), sino que utilizamos su definición geométrica, conocida de la matemática elemental. En el futuro $x$ siempre es un número real y por $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ sobrentenderemos las funciones trigonométricas correspondientes del ángulo cuya medida radial es igual a $x$.

**Lema 2.** *Para cualquier real $x$ es válida la desigualdad*

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|.$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos una circunferencia de radio $R$ con centro en el punto $O$. Supongamos que el radio $OB$ forma el ángulo $x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, con el radio $OA$, y el radio $OB_1$ es simétrico al radio $OB$ con respecto a $OA$ (fig. 34).

Bajemos desde el punto $B$ la perpendicular $BC$ al radio $OA$. Entonces, $BC = R\,\mathrm{sen}\,x$ y ya que $BC = CB_1$, tendremos $BB_1 = 2R\,\mathrm{sen}\,x$. Como es conocido, la longitud del arco $BAB_1$ es igual a $2Rx$. La longitud del segmento que une dos puntos no sobrepasa la longitud del arco de circunferencia que une esos mismos puntos lo que significa $2R\,\mathrm{sen}\,x \leqslant 2Rx$, es decir, $\mathrm{sen}\,x \leqslant x$.

Si ahora $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < 0$, entonces $0 < -x \leqslant \frac{\pi}{2}$ y por esto, según lo demostrado, $\mathrm{sen}(-x) \leqslant -x$, pero en este caso $\mathrm{sen}(-x) = |\mathrm{sen}\,x|$ y $-x = |x|$, por consiguiente $|\mathrm{sen}\,x| \leqslant |x|$. De esta forma, si $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, entonces $|\mathrm{sen}\,x| \leqslant |x|$. Si $|x| > \frac{\pi}{2}$, entonces $|\mathrm{sen}\,x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} < |x|$. □

**Teorema 6.** *Las funciones* $y = \mathrm{sen}\,x$, $y = \cos x$ *son continuas sobre todo el eje numérico.*

**Corolario.** *Las funciones* $y = \mathrm{tg}\,x$ *e* $y = \mathrm{ctg}\,x$ *son continuas para todos los* $x$, *para los cuales* $\cos x$, *respectivamente* $\mathrm{sen}\,x$, *no se anulan.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que $|\mathrm{sen}\,\alpha| \leqslant 1$, $|\cos\alpha| \leqslant 1$, para cualquier $\alpha$ y por el lema $\left|\mathrm{sen}\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|\Delta x|$, entonces

$$|\mathrm{sen}(x+\Delta x) - \mathrm{sen}\,x| \leqslant 2\left|\mathrm{sen}\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant |\Delta x|,$$

$$|\cos(x+\Delta x) - \cos x| \leqslant 2\left|\mathrm{sen}\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\mathrm{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant |\Delta x|.$$

De aquí se deduce que cuando $\Delta x \to 0$ los primeros miembros de la desigualdad también tienden a cero. Esto significa la continuidad de las funciones $\mathrm{sen}\,x$ y $\cos x$.

La continuidad de $\mathrm{tg}\,x = \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$ y $\mathrm{ctg}\,x = \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}$ en los puntos en los cuales los denominadores no se anulan, se deduce de la continuidad de $\mathrm{sen}\,x$ y $\cos x$ y del teorema sobre el cociente de funciones continuas (véase el p. 5.2).

**Teorema 7.** *Las funciones trigonométricas inversas* $\mathrm{arcsen}\,x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\,x$ *y* $\mathrm{arcctg}\,x$ *son continuas en sus dominios.*

Esto se deduce directamente de los teoremas 3 y 4 del § 6 y de la continuidad y monotonía estricta de las funciones $\mathrm{sen}\,x$ sobre el segmento $[-\pi/2, \pi/2]$, $\cos(x)$ sobre el segmento $[0, \pi]$, $\mathrm{tg}\,x$ sobre el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y $\mathrm{ctg}\,x$ sobre el intervalo $(0, \pi)$.

## 7.4. CONTINUIDAD DE FUNCIONES ELEMENTALES

La continuidad de las principales funciones elementales demostrada en este párrafo permite obtener también un teorema sobre la continuidad de funciones elementales arbitrarias.

**Teorema 8.** *Cualquier función elemental es continua en todos los puntos de su conjunto de definición.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición cualquier función elemental se obtiene de las principales funciones elementales con ayuda de un número finito de operaciones aritméticas y composiciones (véase el p. 5.3), por esto su continuidad sobre el conjunto de definición se deduce inmediatamente de la continuidad de las principales funciones elementales sobre los conjuntos de su definición (teoremas 1 — 7), de las propiedades de los límites de funciones, relacionadas con las operaciones aritméticas sobre las funciones (véase el p. 5.10) y de la continuidad de la composición de funciones continuas (véase el p. 5.16).

# § 8. COMPARACIÓN DE FUNCIONES. CÁLCULO DE LOS LÍMITES

## 8.1. ALGUNOS LÍMITES NOTABLES

En este punto se calcularán límites que en el futuro se encontrarán en repetidas ocasiones.

**Lema 1.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{8.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos el círculo de radio $R$ con centro en el punto $O$. Supongamos que el radio $OB$ forma el ángulo $x$, $0 < x < \pi/2$, con el radio $OA$. Unamos el punto $A$ y el punto $B$ con un segmento y bajemos una perpendicular desde el punto $A$ hacia el radio $OA$ hasta su intersección en el punto $C$ con la prolongación del radio $OB$ (fig. 35). Entonces el área del triángulo $AOB$ es igual a $\frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen} x$, el área del sector $AOB$ es igual a $\frac{1}{2} R^2 x$ y el área del triángulo $AOC$ es igual a $\frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x$. El triángulo $AOB$ es una parte del sector $AOB$, el que a su vez es una parte del triángulo $AOC$; por esto,

$$\frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x,$$

de donde

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x,$$

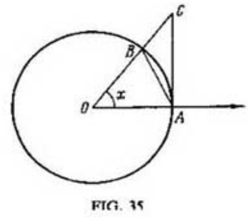



FIG. 35

por lo tanto,

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

o, sustituyendo las magnitudes por sus inversas

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1. \tag{8.2}$$

Observemos que por la paridad de las funciones $\cos x$ y $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ la desigualdad (8.2) es válida también cuando $\pi/2 < x < 0$.

Ya que la función $\cos x$ es continua y $\cos 0 = 1$, entonces de (8.2) cuando $x \to 0$ se deduce (véase el p. 5.10) la igualdad (8.1). □

**Corolario 1.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1. \tag{8.3}$$

En realidad,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

**Corolario 2.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsen x}{x} = 1. \tag{8.4}$$

La función $y = \operatorname{sen} x$ es estrictamente monótona y continua sobre el segmento $[-\pi/2, \pi/2]$, por esto, la función inversa $x = \operatorname{arcsen} y$ también es estrictamente monótona y continua sobre el segmento $[-1, 1]$. Ya que $\operatorname{sen} 0 = 0$ entonces

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{y \to 0} x = \lim_{y \to 0} \operatorname{arcsen} x = 0.$$

Para calcular el límite (8.4), apliquemos la regla de cambio de variables para los límites de las funciones continuas (véase el teorema 6 en p. 5.16). Haciendo $x = \operatorname{sen} y$, tenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} y)}{\operatorname{sen} y} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\operatorname{sen} y} = 1.$$

**Corolario 3.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1. \tag{8.5}$$

Esta igualdad se obtiene de (8.3) análogamente a la anterior.

**Lema 2.**

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{8.6}$$

Anteriormente (véase el p. 4.5) fue demostrado que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{8.7}$$

donde $n = 1, 2, \ldots$ .

De aquí, por el lema del p. 4.3 se deduce que para cualquier sucesión $\{n_k\}$ de números naturales, tal que

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty \tag{8.8}$$

tenemos

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e. \tag{8.9}$$

Sea ahora la sucesión $\{x_k\}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +0$, es decir,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \quad \text{y} \quad x_k > 0. \tag{8.10}$$

Mostremos que $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k} = e$. En este caso, sin perder generalidad se puede considerar que $x_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$ (¿por qué?). Para cualquier $x_k$ se encuentra un natural $n_k$ tal que $n_k + 1 > \dfrac{1}{x_k} \geqslant n_k$, y por lo tanto $\dfrac{1}{n_k+1} < x_k \leqslant \dfrac{1}{n_k}$, además por (8.10) $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$. Por esto tenemos:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{1/x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} \tag{8.11}$$

Notando que por (8.9)

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)} = e$$

y

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = e$$

y al pasar al límite en la desigualdad (8.11), cuando $k\to\infty$ obtenemos

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k} = e. \tag{8.12}$$

Por cuanto $\{x_k\}$ es una sucesión arbitraria, que satisface las condiciones (8.10), entonces con esto está demostrado que

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{1/x} = e. \tag{8.13}$$

Sea ahora la sucesión $\{x_k\}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = -0$, es decir,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0, \quad x_k < 0. \tag{8.14}$$

Pongamos $y_k = -x_k$, entonces $y_k > 0$ y $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = 0$, y sin perder generalidad se puede considerar que $y_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$ . Entonces

$$\lim_{k \to \infty} (1 + x_k)^{1/x_k} = \lim_{k \to \infty} (1 - y_k)^{-1/y_k} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{1 - y_k}\right)^{1/y_k} = \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{y_k}{1 - y_k}\right)^{1/y_k} = \lim_{k \to \infty} (1 + z_k)^{1/z_k + 1},$$

donde

$$z_k = \frac{y_k}{1 - y_k} > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k \to \infty} z_k = 0$$

y por la igualdad (8.13) ya demostrada

$$\lim_{k \to \infty} (1 + x_k)^{1/x_k} = \lim_{k \to \infty} (1 + z_k)^{1/z_k} \cdot \lim_{k \to \infty} (1 + z_k) = e.$$

Pero $\{x_k\}$ era una sucesión arbitraria que satisfacía las condiciones (8.14), por eso

$$\lim_{x \to -0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{8.15}$$

De esta manera, la función $(1 + x)^{1/x}$, $x \neq 0$, tiene en el punto 0 límites por la derecha y por la izquierda iguales al mismo número $e$. Por eso, existe su límite por ambos lados cuando $x \to 0$ también igual a $e$ (véase el p. 5.9). □

**Corolario 1.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0, \ a \neq 1 \tag{8.16}$$

*y, en particular, cuando* $a = e$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

En realidad, utilizando la continuidad de la función logarítmica (véase el teorema 4 del § 7), la continuidad de la composición de funciones (véase p. 5.16) y la igualdad (8.6) obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_a (1 + x)^{1/x} = \log_a \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

**Corolario 2.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \tag{8.17}$$

*En particular, si* $a = e$ *entonces*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{8.18}$$

La función $y = a^x - 1$ es estrictamente monótona y continua en todo el eje real, por eso la función inversa $x = \dfrac{\ln(1 + y)}{\ln a}$ es también estrictamente monótona y continua cuando $y > -1$. Por cuanto, para $x = 0$ tenemos también $y = 0$, entonces las notaciones $x \to 0$ e $y \to 0$ son equivalentes (véase la observación 4 al final del p. 5.16). Utilizaremos para el cálculo del límite (8.17) la regla del cambio de variables (véase el teorema 6 en el p. 5.16). Poniendo $x = \dfrac{\ln(1 + y)}{\ln a}$, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y \ln a}{\ln(1 + y)} = \ln a \frac{1}{\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\ln(1 + y)}{y}} = \ln a.$$

## 8.2. COMPARACIÓN DE FUNCIONES

Como ya sabemos, la suma, la diferencia y el producto de funciones infinitamente pequeñas son también funciones infinitamente pequeñas: no podemos, sin embargo, decir esto de su cociente; la división de un infinitésimo por otro puede llevarnos a los casos más diversos, como se muestra en los ejemplos dados a continuación de las funciones infinitamente pequeñas $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ para $x \to 0$.

Sean, por ejemplo, $\alpha(x) = x$ y $\beta(x) = x^2$, entonces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to 0} x = 0, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Si $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = 2x$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 2$, y si $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$, entonces el límite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ no existe.

Todas las funciones que se analizarán en el futuro en este párrafo se suponen definidas sobre cierto conjunto $X \subset \boldsymbol{R}$, por $x_0$ se entiende o bien un número: $x_0 \in \boldsymbol{R}$ o bien uno de los infinitos $\infty$, $+\infty$ o $-\infty$. En el caso cuando $x_0$ es un número, entonces $x_0$ es un punto adherente del conjunto $X$ y, además, tiene sentido sólo en el caso cuando $x_0$ sea un punto de acumulación del conjunto $X$. Además, puede ocurrir que $x_0 \in X$ o $x_0 \notin X$. Lo último, a ciencia cierta, tendrá lugar si la función analizada tiene algún límite infinito en el punto $x_0$. Si el punto $x_0$ es uno de los infinitos $\infty$, $+\infty$, $-\infty$, entonces, el conjunto $X$ se supone no acotado, superior o inferiormente respectivamente.

Nos ocuparemos de la cuestión de la comparación de funciones en un entorno del punto $x_0$, en particular, de la comparación de las funciones infinitamente pequeñas e infinitamente grandes, estos casos son fundamentales.

**Definición 1.** *Si para las funciones $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ y $g\colon X \to \boldsymbol{R}$ existen un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ y la constante $x > 0$ tales que para todas las $x \in U(x_0) \cap X$ se cumple la desigualdad*

$$|f(x)| \leqslant c\,|g(x)|,$$

*entonces la función $f$ se llama acotada en comparación con la función $g$ sobre $U(x_0) \cap X$ y en este caso se escribe*

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0$$

(se lee: $f(x)$ es $O$ grande de $g(x)$ cuando $x$ tiende a $x_0$).

Subrayemos que la escritura $x \to x_0$ tiene aquí otro sentido que el usual: sólo señala que la propiedad analizada tiene lugar únicamente en un entorno del punto $x_0$; aquí no se habla de ningún límite.

**Lema 3.** *Si $f(x) = \varphi(x)g(x)$, $x \in X$, y existe el límite finito*

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = k,$$

*entonces*

$$f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0.$$

DEMOSTRACIÓN. De la existencia del límite finito $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = k$ por la propiedad 1 ° de límites de funciones del p. 5.10 se deduce la existencia de un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$, tal que la función $\varphi$ es acotada sobre $U(x_0) \cap X$, es decir, se tiene una constante $c > 0$ tal que para todos los $x \in U(x_0) \cap X$ se cumple la desigualdad $|\varphi(x)| \leqslant c$ y, por consiguiente, la desigualdad $|f(x)| = |\varphi(x)|\,|g(x)| \leqslant c\,|g(x)|$. Esto significa que $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$. $\square$

Ejemplos. 1. $\dfrac{1}{x} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ cuando $x \to 0$, ya que $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ cuando $|x| \leqslant 1$.
2. $\dfrac{1}{x^2} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ cuando $x \to \infty$ ya que $\dfrac{1}{x^2} \leqslant \left|\dfrac{1}{x}\right|$ cuando $|x| \geqslant 1$.

La escritura

$$f(x) = O(1),\quad x \to x_0$$

significa que la función $f$ está acotada en cierto entorno del punto $x_0$, por ejemplo, $\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x} = O(1)$ cuando $x \to 0$, ya que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x} = 2$ y, por lo tanto, la función $\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ está acotada en un entorno del punto $x = 0$.

**Definición 2.** *Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son tales que $f = O(g)$ y $g = O(f)$ cuando $x \to x_0$, entonces se llaman funciones de un mismo grado cuando $x \to x_0$; esto se escribe de la forma*

$$f(x) \asymp g(x),\quad x \to x_0.$$

Este concepto tiene mayor contenido en el caso cuando las funciones $f$ y $g$ son o bien infinitamente pequeñas o bien infinitamente grandes cuando $x \to x_0$. Por ejemplo, las funciones $\alpha = x$ y $\beta = x\left(2 + \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$ son infinitesimales del mismo orden cuando $x \to 0$, ya que

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{1}{\left|2 + \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right|} \leqslant \frac{1}{2 - \left|\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right|} \leqslant 1,$$

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leqslant 2 + \left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leqslant 3.$$

**Lema 4.** *Si existe el límite finito $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, entonces $f(x) \asymp g(x)$, $x \to x_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto, cuando $x \to x_0$, está definido el límite de la fracción $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces existe un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ tal que para todos los puntos $x \in U(x_0) \cap X$ se cumple la desigualdad $g(x) \neq 0$. Para estos $x$ pongamos

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Entonces $f(x) = \varphi(x)\, g(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = k$. Por consiguiente, según el lema 3, $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$.

Por cuanto $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, entonces existe también un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ tal que para todos los $x \in U(x_0) \cap X$ tendremos $\dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ (véase la propiedad 2 ° de los límites de las funciones en el p. 5.10), y por consiguiente $f(x) \neq 0$. Para $x \in U(x_0) \cap X$ pongamos $\psi(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$, entonces $g(x) = \psi(x) f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = \dfrac{1}{k}$. Por esto, da nuevo, poe el lema 3, $g(x) = O(f(x))$, $x \to x_0$. □

En calidad de ejemplo tomemos las funciones $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = \operatorname{sen} x^2$. Tenemos $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} = \dfrac{1}{3}$ (véase (8.1)), por eso según el lema 4, las funciones $3x^2$ y $\operatorname{sen} x^2$ son de un mismo orden cuando $x \to 0$.

**Definición 3.** *Las funciones $f\colon X \to R$ y $g\colon X \to R$ se llaman equivalentes cuando $x \to x_0$ si existe un entorno $U = U(x_0)$ del punto $x_0$ y la función $\varphi\colon U \cap X \to R$ tales que para todos los $x \in U \cap X$ tiene lugar la igualdad*

$$f(x) = \varphi(x) g(x) \tag{8.20}$$

y

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \tag{8.21}$$

Si se cumple la propiedad (8.21), entonces se encuentra un entorno $U' = U(x_0)$ del punto $x_0$ tal que para $x \in U' \cap X$ se cumple la desigualdad $\varphi(x) \neq 0$ (véase la propiedad 2 de los límites de las funciones en el p. 5.10). Suponiendo $\psi(x) = \dfrac{1}{\varphi(x)}$, $x \in U' \cap X$ vemos que las condiciones (8.20) y (8.21) son equivalentes a las condiciones

$$g(x) = \psi(x) f(x), \quad x \in U' \cap X, \tag{8.20'}$$

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = 1. \tag{8.21'}$$

De esta forma, si las funciones $f$ y $g$ son equivalentes cuando $x \to x_0$, entonces las funciones $g$ y $f$ también son equivalentes cuando $x \to x_0$, es decir, la equivalencia de dos funciones posee la propiedad de simetría.

Señalemos que, como fácilmente se ve, la propiedad de las funciones de ser funciones de un mismo orden también es una propiedad simétrica, y la propiedad de una función de ser "$O$ grande" con respecto a otra ya no es simétrica.

Ejemplos. 1. $\dfrac{x^2}{1+x^4} \sim x^2$ cuando $x \to 0$. En realidad, suponiendo $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$ obtenemos

$$\frac{x^2}{1+x^4} = \varphi(x)x^2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^4} = 1.$$

2. $\dfrac{x^6}{1+x^4} \sim x^2$ cuando $x \to \infty$. En realidad, si $\varphi(x) = \dfrac{x^4}{1+x^4}$, entonces

$$\frac{x^6}{1+x^4} = \varphi(x)x^2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{1+x^4} = 1.$$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ equivalentes cuando $x \to x_0$ se llaman también *asintóticamente iguales* cuando $x \to x_0$. La *igualdad asintótica* (equivalencia) de las funciones, se denota por el símbolo $\sim$:

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{cuando} \quad x \to x_0. \tag{8.22}$$

De lo dicho anteriormente se deduce que si $f \sim g$ cuando $x \to x_0$, entonces $g \sim f$ cuando $x \to x_0$.

Supongamos que existe un entorno punzado $\mathring{U}(x_0)$ del punto $x_0$ tal que para todos los $x \in \mathring{U}(x_0) \cap X$ se cumplen las desigualdades $f(x) \neq 0$ y $g(x) \neq 0$ y en el caso de $x_0 \in X$ las funciones $f$ y $g$, además, son continuas en el punto $x_0$. Entonces, las condiciones (8.20) y (8.21) son equivalentes a la relación

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in \mathring{U}(x_0)\cap X}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

y, por consiguiente, a la relación

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

En efecto, está claro que estas relaciones, suponiendo que las funciones $f$ y $g$ no se anulan, se deducen inmediatamente de las condiciones (8.20) y (8.21). Viceversa, si ellas se cumplen, entonces es suficiente hacer $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x \in \mathring{U}(x_0) \cap X$ y si $x_0 \in X$, entonces también $\varphi(x_0) = 1$; entonces, evidentemente, para la función $\varphi$ se cumplen las condiciones (8.20) y (8.21).

Si

$$f \sim g \text{ y } g \sim h \quad \text{cuando} \quad x \to x_0, \tag{8.23}$$

entonces

$$f \sim h \quad \text{cuando} \quad x \to x_0. \tag{8.24}$$

En realidad, de las condiciones (8.23) se deduce que existen un entorno $U = U(x_0)$ del punto $x_0$ y las funciones $\varphi\colon U \cap X \to R$ y $\psi\colon U \cap X \to R$ tales que para todos los $x \in U \cap X$ tienen lugar las igualdades

$$f(x) = \varphi(x)g(x),\ g(x) = \varphi(x)h(x)$$

y

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = 1,$$

por esto

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x)h(x),$$

donde $\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\psi(x) = 1$, es decir, se cumple la igualdad asintótica (8.24).

De los resultados del p. 8.1 se deduce que cuando $x \to 0$ es válida la siguiente equivalencia de infinitésimos:

$$x \sim \operatorname{sen} x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arcsen} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1 + x) \sim e^x - 1.$$

De esta equivalencia se deducen también relaciones más generales que enunciaremos en forma de lema independiente.

**Lema 4.** *Si la función $u(x)$ es tal que*

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0, \tag{8.25}$$

*entonces, cuando $x \to x_0$*

$$u(x) \sim \operatorname{sen} u(x) \sim \operatorname{tg} u(x) \sim \operatorname{arcsen} u(x) \sim \operatorname{arctg} u(x) \sim \\ \sim \ln[1 + u(x)] \sim e^{u(x)} - 1. \tag{8.26}$$

DEMOSTRACIÓN. Mostremos, por ejemplo, que

$$\operatorname{sen} u(x) \sim u(x) \quad \text{para} \quad x \to x_0, \tag{8.27}$$

donde $u: X \to R$ y $\lim_{x \to x_0} u(x) = 0$. Definamos para todos los $x \in X$ la función $\varphi$: $X \to R$ de la siguiente forma

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} u(x)}{u(x)} & \text{si} \quad u(x) \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad u(x) = 0 \end{cases} \tag{8.28}$$

y mostremos que

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \tag{8.29}$$

Para esto, dividamos el conjunto $X$ en dos subconjuntos

$$X_1 = \{x \in X: u(x) \neq 0\} \quad \text{y} \quad X_2 = \{x \in X: u(x) = 0\}. \tag{8.30}$$

Sean inicialmente los conjuntos $X_1$ y $X_2$ no vacíos y $x_0$ un punto de adherencia finito o infinitamente alejado de cada uno de ellos.

La función $\dfrac{\operatorname{sen} u(x)}{u(x)}$ está definida sobre el conjunto $X_1$ y por el teorema sobre el límite de la función compuesta (véase el teorema 7 en el p. 5.17) tenemos

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1}} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen} u(x)}{u(x)} = \lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$

Aquí fue utilizada una de las propiedades de los límites de las funciones: si la función $\left(\text{en el caso dado } \frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)$ tiene límite para $u \to u_0$ por algún conjunto (en el caso dado para $u \to 0$ por el eje numérico reducido en el punto $u = 0$), entonces tiene ese mismo límite para $u = u_0$ por cualquier subconjunto (véase el lema 6 en el p. 5.9).

Sobre el conjunto $X_2$ la función $\varphi$ es idénticamente igual a 1, por lo que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_2}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_2}} 1 = 1.$$

De esta forma, sobre cada uno de los conjuntos $X_1$ y $X_2$ la función $\varphi$ cuando $x \to x_0$ tiene un mismo límite igual a 1, y ya que

$$X = X_1 \cup X_2,$$

entonces, cuando $x \to x_0$ tiene ese mismo límite por todo el conjunto $X$ (véase el lema 7 en el p. 5.9), es decir, en el caso analizado la igualdad (8.29) está demostrada.

Si uno de los conjuntos $X_1$ o $X_2$ resulta ser vacío o el punto $x_0$ no es punto de adherencia (finito o infinitamente alejado) de uno de ellos, entonces la igualdad (8.29) también tendrá lugar ya que en estos casos el límite de la función $\varphi$ cuando $x \to x_0$ por el conjunto $X$, se reduce al límite por uno de los conjuntos $X_1$ o $X_2$, para los cuales la igualdad del límite analizado a la unidad por ellos ya está establecida.

Así pues, la igualdad (8.29) está demostrada y ya que de (8.28) se deduce que para todos los $x \in U(x_0) \cap X$ tiene lugar la relación $\operatorname{sen} u(x) = \varphi(x)u(x)$, entonces está demostrada la validez de la igualdad asintótica (8.27).

Análogamente se demuestran las fórmulas asintóticas restantes de (8.26). □

**Definición 4.** *Sea $f: X \to R$ y $\alpha: X \to R$. La función $\alpha$* se llama infinitesimal cuando $x \to x_0$ *en comparación con la función $f$ si existen el entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ y la función infinitesimal para $x \to x_0$, $\varepsilon: X \to R$:*

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0, \tag{8.31}$$

*que para todos los $x \in U(x_0) \cap X$ tiene lugar*

$$\alpha(x) = \varepsilon(x)f(x). \tag{8.32}$$

*Si la función $\alpha$ es infinitesimal para $x \to x_0$ en comparación con la función $f$, entonces se escribe*

$$\alpha(x) = o(f(x)), \quad x \to x_0$$

(se lee "$\alpha(x)$ es o pequeña de la función $f(x)$ cuando $x \to x_0$").

Según esta definición, por ejemplo, la escritura "$\alpha(x) = o(1), x \to x_0$" significa simplemente que la función $\alpha$ es infinitesimal cuando $x \to x_0$.

Si existe tal entorno reducido $\mathring{U} = \mathring{U}(x_0)$ del punto $x_0$, que para todos los puntos $x \in \mathring{U} \cap X$ se cumple la desigualdad $f(x) \neq 0$, y en el caso de $x_0 \in X$ las funciones $\alpha$ y $f$ además son continuas en el punto $x_0$, entonces las condiciones (8.31) — (8.32) son equivalentes a la condición

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathring{U} \cap X}} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = 0. \tag{8.33}$$

En realidad, al suponer que la función $f$ es diferente de cero, la condición (8.33) se deriva directamente de (8.31) — (8.32). Viceversa, si se cumple (8.33), entonces es suficiente hacer

$$\varepsilon(x) = \frac{\alpha(x)}{f(x)}, \quad x \in \overset{\circ}{U} \cap X$$

y si $x_0 \in X$, entonces, además, $\varepsilon(o) = 0$, para que se cumplan condiciones (8.31) — (8.32).

En el caso, cuando $f(x)$ es infinitesimal para $x \to x_0$, entonces se dice que $\alpha = o(f)$ para $x \to x_0$ es *infinitesimal de orden superior que* $f$.

Por ejemplo, $x^3 = o(\operatorname{sen} x^2)$ cuando $x \to 0$, ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen} x^2} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x^2} = 0 \cdot 1 = 0.$$

De igual forma, $\dfrac{1}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ y $x = o(x^2)$ cuando $x \to \infty$.

Señalemos que si $f = o(g)$ para $x \to x_0$, entonces, como antes, $f = O(g)$ para $x \to x_0$. En realidad, sea $f = \varepsilon g$ donde $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon = 0$. Entonces, la función $\varepsilon = \varepsilon(x)$ está acotada sobre la intersección del conjunto $X$ con cierto entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ (véase el p. 5.10): $|\varepsilon(x)| \leqslant c$ y, por consiguiente, $|f(x)| \leqslant c|g(x)|$, $x \in X \cap U(x_0)$. Esto significa que $f = O(g)$, $x \to x_0$.

Reuniendo los conceptos fundamentales introducidos en este punto obtendremos: supongamos que existen un entorno $U = U(x_0)$ del punto $x_0$ y una función $\varphi\colon U \cap X \to R$ tales que

$$f(x) = \varphi(x) g(x),$$

entonces

si la función $\varphi(x)$ está acotada sobre $U$, entonces $f(x) = O(g(x))$;

si $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$, entonces $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$;

si $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, entonces $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$;

Ejercicio 1. Sea $\beta = O(\alpha^2)$ cuando $x \to x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$. Demuéstrese que entonces, $\beta = o(\alpha)$ cuando $x \to x_0$.

Utilizando las igualdades con los símbolos $O$ y $o$ se debe tener en cuenta que éstas no son igualdades en el sentido común de la palabra. Así pues, si

$$\alpha_1 = o(\beta) \quad \text{cuando} \quad x \to x_0, \quad \alpha_2 = o(\beta) \quad \text{cuando} \quad x \to x_0,$$

entonces sería erróneo hacer de aquí la conclusión de que $\alpha_1 = \alpha_2$ como en las igualdades comunes. Por ejemplo, $x^3 = o(x)$ y $x^2 = o(x)$, cuando $x \to 0$, pero $x^2 \neq x^3$.

De forma análoga, si

$$f + O(f) = g + O(f) \quad \text{cuando} \quad x \to x_0,$$

entonces sería erróneo hacer la conclusión de que $f = g$.

Es que un mismo símbolo $O(f)$ o $o(f)$ puede denotar distintas funciones concretas. Esta circunstancia está relacionada con que al definir los símbolos $O(f)$ y $o(f)$ introducimos clases completas de funciones, que presentan determinadas propiedades (la clase de funciones acotadas en un entorno del punto $x_0$ en comparación con la función $f$ y la clase de funciones infinitamente pequeñas en comparación con $f(x)$ cuando $x \to x_0$) y sería correcto escribir no $\alpha = O(f)$ y $\alpha = o(f)$ sino $\alpha \in O(f)$ y $\alpha \in o(f)$. Sin embargo, esto nos llevaría a una mayor complicación del cálculo con las fórmulas, en las cuales se encuentran los símbolos $O$ y $o$. Por eso, conservaremos la notación anterior $\alpha = O(f)$ y $\alpha = o(f)$ pero vamos a leer siempre estas igualdades en correspondencia con las definiciones dadas anteriormente, sólo en un sentido, de izquierda a derecha (si, claro está, no se acuerda otra cosa). Por ejemplo, la notación

$$\alpha = o(f), \quad x \to x_0$$

significa que la función $\alpha$ es infinitesimal en comparación con la función $f$ cuando $x \to x_0$, pero de ningún modo que cualquier infinitésimo en comparación con $f$ es igual a $\alpha$.

En calidad de ejemplo para la utilización de estos símbolos demostremos la igualdad

$$o(cf) = o(f), \tag{8.34}$$

donde $c$ es una constante.

Por lo dicho, es necesario mostrar que si $g = o(cf)$, entonces $g = o(f)$. Efectivamente, si $g = o(cf)$, entonces $g = \varepsilon cf$ donde $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Hagamos $\varepsilon_1 = c\varepsilon$, entonces $g = \varepsilon_1 f$, donde, evidentemente, $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$ y esto significa que $g = o(f)$. □

En conclusión señalemos que lo dicho sobre la utilización de los símbolos $o$ y $O$ no excluye, claro está, que fórmulas aisladas con estos símbolos puedan resultar válidas no sólo cuando se les lee de izquierda a derecha sino también de derecha a izquierda, así que la fórmula (8.34) para $c \neq 0$ es válida cuando se lee de derecha a izquierda.

Ejercicios. Demuéstrese que si $\alpha$ es infinitesimal para $x \to x_0$, entonces para $x \to x_0$:

2. $o(\alpha^2) = o(\alpha)$,
3. $o(\alpha) \cdot O(\alpha) = o(\alpha^2)$,
4. $o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha)$,
5. $\alpha \cdot o(\alpha) = o(\alpha^2)$,
6. $o(\alpha + \alpha^2) = o(\alpha)$,
7. $o^2(\alpha) = o(\alpha^2)$,
8. $cO(\alpha) + o(\alpha) = O(\alpha)$ ($c$ es una constante),
9. $o(o(\alpha)) = o(\alpha)$,
10. $O(O(\alpha)) = O(\alpha)$,
11. Si $|\beta| \leqslant o(\alpha)$ entonces $\beta = o(\alpha)$.
12. Sean $\lim\limits_{t \to b} f(t) = a$ y $f(t) \neq a$ para $t \neq b$ en un entorno del punto $t = b$. Demuéstrese que entonces, si $\varphi(x) = o[\psi(x)]$ cuando $x \to a$, entonces $\varphi[f(t)] = o[\psi[f(t)]]$ cuando $t \to b$; y si $\varphi(x) = O[\psi(x)]$ cuando $x \to a$, entonces $\varphi[f(t)] = O[\psi[f(t)]]$ cuando $t \to b$.

## 8.3. FUNCIONES EQUIVALENTES

Si la función $f(x)$ se sustituye con algún objetivo por $g(x)$, entonces la diferencia $f(x) - g(x)$ se llama *error absoluto* y la razón $\frac{f(x) - g(x)}{f(x)}$, *error relativo* de la sustitución dada. Si se estudia el comportamiento de la función $f(x)$ cuando $x \to x_0$, entonces a menudo es conveniente sustituirla por una función $g(x)$ tal que 1) la función $g(x)$ en un sentido determinado es más sencilla que la función $f(x)$; 2) el error absoluto tiende a cero cuando $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = 0.$$

En este caso se dice que $g(x)$ aproxima la función $f(x)$ en las cercanías del punto $x_0$. Por ejemplo, todas las funciones infinitamente pequeñas $f$ y $g$ para $x \to x_0$ tienen esta propiedad.

Más adelante será demostrado que entre todas ellas sólo las que son equivalentes entre sí

$$g(x) \sim f(x), \quad x \to x_0,$$

tienen la propiedad de que no sólo el error absoluto $f(x) - g(x)$, sino también el relativo $\frac{f(x) - g(x)}{f(x)}$, tiende a cero, cuando $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} = 0.$$

En este sentido, las funciones equivalentes a la función dada la aproximan mejor que otras funciones.

Por ejemplo, las funciones $x, \frac{1}{2}x, 2x, 10x$ son infinitesimales cuando $x \to 0$ al igual que $\operatorname{sen} x$ y, por eso, los errores absolutos, cuando se cambia $\operatorname{sen} x$ de cada una de ellas, tienden a cero cuando $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x - x) = \lim_{x \to 0} \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x - 2x) = \lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x - 10x) = 0.$$

Pero sólo una de todas las funciones mencionadas anteriormente, precisamente $g(x) = x$ tiene la propiedad de que el error relativo en la sustitución $\operatorname{sen} x$ de esta función tiende a cero cuando $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) = 0.$$

La tendencia del error relativo $\frac{f(x) - g(x)}{f(x)}$ a cero cuando $x \to x_0$, se puede escribir usando el símbolo "$o$ pequeña"

$$f(x) - g(x) = o(f(x)), \quad x \to x_0.$$

Enunciemos la propiedad característica mencionada de las funciones equivalentes en forma de teorema.

**Teorema 1.** *Para que las funciones $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ y $g\colon X \to \boldsymbol{R}$ sean equivalentes cuando $x \to x_0$, es necesario y suficiente que para $x \to x_0$ se cumpla la condición*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)). \tag{8.35}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea $f \sim g$ cuando $x \to x_0$, entonces por la definición 3, existen un entorno $U = U(x_0)$ del punto $x_0$ y una función $\varphi\colon U \cap X \to \boldsymbol{R}$ tales que para todos los $x \in U \cap X$ se cumplen las condiciones

$$f(x) = \varphi(x)g(x)$$

y

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1.$$

Entonces

$$f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x) = [\varphi(x) - 1]g(x) = \varepsilon(x)g(x),$$

donde $\varepsilon(x) = \varphi(x) - 1$, $x \in U \cap X$, y por esto $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Esto significa que $\varepsilon(x)g(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, es decir, tiene lugar (8.35). □

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Si se cumple la condición (8.35), entonces, por la definición 4, existen un entorno $U = U(x_0)$ del punto $x_0$ y una función $\varepsilon\colon U \cap X \to \boldsymbol{R}$ tales que para todos los $x \in U \cap X$ se cumplen las condiciones

$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0;$$

entonces $f(x) = [1 + \varepsilon(x)]\, g(x) = \varphi(x)g(x)$, donde $\varphi(x) = 1 + \varepsilon(x)$, $x \in U \cap X$, y por esto $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$. Esto significa que $f \sim g$, $x \to x_0$. □

<u>Ejemplo.</u> $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \to 0$.

En efecto, por el teorema 1, es suficiente mostrar que $\operatorname{ctg} x \sim \dfrac{1}{x}$, $x \to 0$. Esto se deduce inmediatamente de (8.3):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

En el caso cuando existe un entorno reducido $\overset{\circ}{U}(x_0)$ del punto $x_0$ tal que las funciones $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ y $g\colon X \to \boldsymbol{R}$ no se anulan sobre la intersección $\overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$, el teorema 1 es equivalente a la afirmación de que las funciones $f$ y $g$ son equivalentes cuando $x \to x_0$ si y sólo si el error relativo $\dfrac{f(x) - g(x)}{f(x)}$ $\left(\text{o por la simetría del concepto de equivalencia de las funciones, la relación } \dfrac{f(x) - g(x)}{g(x)}\right)$ tiende a cero cuando $x \to x_0$.

**Corolario.** *Sea* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = c \neq 0$. *Entonces* $g \sim cf$ *y* $g(x) = cf(x) + o(f(x))$ *cuando* $x \to x_0$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = c \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{cf(x)} = 1$, y por tanto $g \sim cf$ cuando $x \to x_0$. De aquí, por el teorema 1 tenemos $g(x) = cf(x) + o(cf(x))$, de donde (véase el final del p. 8.2) $g(x) = cf(x) + o(f(x)),\ x \to x_0$. □

**Teorema 2.** *Sean* $f(x) \sim f_1(x)$ *y* $g(x) \sim g_1(x)$ *cuando* $x \to x_0$. *Entonces, si existe*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \tag{8.36}$$

*entonces existe también* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *y además*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \tag{8.37}$$

DEMOSTRACIÓN. Las condiciones $f \sim f_1$ y $g \sim g_1$ cuando $x \to x_0$ significan que existen un entorno $U = U(x_0)$ y las funciones $\varphi\colon U \cap X \to R$ y $\psi\colon U \cap X \to R$ tales que cuando $x \in U \cap X$ tienen lugar las igualdades

$$f(x) = \varphi(x) f_1(x),$$
$$g(x) = \psi(x) g_1(x)$$

y

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = 1.$$

Además, por cuanto existe el límite (8.36), entonces se encuentra un entorno $U_1 = U(x_0)$ del punto $x_0$ tal que la función $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ estará definida sobre el conjunto $U_1 \cap X$ y, por consiguiente, por doquier, sobre este conjunto se cumplirá la desigualdad $g_1(x) \neq 0$. Por cuando $g(x) = \psi(x) g_1(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = 1$, entonces se encuentra un entorno $U_2 = U(x_0) \subset U_1$ del punto $x_0$ tal que para todos los $x \in U_2 \cap X$ se cumplirá la desigualdad $\psi(x) \neq 0$ (véase la propiedad 2 de los límites de las funciones en el p. 5.10), y por lo tanto, la desigualdad $g(x) \neq 0$. Por esto, la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ está definida sobre el conjunto $U_2 \cap X$ y tiene sentido hablar de su límite en el punto $x_0$.

Ahora tenemos:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) f_1(x)}{\psi(x) g_1(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \ \square$$

Por cuanto ambos miembros de la igualdad (8.37) son equivalentes, entonces, del teorema demostrado se deduce que el límite del primer miembro existe si y sólo si existe el límite de segundo miembro y en el caso de que existan ambos, coinciden. Esto hace muy cómodo la utilización del teorema 2 en la práctica: se le puede utilizar para el cálculo de límites, sin saber a priori si existe o no el límite en cuestión.

Ejercicio 13. Demuéstrese la igualdad (8.34) en el caso, cuando el límite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es igual a $\infty$, $+\infty$ o $-\infty$.

## 8.4. MÉTODO DE EXTRACCIÓN DE LA PARTE PRINCIPAL DE LA FUNCIÓN Y SU APLICACIÓN EN EL CÁLCULO DE LÍMITES

Sean dadas las funciones $\alpha: X \to R$ y $\beta: X \to R$. Si la función $\beta$ para todos los $x \in X$ es representable en la forma

$$\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x)), \quad x \to x_0$$

entonces, la función $\alpha$ se llama *parte principal* de la función $\beta$ cuando $x \to x_0$.

Ejemplos. 1. La parte principal de la función $\operatorname{sen} x$ cuando $x \to 0$ es igual a $x$, ya que $\operatorname{sen} x = x + o(x)$ cuando $x \to 0$.

2. Si $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, entonces la función $a_n x^n$ es la parte principal del polinomio $P_n(x)$ cuando $x \to \infty$, ya que $P_n(x) = a_n x^n + o(x^n)$ cuando $x \to \infty$.

Si está dada la función $\beta: X \to R$, entonces su parte principal cuando $x \to x_0$ no se define unívocamente: según el teorema 1, cualquier función $\alpha$ equivalente a $\beta$ cuando $x \to x_0$ es su parte principal cuando $x \to x_0$. Por ejemplo, sea $\beta = x + x^2 + x^3$. Por cuanto, por un lado $x^2 + x^3 = o(x)$ cuando $x \to 0$, entonces $\beta = x + o(x)$ cuando $x \to 0$, y por otro lado, $x^3 = o(x + x^2)$, cuando $x \to 0$, entonces $\beta = x + x^2 + o(x + x^2)$ cuando $x \to 0$. En el primer caso como parte principal puede considerarse $\alpha = x$, en el segundo $\alpha = x + x^2$. No obstante, si nos planteamos un tipo determinado de parte principal, entonces, si se elige acertadamente, se puede lograr que la parte principal del tipo señalado quedará definida unívocamente.

En particular, es válido el siguiente lema.

**Lema 5.** *Sean $X \subset R$, $x_0 \in R$ y $x_0$ un punto de acumulación del conjunto $X$. Si la función $\beta$: $X \to R$ posee para $x \to x_0$ una parte principal del tipo $A(x - x_0)^k$, $A \neq 0$, donde $A$ y $k$ son constantes, entonces entre todas sus partes principales de tal tipo ella está definida de modo único.*

En realidad, sean para $x \to x_0$

$$\beta(x) = A(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k), \quad A \neq 0,$$

y

$$\beta(x) = A_1(x - x_0)^{k_1} + o((x - x_0)^{k_1}), \quad A \neq 0.$$

Entonces $\beta(x) = A(x - x_0)^k$, $\beta(x) \sim A_1(x - x_0)^{k_1}$ cuando $x \to x_0$, $x \in X$. Por esto $A(x - x_0)^k \sim A_1(x - x_0)^{k_1}$, $x \to x_0$, $x \in X$, es decir

$$1 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \frac{A(x - x_0)^k}{A_1(x - x_0)^{k_1}} = \frac{A}{A_1} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} (x - x_0)^{k - k_1}$$

que es válido sólo en el caso de $A = A_1$ y $k = k_1$. $\square$

El concepto de parte principal de una función es útil, en el estudio de infinitésimos e infinitos y con mucho éxito se utiliza en la resolución de variados problemas del análisis matemático. A menudo se logra sustituir un infinitésimo de tipo complejo analítico por una función más sencilla (en cierto sentido), en el entorno del punto dado, salvo los infinitésimos de orden superior. Por ejemplo, si $\beta(x)$ se logra presentar de la forma $\beta(x) = A(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$, esto significa, que salvo los infinitésimos de orden superior que $(x - x_0)^k$ cuando $x \to x_0$ el infinitésimo $\beta(x)$ se comporta en el entorno del punto $x_0$ como la función potencial $A(x - x_0)^k$.

Mostremos en los ejemplos, cómo el método de extracción de la parte principal de los infinitésimos se aplica en el cálculo de los límites de las funciones. En este proceso serán ampliamente utilizadas las relaciones de equivalencia obtenidas en (8.26).

Supongamos es exige hallar el límite (significa demostrar también que existe)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x + x^2) + \operatorname{arcsen} 3x - 5x^3}{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^5}.$$

Utilizando la equivalencia demostrada anteriormente (véase (8.26)) $\ln(1 + u) \sim u$ cuando $u \to 0$ tenemos $\ln(1 + x + x^2) \sim x + x^2$ cuando $x \to 0$, por eso (véase el teorema 1) $\ln(1 + x + x^2) = x + x^2 + o(x + x^2)$. Sin embargo, $o(x + x^2) = o(x)$ (¿por qué?) y $x^2 = o(x)$ cuando $x \to 0$, por lo tanto

$$\ln(1 + x + x^2) = x + o(x) \text{ cuando } x \to 0.$$

Más adelante, $\operatorname{arcsen} 3x \sim 3x$ y como consecuencia de esto

$$\operatorname{arcsen} 3x = 3x + o(3x) = 3x + o(x).$$

Es evidente también que

$$5x^3 = o(x).$$

De la igualdad asintótica $\operatorname{sen} 2x \sim 2x$ obtenemos

$$\operatorname{sen} 2x = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$$

de $\operatorname{tg}^2 x \sim x^2$ tendremos

$$\operatorname{tg}^2 x = x^2 + o(x^2) = o(x)$$

y de $(e^x - 1)^5 \sim x^5$ de forma análoga

$$(e^x - 1)^5 = x^5 + o(x^5) = o(x).$$

Todas estas relaciones se cumplen cuando $x \to 0$. Ahora tenemos

$$\ln(1 + x + x^2) + \operatorname{arcsen} 3x - 5x^3 =$$
$$= x + o(x) + 3x + o(x) - o(x) = 4x + o(x),$$
$$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^5 = 2x + o(x) + o(x) = 2x + o(x),$$

por eso

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x + x^2) + \operatorname{arcsen} 3x - 5x^3}{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^5} = \lim_{x \to 0} \frac{4x + o(x)}{2x + o(x)}.$$

Pero $4x + o(x) \sim 4x$ y $2x + o(x) \sim 2x$ cuando $x \to 0$ y por lo tanto, por el teorema 2,

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x + o(x)}{2x + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{4x}{2x} = 2.$$

De esta manera, el límite buscado existe y es igual a 2.

En el cálculo de límite de funciones con ayuda del método de extracción de la parte principal se debe tener en cuenta que en los casos no estudiados en el p. 8.3, no se pueden sustituir en general, los infinitésimos por sus equivalentes. Así, por ejemplo, al buscar el límite de la expresión $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$ sería un error sustituir la función $\operatorname{sen} x$ por la función $x$ equivalente cuando $x \to 0$. El método natural de resolución de problemas semejantes será dado en 13.4.

Para la búsqueda de límites del tipo $u(x)^{v(x)}$ es conveniente hallar el límite de sus logaritmos. Veamos un ejemplo semejante. Hallemos el límite $\lim\limits_{x\to 0}\cos^{1/x^2} 2x$. Observando que

$$\cos^{1/x^2} 2x = e^{\ln\cos^{1/x^2} 2x} \tag{8.38}$$

vemos que debemos calcular el límite

$$\lim_{x\to 0}\ln\cos^{1/x^2} 2x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 - \operatorname{sen}^2 2x)}{x^2}.$$

Ya que

$$\ln(1 - \operatorname{sen}^2 2x) \sim -\operatorname{sen}^2 2x \sim -(2x)^2 = -4x^2,$$

entonces de aquí, por el teorema 2 de este párrafo, tenemos

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 - \operatorname{sen}^2 2x)}{x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2} = -2;$$

de esta forma

$$\lim_{x\to 0}\ln\cos^{1/x^2} 2x = -2.$$

Por la continuidad de la función exponencial de (8.38) tenemos

$$\lim_{x\to 0}\cos^{1/x^2} 2x = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\cos^{1/x^2} 2x} = \frac{1}{e^2}.$$

El método de cálculo de los límites con ayuda de la extracción de la parte principal de una función es muy cómodo, sencillo y, además, un método bastante general. Algunas dificultades en su aplicación están relacionadas, por ahora, con que todavía no hay un método suficientemente general de extracción de la parte principal de la función. Esta dificultad será eliminada más adelante (véase el § 13).

Ejercicios. Calcúlense los límites:

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsen 2x - \operatorname{sen}^2 x}{x^2 + \ln(1 + 3x)}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos x}{\ln(1 + \operatorname{tg}^2 x)}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - b^x}{x}$ $(a, b > 0;\ a, b \neq 1)$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

19. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$. *Indicación.* Es útil hacer la sustitución $x = \dfrac{\pi}{4} - y$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$.

21. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^{x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}(1 + 2\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{ctg}^2 x$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^{\alpha x})}{\ln(1+e^{\beta x})}$. $(\alpha > 0, \beta > 0)$.

23. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} a}\right)^{1/(x-a)}$

# § 9. DERIVADA Y DIFERENCIAL

## 9.1. DEFINICIÓN DE DERIVADA

**Definición 4.** *Sea la función $y = f(x)$ definida en cierto entorno del punto $x_0 \in \boldsymbol{R}$ y sea $x$ un punto arbitrario de este entorno. Si la relación*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*tiene límite cuando $x \to x_0$, entonces este límite se llama derivada de la función $f$ en el punto $x_0$ o, lo que es lo mismo, para $x = x_0$ y se denota por $f'(x_0)$:*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{9.1}$$

Si introducimos la notación $x - x_0 = \Delta x$, entonces la definición (9.1) se escribe en la forma

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Suponiendo $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, omitiendo las notaciones del argumento y denotando la derivada sencillamente por $y'$ obtenemos otra notación de la definición de derivada:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Si para algún valor de $x_0$ existen los límites

$$\text{o bien } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty, \text{ o bien } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty,$$
$$\text{o bien } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty,$$

entonces se dice que cuando $x = x_0$ existe la *derivada infinita*, respectivamente, *derivada infinita de signo determinado* igual a $+\infty$ o $-\infty$.

En el futuro, por la expresión "la función tiene derivada" entenderemos siempre la existencia de derivada finita, si no se acuerda lo contrario.

**Definición 2.** *Si la función $f$ está definida en algún entorno a la derecha (o a la izquierda) del punto $x_0$ y existe el límite finito o infinito (de determinado signo)*

$\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\left(\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)$, *entonces se denomina respectivamente derivada finita o infinita a la derecha (izquierda) de la función $f$ en el punto $x_0$ y se denota por $f'_+(x_0)$ (o $f'_-(x_0)$).*

*Las derivadas a la derecha y a la izquierda se llaman derivadas unilaterales.*

Del teorema sobre los límites unilaterales (véase el p. 4.5) se deduce que la función $f(x)$, definida en un entorno del punto $x_0$ tiene derivada $f'(x_0)$ si y sólo si $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$ existen y $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. En este caso, $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Si la función $f(x)$ está definida sobre cierto intervalo, y en cada uno de sus puntos existe la derivada (por derivada en un extremo, que pertenece al intervalo, naturalmente se entiende la derivada utilateral correspondiente), entonces la derivada, evidentemente, es también una función definida sobre el intervalo dado, y se le denota por $f'(x)$. Si $y = f(x)$, entonces en lugar de $f'(x_0)$ se escribe también $y'|_{x=x_0}$.

El cálculo de la derivada de una función se llama *derivación*.

*Ejemplos. 1.* $y = c$ ($c$ es una constante).

Ya que $\Delta y = c - c = 0$, entonces $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ y de esta forma

$$c' = 0.$$

2. $y = \operatorname{sen} x$. Tenemos

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2},$$

por eso

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

De esta forma

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

3. $y = \cos x$. Ya que

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2},$$

entonces tendremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\operatorname{sen} x.$$

De esta forma

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x.$$

4. $y = a^x$. Tenemos $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^x - 1)$ y por eso

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

de aquí, por la fórmula (8.17) obtenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

De esta forma $(a^x)' = a^x \ln a$ y, en particular,

$$(e^x)' = e^x.$$

La última igualdad demuestra que el número $e$ tiene una notable propiedad: *la función exponencial con base e tiene derivada que coincide con la misma función.* Con esto se explica que en el análisis matemático en calidad de base de las potencias y de base de los logaritmos se utiliza preferentemente el número $e$. Esto es muy cómodo, ya que simplifica los cálculos.

5. $y = x^n$, $n$ es un número natural. Utilizando la regla de elevación del binomio a una potencia, hallamos

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n,$$

de donde, cuando $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}.$$

Ya que cuando $\Delta x \to 0$ todos los sumandos de la parte derecha que contienen al factor $\Delta x$ a una potencia con exponente natural, tienden a cero, entonces $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$; de esta forma

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Más adelante veremos que esta fórmula es válida cuando $n$ es un número real arbitrario.

## 9.2. DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

**Definición 3.** *La función $y = f(x)$, definida en cierto entorno $U(x_0)$ del punto $x_0 \in R$ se llama diferenciable cuando $x = x_0$, si su incremento en este punto, es decir,*

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad x_0 + \Delta x \in U(x_0),$$

*es representable en la forma*

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \tag{9.2}$$

*donde A es una constante**), *y*

$$\alpha(\Delta x) = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

*La función lineal $A\Delta x$ (de la variable $\Delta x$) se llama diferencial de la función f en el punto $x_0$ y se designa por $df(x_0)$, o, más brevemente, por $dy$.*

De esta forma

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \tag{9.3}$$

$$dy = A\Delta x. \tag{9.4}$$

Dicho de otra forma, la diferenciabilidad de la función $f$ en el punto $x_0$ significa que la función

*) Para un $x_0$ dado la constante $A$ es cierto número, que no depende de $\Delta x$; naturalmente, cuando varía el punto $x_0$, el número $A$ en general varía.

$$\alpha(\Delta x) = \Delta y - A\Delta x, \quad x_0 + \Delta x \in U(x_0),$$

es tal que

$$\alpha(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\Delta x,$$

donde

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0;$$

además, ya que $\alpha(0) = 0$, entonces el valor de la función $\varepsilon(\Delta x)$ para $\Delta x = 0$ no se determina a base de la igualdad $\alpha(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\Delta x$, es decir, la función $\varepsilon(\Delta x)$ está definida sólo en el entorno reducido $\mathring{U}(x_0)$ del punto $x_0$, y, por lo tanto, el límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x)$ se entiende en el sentido del límite por este entorno reducido $\mathring{U}(x_0)$.

Es evidente, que es válida también la afirmación inversa, si para $\Delta x \neq 0$, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, el incremento $\Delta y$ de la función $f$ en el punto $x_0$ es representable en la forma

$$\Delta y = A\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x,$$

donde

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0,$$

entonces la función $f$ será diferenciable en el punto $x_0$. En realidad, si en este caso hacemos

$$\alpha(\Delta x) = \begin{cases} \varepsilon(\Delta x)\Delta x & \text{cuando} \quad \Delta x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando} \quad \Delta x = 0, \end{cases}$$

entonces es evidente que la igualdad (9.2) se cumplirá para todos los $\Delta x$ tales que $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$.

Señalemos que la diferencial $dy = A\Delta x$ como cualquier función lineal, está definida para cualquier valor $\Delta x$: $-\infty < \Delta x < +\infty$, mientras que el incremento $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, naturalmente, se puede analizar sólo para tales $\Delta x$ para los cuales $x_0 + \Delta x$ pertenece al dominio de la función $f$.

Si $A \neq 0$, es decir, si $dy \not\equiv 0$, entonces la diferenciabilidad de la función en el punto $x_0$ significa que salvo los infnitésimos de orden superior que el incremento del argumento $\Delta x$, el incremento de la función $\Delta y$ es una función lineal de $\Delta x$. Utilizando la terminología del p. 8.4, se puede decir que la parte principal del incremento de la función $\Delta y$ en el punto $x_0$ es una función lineal con respecto a $\Delta x$; además, el incremento $\Delta y$ y la diferencial $dy$ son infinitésimos equivalentes cuando $\Delta x \to 0$ (véase el p. 8.3).

Si, además, $A = 0$, es decir, $dy \equiv 0$, entonces $\Delta y = o(\Delta x)$ cuando $\Delta x \to 0$. De esta forma, cuando $A = 0$, el incremento $\Delta y$ es un infinitésimo de orden superior a $\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$.

Para mayor simetría de la notación de la diferencial, el incremento $\Delta x$ lo denotan por $dx$ y lo llaman diferencial de la variable independiente. De esta forma, la diferencial se puede escribir en la forma

$$dy = Adx.$$

Ejemplo. Hallemos la diferencial de la función $y = x^3$. En este caso,

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la parte principal lineal de la expresión que está a la derecha, es igual a $3x^2\Delta x$, por lo que $dy = 3x^2dx$.

Sea $f(x_0) = y_0$. Sustituyendo en (9.3) los valores $\Delta y = f(x) - y_0$, $\Delta x = x - x_0$, $dy = A(x - x_0)$ obtenemos

$$f(x) = y_0 + A(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0. \tag{9.5}$$

Así, si la función $f(x)$ es diferenciable en el punto $x_0$, entonces salvo los infinitésimos de orden superior a $x - x_0$ en la cercanía de $x_0$, es igual a la función lineal; dicho de otro modo, en este caso, la función $f$ en el entorno del punto $x_0$ se comporta "casi como una función lineal"

$$y_0 + A(x - x_0),$$

con la particularidad de que el error en la sustitución de la función $f$ por esta función lineal será tanto menor, cuanto menor sea la diferencia $x - x_0$ y más aún, la relación de este error por la diferencia $x - x_0$ tiende a cero cuando $x \to x_0$.

Si la función $f$ es diferenciable en cada punto de un intervalo, su diferencial es una función de dos variables: la variable del punto $x$ y la variable $dx$:

$$dy = A(x)dx.$$

Aclaremos, ahora, la relación entre diferenciabilidad en el punto y existencia de la derivada en el mismo punto.

**Teorema 1.** *Para que la función $f$ sea diferenciable en un punto $x_0$, es necesario y suficiente que tenga en este punto derivada y, además,*

$$dy = f'(x_0)dx. \tag{9.6}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea la función $f$ diferenciable en el punto $x_0$, es decir, $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$. Entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Por eso la derivada $f'(x_0)$ existe y es igual a $A$. De aquí $dy = f'(x_0)dx$.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos que existe la derivada $f'(x_0)$, es decir, existe el límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x)$$

donde $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$ y para $\Delta x \neq 0$.

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x. \tag{9.7}$$

Ya que $\varepsilon(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$ cuando $\Delta x \to 0$ el hecho de que se cumpla la igualdad (9.7) significa la diferenciabilidad de la función $f$ en el punto $x_0$. □

Subrayemos que en el teorema 1 se habla de la derivada finita.

De esta forma *la diferenciabilidad* de la función $f(x)$ en el punto $x_0$ *es equivalente a la existencia* en este punto *de la derivada finita* $f'(x_0)$.

De lo demostrado se deduce que el coeficiente $A$, que aparece en la definición de la diferencial (véase (9.4)), se determina unívocamente, precisamente $A = f'(x_0)$; de esta forma también *la diferencial de la función en el punto dado se determina unívocamente*. Esto, además, se deriva también del lema del p. 8.4 sobre la unicidad de la parte principal del tipo $A(x - x_0)^k$ de una función infinitesimal.

De la fórmula (9.6) hallamos $y' = \dfrac{dy}{dx}$. El segundo miembro es una fracción, cuyo numerador es la diferencial de la función y el denominador, la diferencial del argumento.

La fórmula (9.6) permite hallar las diferenciales de las funciones, si sus derivadas son conocidas. Así, por ejemplo, utilizando las derivadas halladas en el p. 9.1, obtenemos:

$$dc = 0 \quad (c \text{ es una constante}), \quad d\cos x = -\operatorname{sen} x\,dx,$$
$$d\operatorname{sen} x = \cos x\,dx, \quad da^x = a^x \ln a\,dx,$$

en particular, $de^x = e^x dx$

$$dx^n = nx^{n-1}dx \quad (n \text{ es un número natural}).$$

Como conclusión aclaremos la relación entre la diferenciabilidad y la continuidad en un punto dado.

**Teorema 2.** *Si la función f es diferenciable en un punto, entonces es continua en este punto.*

**Corolario.** *Si la función en algún punto tiene derivada, entonces es continua en este punto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función $f$ diferenciable en el punto $x_0$, es decir, en este punto $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ cuando $\Delta x \to 0$. Entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} o(\Delta x) = 0,$$

lo que significa la continuidad de la función $f$ cuando $x = x_0$. □

El corolario se deriva directamente de los teoremas 1 y 2.

Prestemos atención a que si la función tiene en el punto derivada infinita, entonces puede ser discontinua en ese punto.

Ejercicio 1. Constrúyase un ejemplo de función que tenga en algún punto derivada infinita y sea discontinua en ese punto.

Observemos que la afirmación inversa al teorema 2, no es cierta, es decir, de la continuidad de la función $f$ en el punto dado no se deduce su diferenciabilidad, o, lo que es equivalente (véase el teorema 1), la existencia de la derivada en este punto.

Citemos ejemplos que reafirmen esto.

1. La función $f(x) = |x|$, evidentemente es continua en el punto $x = 0$ (como en todos los demás), pero no tiene derivada en este punto.

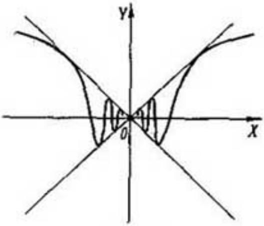



FIG. 36

En realidad, cuando $x \geqslant 0$ tenemos $y = |x| = x$, por eso para el punto $x_0 = 0$ obtendremos $\Delta y = \Delta x$. Por lo tanto

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

De forma análoga, cuando $x \leqslant 0$ tenemos $y = |x| = -x$, por eso para el punto $x_0 = 0$ en este caso obtendremos $\Delta y = -\Delta x$. Por lo tanto

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Con esto queda demostrado que la función $f(x) = |x|$ no tiene derivada cuando $x = 0$, sin embargo, en este punto existen las derivadas tanto por la derecha como por la izquierda.

Señalemos, además, que cuando $x > 0$, tiene lugar la igualdad $(|x|)' = x' = 1$, y cuando $x < 0$, respectivamente, $(|x|)' = (-x)' = -1$; por eso, para cualquier $x \neq 0$ es válida la fórmula

$$|x|' = \operatorname{sign} x.$$

El ejemplo siguiente muestra que una función puede no tener ninguna derivada unilateral en un punto de continuidad.

2. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{cuando } x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando } x = 0. \end{cases}$$

(fig. 36). Entonces, en el punto $x = 0$ tenemos $\Delta y = \Delta x \operatorname{sen} \dfrac{1}{\Delta x}$ de donde $|\Delta y| \leqslant |\Delta x|$ y, por eso, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, es decir, la función analizada es continua cuando $x = 0$. Simultáneamente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{sen} \dfrac{1}{\Delta x}$, y por cuanto $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ no tiene en el punto $x = 0$ límite por la derecha, ni por la izquierda (véase el ejemplo 2 en el p. 4.4), entonces para la función $f(x)$ no existen las derivadas unilaterales cuando $x = 0$.

Ejercicio 2. Introdúzcase el concepto de diferenciabilidad de una función por la derecha (por la izquierda) en un punto dado y demuéstrese que la diferenciabilidad por la derecha (por la izquierda) en un punto dado es equivalente a la existencia, en este punto, de la derivada por la derecha (por la izquierda).

Si la función $f$ tiene derivada en cada punto de cierto intervalo (es diferenciable en cada punto de ese intervalo), entonces se dice que la función $f$ *tiene derivada*, o que ella es *diferenciable sobre el intervalo* indicado.

### 9.3. SENTIDO GEOMÉTRICO DE LA DERIVADA Y LA DIFERENCIAL

Los conceptos de derivada y de diferencial de una función en un punto dado están relacionados con el concepto de la tangente a la gráfica de la función en este punto. Para aclarar esta relación, definiremos ante todo la tangente.

Sea la función $y = f(x)$ definida sobre el intervalo $(a, b)$ y continua en el punto $x_0 \in (a, b)$. Sean $y_0 = f(x_0)$, $M_0 = (x_0, y_0)$, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Tracemos la secante $M_0M$ (fig. 37). Ella tiene la ecuación

$$y = k(\Delta x)(x - x_0) + y_0, \tag{9.8}$$

donde

$$k(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{9.9}$$

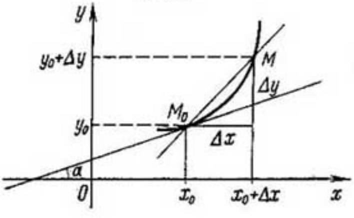
Mostremos que cuando $\Delta x \to 0$ la distancia $|M_0M|$ desde el punto $M_0$ hasta el punto $M$ tiende a cero (en este caso se dice que el punto $M$ tiende al punto $M_0$ y se escribe $M \to M_0$). En realidad, por la continuidad de la función $f$, cuando $x = x_0$, tenemos $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Por lo tanto, cuando $\Delta x \to 0$

$$|M_0M| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0.$$

**Definición 4.** *Si existe el límite finito* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = k_0$, *entonces la recta, cuya ecuación*

$$y = k_0(x - x_0) + y_0, \tag{9.10}$$

FIG. 37



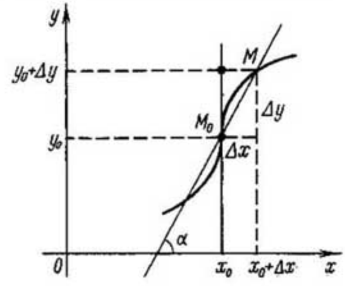



FIG. 38

*se obtiene de la ecuación* $y = k(\Delta x)(x - x_0) + y_0$ *cuando* $\Delta x \to t$ *(fig. 37), se llama tangente* (*oblicua*) *a la gráfica de la función f en el punto* $(x_0, y_0)$.

*Si* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \infty$, *entonces la recta* (*fig.* 38) *cuya ecuación*

$$x = x_0 \tag{9.11}$$

*se obtiene para* $\Delta x \to 0$ *de la ecuación de la secante escrita de la forma* $\dfrac{y}{k(\Delta x)} = x - x_0 + \dfrac{y_0}{k(\Delta x)}$, *se llama tangente* (*vertical*) *a la gráfica de la función f en el punto* $(x_0, y_0)$.

Las rectas (9.10) en el caso del límite finito $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x)$ y (9.11) en el caso, cuando este límite es infinito, se llaman *posiciones límite de la recta* (9.8). Por esto, la definición de tangente dada anteriormente con relación a la gráfica de la función se puede parafrasear de la siguiente forma.

*La posición límite de la secante* $M_0M$ *cuando* $\Delta x \to 0$ *o, lo que es lo mismo, cuando* $M \to M_0$, *se denomina tangente a la gráfica de la función f en el punto* $M_0$.

Observemos ahora que en virtud de la igualdad (9.9) la existencia del límite finito $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ significa la existencia de la derivada finita $f'(x_0) = k$. Por lo tanto, si la función $f$ en el punto $x_0$ tiene la derivada, entonces la ecuación de la tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene la forma

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \ , \tag{9.12}$$

donde $y_0 = f(x_0)$. Si $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, es decir, $f'(x_0) = \infty$, entonces por (9.9) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \infty$ y, por lo tanto, (véase (9.11), la ecuación de la tangente será

$$x = x_0.$$

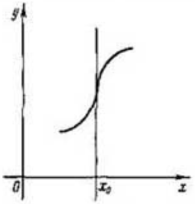



FIG. 39

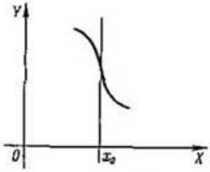



FIG. 40

Como es conocido de la geometría analítica, el coeficiente $f'(x_0)$ en la ecuación (9.12) es igual a la tangente del ángulo (véase la fig. 37) que la recta analizada forma con el sentido positivo del eje $Ox$:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

es decir, la derivada de la función en un punto es igual a la tangente del ángulo entre la tangente en el punto correspondiente de la gráfica de la función y el eje de las abscisas.

El primer sumando del primer miembro de la ecuación (9.12), es decir, la expresión $f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\Delta x$, $\Delta x = x - x_0$, es la diferencial $dy$ de la función $f$ en el punto $x_0$. Por lo tanto, según la igualdad (9.12)

$$y - y_0 = dy,$$

donde $y$ es ordenada variable de la tangente. De esta forma la diferencial de la función en un punto dado, es igual *al incremento de la ordenada de la tangente* en el punto correspondiente de la gráfica de la función.

OBSERVACIÓN. Si en el punto $x_0$ existe el límite infinito $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, entonces puede ser igual a $+\infty$ o $-\infty$. En este caso, cuando $x = x_0$, existe la derivada infinita $y' = +\infty$ o $y' = -\infty$ y la gráfica de la función $y = f(x)$ en el entorno del punto $x_0$ tiene la forma esquemáticamente representada en las figs. 39 y 40.

Es posible también el caso, cuando el límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ no es infinito de un signo determinado y, por lo tanto, en este punto no *existe* derivada finita ni infinita de signo determinado, sino sólo $f'(x_0) = \infty$. Esto, por ejemplo, puede ocurrir, si en el punto $x_0$ existen derivadas unilaterales infinitas de diferentes signos. Entonces, en el entorno del punto $x_0$, la gráfica de la función tiene la forma esquemáticamente representada en las figs. 41 y 42.

Ejemplo. Hallemos la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1; 1).

De acuerdo con el p. 9.1 (véase el ejemplo 5) $y' = 2x$, por eso $y'|_{x=1} = 2$. Según la fórmula (9.12), la tangente buscada tiene la ecuación $y = 2(x - 1) + 1$, es decir, $y = 2x - 1$.

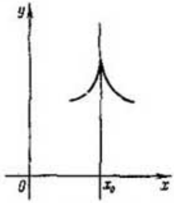



FIG. 41

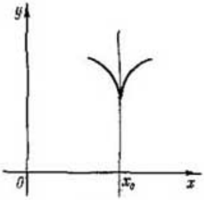



FIG. 42

Si la función $f$ es diferenciable en el punto $x_0$, entonces, sustituyendo en la fórmula (9.5) $A = f'(x_0)$ (véase el teorema 1 del presente párrafo), tenemos

$$f(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

y según (9.12) ($y_{\text{tang}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$) obtenemos

$$f(x) - y_{\text{tang}} = o(x - x), \quad x \to x_0.$$

De esta forma, la tangente oblicua a la gráfica de la función tiene la propiedad de que la diferencia de las ordenadas de la gráfica y esta tangente es un infinitésimo de orden superior para $x \to x_0$ en comparación con el incremento del argumento.

Al contrario, si existe una recta no vertical

$$y_{\text{rec}} = A(x - x_0) + y_0, \tag{9.13}$$

que pasa por el punto $(x_0, y_0)$, y tal que

$$f(x) - y_{\text{rec}} = o(x - x_0), \quad x \to x_0, \tag{9.14}$$

entonces, esta recta es la tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, y_0)$. En realidad, en este caso,

$$f(x) - [A(x - x_0) + y_0] = o(x - x_0),$$

es decir,

$$\Delta y = f(x) - y_0 = A(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

por lo tanto, la función $f$ es diferenciable en el punto $x_0$ (véase (9.2)) y $A = f'(x_0)$ (véase el teorema 1), es decir, la recta indicada coincide con la tangente (9.12).

De esta forma, *la condición* (9.14) *es necesaria y suficiente para que la recta* (9.13) *sea la tangente oblicua a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto* $(x_0, y_0)$. De aquí, en particular, se deduce que si existe la recta (9.13) con la propiedad (9.14), entonces ella es única (lo último se deriva, por ejemplo, de que la diferencial de la función es única, o de que la tangente a la gráfica de la función en el punto dado es única).

## 9.4. SENTIDO FÍSICO DE LA DERIVADA Y DE LA DIFERENCIAL

Sea la función $f(x)$ definida en un entorno del punto $x_0$. Utilizaremos, como anteriormente, las notaciones $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$. Sea, para mayor exactitud, $\Delta x > 0$. La relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, igual a la variación de la variable $y$ sobre el segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ con respecto a la unidad de medición de la variable $x$, naturalmente, se denomina *magnitud de la velocidad media* de la variación de $y$ sobre el segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ con respecto a $x$. Cuando $\Delta x$ tiende a cero, es decir, cuando se contrae el segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ hacia el punto $x_0$, la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ da la magnitud de la velocidad media de la variación $y$ con relación a $x$ en un segmento cada vez menor, que contiene el punto $x_0$. Todo lo dicho, naturalmente, es válido también cuando $\Delta x < 0$ para el segmento $[x_0 + \Delta x, x_0]$.

Por esto, al límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, si él existe, es decir, a la derivada $f'(x_0)$, es natural llamarlo *magnitud de la velocidad* de la variación de la variable $y$ con respecto a la variable $x$ en el punto $x_0$.

Señalemos que si en el punto $x_0$ existe la derivada $f'(x_0)$, entonces, analizando el límite de las velocidades medias de variación de $y$ con respecto a $x$ sobre los segmentos $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$, $(\Delta x > 0)$, que contienen el punto $x_0$ en su interior en calidad de centro, cuando se contraen hacia el punto $x_0$ (para $\Delta x \to 0$) llegaremos en el límite al mismo valor de la magnitud de la velocidad de variación de $y$ con respecto a $x$, en el punto $x_0$, es decir, a $f'(x_0)$. En realidad, la magnitud de la velocidad media de la variación de $y$ con respecto a $x$ sobre el segmento $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ es igual a $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$ (al cociente de la división de la variación de la función por la longitud del segmento, sobre el cual ocurrió esta variación); de aquí

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x}\right] = f'(x_0).$$

Es interesante observar que la relación de diferencias $\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$, en el sentido conocido, aproxima mejor el valor de la derivada $f'$ en el punto $x$ que $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (véase sobre esto en el p. 60.6).

Sobre la interpretación de la derivada como el valor de la velocidad de variación de una magnitud con respecto a otra está basada la aplicación de la derivada al estudio de los fenómenos físicos.

La aplicación de la diferencial está basada en que la sustitución del incremento de la función por su diferencial permite sustituir *cualquier* función diferenciable en el punto $x_0$, por una función lineal en un entorno suficientemente pequeño del punto $x_0$, es decir, considerar que el proceso de variación de la variable dependiente "en un entorno pequeño" ocurre linealmente con respecto al argumento. Dicho de

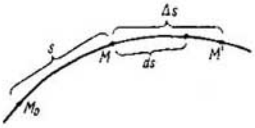



FIG. 43

otra forma, se puede considerar que la variación de la función es directamente proporcional a la variacion del argumento, o como se dice, que el proceso mencionado en este "pequeño entorno" ocurre uniformemente. Con esta sustitución, el error obtenido es un infinitésimo de orden superior que el incremento del argumento.

Ejemplos 1. Sea $s = s(t)$ la ley del movimiento de un punto material*) (fig. 43); $s$, la longitud del recorrido calculado a lo largo de la trayectoria *desde* un punto inicial $M_0$; $t$, el tiempo. Sea $M$ la posición del punto en el instante $t$ y $M'$, en el instante $t + \Delta t$ y $\Delta s$ la longitud del recorrido desde $M$ hasta $M'$, es decir, $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

La relación $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ se denomina en mecánica *magnitud de la velocidad media* del movimiento en el tramo desde $M$ hasta $M'$ y $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v$, magnitud de la velocidad en el punto $M$ o *magnitud de la velocidad instantánea* en el instante $t$; de este modo $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Por la definición de diferencial $ds = vdt$; por lo tanto, la diferencial del recorrido es igual a la distancia que recorrería el punto en un intervalo de tiempo desde el momento $t$ hasta $t + \Delta t$, si este punto se moviera uniformemente con velocidad igual a la velocidad instantánea del punto en el instante $t$. La magnitud $\Delta s$ de la traslación real del punto es igual a $\Delta s = ds + o(\Delta t)$.

Vemos que desde el punto de vista de la mecánica, la sustitución de $\Delta s$ por $ds$ significa que consideramos el movimiento uniforme en el tramo dado (en el sentido de la magnitud de la velocidad**)).

2. Sea $q = q(t)$ la cantidad de electricidad que pasa por la sección transversal de un conductor; $t$, el tiempo; $\Delta t$, un intervalo de tiempo; $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ la cantidad de electricidad que pasa a través de la sección dada en el intervalo de tiempo desde el momento $t$ hasta el momento $t + \Delta t$. Entonces $\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ se llama la *intensidad media de la corriente* en el intervalo de tiempo $\Delta t$ y se denota por $I_{\text{med}}$ y el límite

*) No se debe confundir la ley del movimiento del punto con la ecuación de su trayectoria que tiene el tipo $r = r(t)$, donde $r$ es el radio vector del punto que se mueve.

**) Es necesario tener en cuenta, que la velocidad es un vector y por eso, se caracteriza no sólo por su magnitud sino también por su dirección.

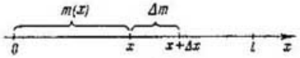



FIG. 44

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} I_{\text{med}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$ se llama *intensidad de la corriente en el instante t dado* o *corriente instantánea* y se denota por $I$. De esta forma, $I = \frac{dq}{dt}$. La diferencial $dq = I\Delta t$ es igual a la cantidad de corriente que pasa a través de la sección transversal del conductor en el intervalo de tiempo $\Delta t$, si la intensidad de la corriente fuera constante e igual a la intensidad de la corriente en el instante $t$. Como siempre, $\Delta q - dq = o(\Delta t)$.

3. Supongamos que está dada una barra no homogénea*) de longitud $l$ y que $m = m(x)$ es la masa de la parte de la barra de longitud $x$, $0 \leqslant x \leqslant l$, medida desde un extremo fijo (fig. 44). Entonces $\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x)$ es la masa de la parte de la barra limitada por los puntos situados respectivamente a las distancias $x$ y $x + \Delta x$ del extremo señalado. La magnitud $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ se llama *densidad lineal media* de la barra en el tramo señalado y se denota por $\rho_{\text{med}}$. El límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \rho_{\text{med}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$ se llama *densidad lineal* de la barra en el punto dado y se denota por $\rho$. De esta forma

$$\rho = \frac{dm}{dx}.$$

Si la densidad $\rho$ es constante, entonces la barra será homogénea.

Para una barra no homogénea arbitraria, en general, la diferencial $dm = \rho\Delta x$ es igual a la masa de la barra homogénea de longitud $\Delta x$ con densidad constante $\rho$, igual a la densidad de la barra analizada en el punto dado.

En este ejemplo vemos que interpretando la derivada como magnitud de la velocidad, debemos comprender esto en el sentido más amplio de la palabra. Por ejemplo, la densidad de la barra es también "velocidad", precisamente, la velocidad de variación de la masa con la variación de la longitud.

## 9.5. REGLAS DEL CÁLCULO DE LAS DERIVADAS, RELACIONADAS CON LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS SOBRE LAS FUNCIONES

Obtengamos ahora las fórmulas para las derivadas de la suma, el producto y el cociente de funciones.

**Teorema 3.** *Sean las funciones* $y_1 = f_1(x)$ *e* $y_2 = f_2(x)$ *definidas en un entorno del punto* $x_0 \in \boldsymbol{R}$ *y que tengan en el propio* $x_0$ derivadas, *entonces las funciones*

*) Una barra se llama homogénea si cualesquiera dos tramos de igual longitud tienen igual masa y no homogénea en el caso contrario.

*$f_1(x) + f_2(x), f_1(x)f_2(x)$, y si $f_2(x_0) \neq 0$, entonces también la función $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, tienen en el punto $x_0$ derivadas y además*

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2', \tag{9.15}$$

$$(y_1 y_2)' = y_1' y_2 + y_1 y_2', \tag{9.16}$$

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2} \tag{9.17}$$

*(en todas las fórmulas (9.15), (9.16) y (9.17) $x = x_0$).*

**Corolario 1.** *Si la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto $x_0$ y $c \in R$, entonces la función $cf(x)$ también tiene derivada en este punto y además*

$$(cy)' = cy' \quad (x = x_0). \tag{9.18}$$

**Corolario 2.** *Si las funciones $y_k = f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, tienen derivadas en el punto $x_0$, entonces cualquier combinación lineal de éstas también tiene derivada en este punto, y además*

$$(c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n)' = c_1 y_1' + \ldots + c_n y_n', \; c_k \in R, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.19}$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Sean $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ funciones definidas en un entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$ y

$$\Delta y_1 = f_1(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0), \quad \Delta y_2 = f_2(x_0 + \Delta x) - f_2(x_0).$$

Para simplificar la escritura, a veces omitiremos la notación del argumento, analizando los incrementos de las funciones sólo en el punto $x_0$.

Si

$$y = y_1 + y_2$$

entonces

$$\Delta y = (y_1 + \Delta y_1 + y_2 + \Delta y_2) - (y_1 + y_2) = \Delta y_1 + \Delta y_2,$$

de donde, para $\Delta x \neq 0$ obtendremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}.$$

Pasando aquí al límite, cuando $\Delta x \to 0$ y observando que en virtud de la existencia de las derivadas de las funciones $f_1$ y $f_2$ en el punto $x_0$, el límite del segundo miembro de esta igualdad existe y es igual a $y_1' + y_2'$, obtendremos que existe también el límite de su primer miembro, es decir, existe la derivada $y'$ y además

$$y' = y_1' + y_2',$$

es decir, la fórmula (9.15) está demostrada.

Si $y = y_1 y_2$, entonces de forma análoga sucesivamente tendremos

$$\Delta y = (y_1 + \Delta y_1)(y_2 + \Delta y_2) - y_1 y_2 = \Delta y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot \Delta y_2 + \Delta y_1 \cdot \Delta y_2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 + y_1 \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \Delta y_2.$$

De la existencia de la derivada $f_2'(x_0)$ se deduce la continuidad de la función $f_2$ en el punto $x_0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y_2 = 0$; además $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y_1}{\Delta x} = y_1'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y_2}{\Delta x} = y_2'$. Por esto, pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, de la igualdad obtenida obtendremos

$$y' = y_1' y_2 + y_1 y_2',$$

es decir, la fórmula (9.16) queda demostrada.

Por último, si $y = \dfrac{y_1}{y_2}$ y $f_2(x_0) \neq 0$, entonces

$$\Delta y = \frac{y_1 + \Delta y_1}{y_2 + \Delta y_2} - \frac{y_1}{y_2} = \frac{\Delta y_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot \Delta y_2}{(y_2 + \Delta y_2) y_2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 - y_1 \dfrac{\Delta y_2}{\Delta x}}{(y_2 + \Delta y_2) y_2}.$$

De aquí, recordando de nuevo que de la existencia de la derivada se deduce la continuidad de la función y, por consiguiente, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y_2 = 0$, obtendremos

$$y' = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2},$$

es decir, la fórmula (9.17) también queda demostrada.

El corolario 1 se deriva inmediatamente de (9.16) si recordamos que $c' = 0$ (véase el ejemplo 1 en el p. 9.1) y el corolario 2 se obtiene inmediatamente de las fórmulas (9.15) y (9.18) por el método de inducción matemática.

OBSERVACIÓN. Utilizando las propiedades de los límites infinitos, relacionadas con las operaciones aritméticas sobre las funciones (véase el p. 4.7) se pueden establecer las propiedades correspondientes de las derivadas infinitas. Por ejemplo, si existe la derivada finita $y_1'(x_0)$ y la derivada infinita $y_2'(x_0)$ (de signo determinado), entonces la función $y(x) \overset{\text{def}}{=} y_1(x) + y_2(x)$, en el punto $x_0$, tiene la derivada infinita del mismo signo. Por ejemplo, si $y_2'(x_0) = +\infty$, entonces $y'(x_0) = +\infty$. En realidad, $\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$. Por eso, si existe el límite finito $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y_1}{\Delta x}$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y_2}{\Delta x} = +\infty$, entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} = +\infty,$$

es decir $y'(x_0) = +\infty$.

Ejemplos. 1. Sea $y = e^x \operatorname{sen} x - 2x^2 \cos x$, según las fórmulas (9.15), (9.17) y (9.19) tenemos

$$y' = (e^x \operatorname{sen} x)' - 2(x^2 \cos x)' = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - 2(2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x).$$

2. Sea $y = tg x$; ya que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, entonces, por la fórmula (9.18) obtenemos

$$y' = \left( \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

de esta forma,

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. De forma análoga, para $y = \mathrm{ctg}\,x$

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{(-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x},$$

es decir,

$$(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Las propiedades 1° y 2° se trasladan a las diferenciales de las funciones. Teniendo en cuenta las mismas suposiciones con respecto a la diferenciabilidad en el punto $x_0$ tenemos

$$d(y_1 + y_2) = dy_1 + dy_2; \qquad d(y_1 y_2) = y_2 dy_1 + y_1 dy_2 \quad ;$$

$$d(cy) = c\,dy; \qquad d\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{y_2^2}.$$

Calculemos por ejemplo, la diferencial del producto $y = y_1 y_2$:

$$dy = y'\,dx = (y_1 y_2)'\,dx = y_1' y_2 dx + y_1 y_2' dx = y_2 dy_1 + y_1 dy_2,$$

ya que $y_1' dx = dy_1$, $y_2' dx = dy_2$.

De forma análoga se demuestran también las fórmulas restantes.

## 9.6. DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

**Teorema 3.** *Sea la función $y = f(x)$ continua y estrictamente monótona en un entorno del punto $x_0$ y supongamos que cuando $x = x_0$ existe la derivada $\frac{df(x_0)}{dx} \neq 0$; entonces la función inversa $x = f^{-1}(y)$ también tiene derivada en el punto $y_0 = f(x_0)$ y además*

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dy}}, \tag{9.20}$$

*es decir, la derivada de la función inversa es igual a la magnitud inversa de la derivada de la función dada.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un entorno del punto $x_0$, sobre el cual la función $f$ está definida, es continua y estrictamente monótona y analizaremos $f$ sólo en este entorno. Entonces, como demostramos anteriormente (véase el p. 6.3), la función inversa está definida y es continua sobre un intervalo que contiene el punto $y_0$ y que es la imagen del entorno del punto $x_0$, señalado anteriormente. Por eso, si $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $y = f(x)$, entonces $\Delta x \to 0$ es equivalente a $\Delta y \to 0$ en el sentido de que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (para la función $f$) y $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$ (para la función $f^{-1}$).

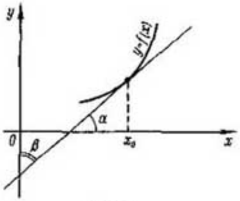



FIG. 45

Para cualesquiera $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ tenemos

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Cuando $\Delta x \to 0$ (o, lo que es lo mismo según lo dicho anteriormente, cuando $\Delta y \to 0$) el límite del *segundo miembro* existe, es decir, existe también el límite del primer miembro, y además

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}.$$

$$\text{Pero } \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{df^{-1}(y_0)}{dy}, \text{ por eso } \frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}. \ \square$$

Este teorema permite una interpretación geométrica evidente (fig. 45). Como es conocido, $\dfrac{df(x_0)}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, donde $\alpha$ es el valor del ángulo formado por la tangente a la gráfica de la función $f$ en el punto $(x_0, y_0)$ con el sentido positivo del eje $Ox$, y $\dfrac{df^{-1}(y_0)}{dx} = \operatorname{tg}\beta$, donde $\beta$ es el valor del ángulo formado por la misma tangente con el eje $Oy$.

Es evidente que $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, y por esto $\dfrac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\beta} = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}.$

Ejercicios. 1. Demuéstrese que si la función $y = f(x)$ es continua y estrictamente monótona en un entorno del punto $x_0$, si en este punto existe la derivada y $\dfrac{df(x_0)}{dx} = 0$, entonces la función inversa $f^{-1}(y)$ tiene en el punto $y_0 = f(x_0)$ derivada infinita; por lo tanto, si consideramos convencionalmente que $\frac{1}{0} = \infty$, entonces la fórmula (9.20) también es válida en este caso.

2. Enúnciese y demuéstrese el análogo del teorema 3 para las derivadas unilaterales (finitas e infinitas).

Ejemplos. 1. $y = \operatorname{arcsen} x$, $x = \operatorname{sen} y$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Aplicando la fórmula (9.20) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}.$$

Ya que $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, entonces $\cos y > 0$, por esto $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. De este modo

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. $y = \operatorname{arcsen} x$, $x = \cos y$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
De forma análoga al ejemplo anterior tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = (\arccos x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

es decir,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. $y = \operatorname{arctg} x$, $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $-\infty < x < +\infty$, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2};$$

así pues

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. $y = \operatorname{arctg} x$, $x = \operatorname{ctg} y$, $0 < y < \pi$, $-\infty < x < \infty$. En este caso

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\operatorname{sen}^2 y = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2},$$

es decir,

$$(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

5. Si $y = \log_a x$, $x = a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $-\infty < y < +\infty$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = (\log_a x)' = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a},$$

es decir,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

en particular, cuando $a = e$ tenemos

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

## 9.7. DERIVADA Y DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

**Teorema 4.** *Supongamos que la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto $x_0$ y la función $z = F(y)$ tiene derivada en el punto $y_0 = f(x_0)$. Entonces la función compuesta $\Phi(x) = F[f(x)]$ también tiene derivada cuando $x = x_0$ y además*

$$\Phi'(x_0) = F'(y_0) f'(x_0). \tag{9.21}$$

Si la función compuesta $\Phi$ la denotamos por el símbolo $\Phi = F \circ f$ (véase el p. 4.2) entonces la fórmula (9.21) se puede escribir de la forma

$$(F \circ f)'(x_0) = F'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Es necesario prestar atención a que la afirmación sobre la existencia en el punto $x_0$ de la derivada de la función compuesta $F[f(x)]$ contiene en sí la suposición de que la función compuesta analizada tiene sentido, es decir, está definida en un entorno del punto $x^0$.

Omitiendo el valor del argumento y utilizando la notación de la derivada con ayuda de las diferenciales, la igualdad (9.21) se puede transcribir de la forma

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 2 del presente párrafo, las funciones $y = f(x)$ y $z = F(y)$ son continuas respectivamente en los puntos $x_0$ e $y_0$ y, por consiguiente, según el teorema 2 del p. 5.2 en un entorno del punto $x_0$ está definida la función compuesta $\Phi(x) = F[f(x)]$.

Hagamos como siempre $\Delta y = y - y_0$, $\Delta x = x - x_0$. La función $F$ tiene en el punto $y_0$ derivada y, por eso, es diferenciable en este punto (véase el p. 9.2), así pues, cuando $\Delta y \neq 0$ tiene lugar

$$\Delta z = F'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y, \tag{9.22}$$

donde $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$. La función $\varepsilon(\Delta y)$ no está definida cuando $\Delta y = 0$. Para el futuro es más cómodo definirla también para $\Delta y = 0$. Esto se puede hacer de forma arbitraria. Lo más sencillo es prolongarla "por continuidad", haciendo $\varepsilon(0) = 0$. La función $\varepsilon(\Delta y)$ definida de esta forma es continua cuando $\Delta y = 0$.

Por cuanto ahora la función $\varepsilon(\Delta y)$ está definida también para $\Delta y = 0$, entonces la igualdad (9.22) se puede analizar también cuando $\Delta y = 0$, y además, evidentemente, sigue siendo válida para cualquier definición complementaria de la función $\varepsilon(\Delta y)$ cuando $\Delta y = 0$, en particular, para $\varepsilon(0) = 0$.

Dividiendo ambos miembros de la igualdad (9.22) por $\Delta x \neq 0$, obtendremos

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{9.23}$$

La función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto $x_0$, es decir, existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{9.24}$$

De la existencia de la derivada $f'(x_0)$ se deduce la continuidad de la función $y = f(x)$ en el punto $x_0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\Delta y = 0.$$

Cuando $\Delta x = 0$ tenemos $\Delta y = 0$. Por consiguiente, el incremento $\Delta y$ analizado como función de $\Delta x$ es continuo en el punto $\Delta x = 0$. Por esto, según la regla del cambio de variable en las relaciones límites que contienen funciones continuas (véase el p. 5.2)

$$\lim_{\Delta x \to 0}\varepsilon(\Delta y) = 0. \tag{9.25}$$

Ahora de (9.23) pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, en virtud de (9.24) y (9.25) obtendremos la fórmula (9.21). ☐

OBSERVACIÓN 1. En la demostración del teorema se dijo que $\varepsilon(\Delta y)$ se puede también definir arbitrariamente cuando $\Delta y = 0$. No obstante, si por ejemplo, tomamos $\varepsilon(0) = 1$, entonces, a primera vista, la fórmula (9.21) no se obtiene, y no sólo porque en este caso no se puede aplicar la regla del cambio de variables para el límite de una función continua, sino también porque si $\varepsilon(0) = 1$ y si existen $\Delta x \neq 0$ tales, para los cuales $\Delta y = 0$, entonces la igualdad (9.25) no será válida. Esto, no obstante, no influye en el resultado final. En efecto, si para $\Delta x \neq 0$ tan pequeños como se quiere existe $\Delta y = 0$, entonces de aquí fácilmente se deduce que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

y, por consiguiente, el segundo sumando en el segundo miembro de la igualdad (9.23) de todas formas tiende a cero cuando $\Delta x \to 0$ (más aún, en este caso, como es fácil ver, todos los términos de la igualdad (9.23) tienden a cero). Hubiéramos podido servirnos también de que de la fórmula (9.2) se deduce que $\alpha(0) = 0$.

En el ejemplo de la demostración del teorema 4 se ve cómo la construcción bien elejida (en el caso dado, simplemente la definición complementaria en el cero de la función $\varepsilon(\Delta y)$ con el cero, que permitió utilizar la regla del cambio de variables para los límites de las funciones continuas) puede simplificar sustancialmente la demostración.

OBSERVACIÓN 2. La fórmula (9.21) para la derivada de una función compuesta sigue siendo válida en el caso cuando por derivadas se entienden las derivadas unilaterales correspondientes, si sólo exigimos preliminarmente que la función compuesta necesaria para la definición de la derivada unilateral (o bilateral) analizada, que aparece en la parte izquierda de la fórmula (9.21), tenga sentido.

**Corolario (invariancia de la forma de la primera diferencial con respecto a la transformación de la variable independiente):**

$$dz = F'(y_0)dy = \Phi'(x_0)dx. \tag{9.26}$$

En esta fórmula $dy = f'(x)dx$ es la diferencial de la función y $dx$, la diferencial de la variable independiente.

De esta forma, la diferencial de la función tiene la misma forma: el producto de la derivada respecto a cierta variable por "la diferencial de esta variable" independientemente de si esta variable es a su vez una función o una variable independiente.

Demostremos esto. De acuerdo con la fórmula (9.6) $dz = \Phi'(x_0)dx$ de donde, aplicando la fórmula (9.21) para la derivada de una función compuesta, obtendremos $dz = F'(y_0)f'(x_0)dx$, pero $f'(x_0)dx = dy$ y por esto $dz = F'(y_0)dy$, lo que se exigía demostrar.

La fórmula (9.26) se puede interpretar de una forma algo diferente si recordamos que la diferencial de una función en un punto es una función lineal con respecto a la diferencial de la variable independiente. Según (9.21) la diferencial de la función $\Phi(x) = F[f(x)]$ tiene la forma $d\Phi = F'(y_0)f'(x_0)dx$, es decir, es el resultado de la sustitución de la función lineal $dy = f(x_0)dx$ por medio de la cual está dada la diferencial $df$ (donde $y = f(x)$) en la función lineal $dz = F'(y_0)dy$, que define la diferencial $dF$ (donde $z = F(y)$). Dicho de otro modo, la diferencial de la composición $\Phi = F \circ f$ es la composición de las diferenciales $dF$ y $df$:

$$d(F \circ f) = dF \circ df.$$

Señalemos que el teorema 4 por inducción se extiende a la superposición (composición) de cualquier número finito de funciones. Por ejemplo, para la función compuesta del tipo $z(y(x(t)))$ en el caso de la diferenciabilidad de las funciones $z(y)$, $y(x)$ y $x(t)$ en los puntos correspondientes, tiene lugar la fórmula

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Si se necesita analizar la función compuesta $z = z(y)$, $y = y(x)$, entonces para la notación de la derivada de $z$ se utiliza también el índice inferior $x$ o $y$ que indica respecto a la cuál de las variables se calcula la derivada, es decir, se escribe $z'_x$ o $z'_y$. A menudo para mayor simplicidad la virgulilla se omite, es decir, en lugar de $z'_x$ se escribe simplemente $z_x$. En estas notaciones la fórmula (9.21) tiene la forma

$$z_x = z_y y_x.$$

Ejemplos. 1. Sea $y = x^\alpha$, $x > 0$, hallemos $\dfrac{dy}{dx}$. Tenemos $x^\alpha = e^u$, donde $u = \alpha \ln x$. Observando que $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\alpha}{x}$, obtenemos

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \frac{de^u}{dx} = \frac{de^u}{du}\cdot\frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{\alpha}{x} = e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

De esta forma,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Así, si $y = x^2$, entonces $y' = 2x$;

si $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, entonces $y' = (-1)x^{-2} = -\dfrac{1}{x}2;$

si $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$, entonces $y' = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Si la función $y = x^{\alpha}$ está definida para $x = 0$ o para $x < 0$, entonces para estos valores de $x$ también tiene derivada $y' = \alpha x^{\alpha - 1}$. Por ejemplo, para $\alpha = 1$, es decir, para la función $y = x$ en el punto $x = 0$ como en todos los otros puntos $y' = 1$.

2. Sea $y = \ln|x|$, $x \neq 0$, entonces para $x > 0$ tenemos

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

y para $x < 0$

$$y' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}.$$

De esta forma, para todas las $x \neq 0$ es válida la fórmula

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}. \tag{9.27}$$

De aquí, por la regla de la diferenciación de una función compuesta, para cualquier función $u(x)$ en los puntos $x$, en los cuales existe la derivada $u'(x)$ y $u(x) \neq 0$, tiene lugar la relación

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}. \tag{9.28}$$

OBSERVACIÓN. La fórmula (9.27) puede ser obtenida inmediatamente para todas las $x \neq 0$ de la fórmula de la diferenciación de las funciones compuestas, si recordamos que para $x \neq 0$ es válida la igualdad $|x|' = \operatorname{sign} x$ (véase el ejemplo 1 al final del p. 9.21). En efecto, haciendo $u = |x|$ obtendremos para todas las $x \neq 0$:

$$\frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{d\ln u}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\operatorname{sign} x = \frac{\operatorname{sign} x}{|x|} = \frac{1}{x}.$$

3. Hallemos la derivada de la función

$$y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|, \quad x \neq a, \quad x \neq -a.$$

En virtud de la fórmula (9.28) tenemos

$$y' = \frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)' = \frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a}\frac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2} = \frac{1}{x^2-a^2}.$$

4. Hallemos la derivada de la función $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + A}|$. Análogamente al ejemplo anterior obtendremos

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+A}}(x + \sqrt{x^2+A})' =$$
$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+A}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+A}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}.$$

5. Sea $y = \ln^2 \operatorname{arcsen}\dfrac{1}{x}$, $x > 1$. Hallemos la derivada y la diferencial de esta función:

$$y' = \left(\ln^2 \operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)' = 2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\left(\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\frac{1}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)' = 2\frac{\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= -\frac{2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}{|x|\sqrt{x^2-1}\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}.$$

De aquí la diferencial se halla inmediatamente por la fórmula $dy = y'\,dx$; no obstante, si no tuviéramos todavía una expresión lista para la derivada, entonces fuera posible hallar la diferencial inmediatamente utilizando su invariancia con respecto a la elección de las variables:

$$d\left(\ln^2\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right) = 2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\,d\left(\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right) =$$

$$= 2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\frac{1}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}\,d\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}{|x|\sqrt{x^2-1}\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}\,dx.$$

5. Introduzcamos con ayuda del teorema 4 una fórmula más que se utiliza a menudo. Sea $y = u^v$, donde $u = u(x) > 0$, $v = v(x)$. Representemos nuestra función en la forma de $y = e^{v\ln u}$ y calculemos $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^{v\ln u}}{dx} = e^{v\ln u}\frac{d}{dx}(v\ln u) = u^v\left(\frac{dv}{dx}\ln u + \frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right) =$$

$$= u^v\frac{dv}{dx}\ln u + vu^{v-1}\frac{du}{dx}. \quad (9.29)$$

De esta forma, la derivada de la función $u^v$ es igual a la suma de dos sumandos, de los cuales el primero coincide con la derivada de $u^v$ suponiendo que $u$ es una constante, y el segundo, con la derivada de $u^v$ suponiendo que $v$ es una constante.

Con ayuda de la regla de diferenciación de una función compuesta se pueden hallar también las *derivadas de funciones dadas implícitamente*.

6. Sea la función diferenciable $y = y(x)$ dada implícitamente con la ecuación $F(x, y) = 0$ (véase el p. 4.2). (La cuestión sobre cómo establecer que la ecuación dada en realidad define cierta función y si ésta será diferenciable, por ahora la deja-

mos a un lado, ella será estudiada en el futuro.) Diferenciando la identidad $F(x, y(x)) \equiv 0$ como una función compuesta se puede calcular la derivada $\frac{dy}{dx}$.

En calidad de ejemplo calculemos la derivada de la función implícita $y(x)$ definida por la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$. En el caso concreto dado la existencia de semejante función no provoca duda ya que ésta por ejemplo, es $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ y también $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$. Diferenciemos la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ considerando $y$ función de $x$. Obtendremos $2x + 2yy' = 0$, de donde $y' = -\frac{x}{y}$.

Con problemas semejantes resulta encontrarse en la geometría. Supongamos, por ejemplo, que se exige hallar la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3; 4). La pendiente $k$ de la tangente es igual a la derivada: $k = y'$, luego en nuestro caso $k = -\frac{x}{y}$. Para el punto analizado $k = -\frac{3}{4}$, por lo que la ecuación de la tangente buscada se puede escribir de la forma $y - 4 = -\frac{3(x - 3)}{4}$, es decir, $3x + 4y - 25 = 0$.

Apliquemos el método de diferenciación de las funciones implícitas a la deducción de fórmulas obtenidas anteriormente por otro camino.

7. Analicemos de nuevo la función $y = u^v$. Hallando el logaritmo obtenemos su definición implícita $\ln y = v \ln u$. Diferenciando ambos miembros de esta ecuación tendremos $\frac{y'}{y} = v' \ln u + \frac{v}{u} u'$ (la expresión $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ se llama *derivada logarítmica* de la función $y(x)$), o $y' = y(v' \ln u + \frac{v}{y} u')$; sustituyendo aquí $y = u^v$ llegamos de nuevo a la fórmula (9.29).

Otro ejemplo. La función $y = \operatorname{arcsen} x$ se define implícitamente con la ecuación $x = \operatorname{sen} y$. Diferenciando ambos miembros respecto a $x$ obtenemos $1 = y' \cos y$ de donde $y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, es decir, lo mismo que en el p. 9.6.

8. En el caso cuando la función se da no con una fórmula, sino con varias, el cálculo de la derivada es necesario a veces realizarlo directamente partiendo de la definición de la derivada. Hallemos, por ejemplo, la derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{cuando} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando} \quad x = 0. \end{cases}$$

Cuando $x \neq 0$ la derivada existe y se calcula por las fórmulas de diferenciación: $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. En el punto $x = 0$ la derivada se obtiene directamente por su definición

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

De esta forma, la función $f(x)$ es diferenciable sobre todo el eje numérico.

OBSERVACIÓN. Utilizando el teorema 4 todas las fórmulas obtenidas para las principales funciones elementales se pueden escribir en una forma algo más general: si $u = u(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u; \qquad (e^u)' = e^u u';$$

$$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u; \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \ (u > 0);$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; \qquad (\operatorname{arc\,sen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}};$$

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}; \qquad (\operatorname{arc\,cos} u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}};$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha - 1} u' \quad (u > 0); \qquad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1 + u^2};$$

$$(a^u)' = a^u u' \ln a; \qquad (\operatorname{arctg} u) = -\frac{u'}{1 + u^2}.$$

De las fórmulas citadas se ve (cuando $u = x$) que las derivadas de las principales funciones elementales son funciones elementales.

Las fórmulas obtenidas en conjunto dan la posibilidad de calcular la derivada y la diferencial de cualquier función elemental en el caso cuando esta derivada existe.

Es necesario tener en cuenta, no obstante, que no cualquier función elemental tiene derivadas en todos los puntos de su dominio. Un ejemplo de función elemental diferenciable no en todos los puntos, es la función $|x| = \sqrt{x^2}$; ella, como sabemos, no tiene derivada en el punto $x = 0$ (véase el p. 9.2).

Ejercicios. 5. Respóndase a las preguntas: ¿Es posible demostrar la fórmula $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ cuando $dy \neq 0$, multiplicando y dividiendo simplemente $\frac{dz}{dx}$ por $dy$? ¿Se puede o no demostrar la fórmula $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ cuando $dx \neq 0$ dividiendo el numerador y el denominador de la fracción $\frac{dx}{dy}$ por $dx$?

6. Aclárese si la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{cuando} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando} \quad x = 0 \end{cases}$$

será continua en el punto $y = 0$. ¿Tendrá derivada en este punto? ¿Tendrá en él derivadas unilaterales?

## 9.8. FUNCIONES HIPERBÓLICAS Y SUS DERIVADAS

**Definición 5.** *Las funciones* $(e^x + e^{-x})/2$ *y* $(e^x - e^{-x})/2$ *se llaman respectivamente coseno hiperbólico y seno hiperbólico y se denotan por* ch $x$ *y* sh $x$:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

Es válida la fórmula

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1. \tag{9.30}$$

En efecto,

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{2x} - e^{-2x} + 2 - e^{-2x}\right) = 1.$$

También es válida la fórmula

$$\mathrm{sh}\, 2x = 2\,\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x;$$

en realidad,

$$2\,\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x = 2\,\frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \mathrm{sh}\, 2x.$$

Estas fórmulas recuerdan las relaciones entre el seno y el coseno usuales (circulares, como a veces los llaman). Para $\mathrm{sh}\, x$ y $\mathrm{ch}\, x$ se tiene otra serie de relaciones, análogas a las fórmulas correspondientes para $\mathrm{sen}\, x$ y $\cos x$. Con esto se explica el nombre de las funciones $\mathrm{sh}\, x$ y $\mathrm{ch}\, x$. El epíteto "hiperbólico" está relacionado con el hecho de que las fórmulas

$$x = a\,\mathrm{ch}\, t, \quad y = a\,\mathrm{sh}\, t \tag{9.31}$$

definen paramétricamente una hipérbola, de forma semejante a como las fórmulas

$$x = a \cos t, \quad y = a\,\mathrm{sen}\, t \tag{9.32}$$

definen paramétricamente una circunferencia. En realidad, si elevamos al cuadrado las igualdades (9.31), restamos una de otra y nos servimos de la fórmula (9.30), entonces obtendremos $x^2 - y^2 = a^2$, es decir, la ecuación de una hipérbola equilátera.

De forma semejante, de la ecuación (9.32) se deriva $x^2 + y^2 = a^2$, es decir, la ecuación de una circunferencia.

Hallemos las derivadas del seno y coseno hiperbólicos.

Observando que $(e^{-x})' = -e^{-x}$, tenemos

$$(\mathrm{ch}\, x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\, x,$$

$$(\mathrm{sh}\, x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\, x.$$

De esta forma

$$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x, \quad (\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x.$$

Los cocientes $\frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$ y $\frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}$ por analogía con los senos y cosenos usuales, respectivamente se llaman *tangente hiperbólica y cotangente hiperbólica* y se denotan por

$$\frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \mathrm{th}\, x, \quad \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x} = \mathrm{cth}\, x.$$

Ejercicios. 7. Calcúlense las derivadas de las funciones $\operatorname{th} x$ y $\operatorname{cth} x$. Constrúyanse las gráficas de las funciones $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{th} x$ e $y = \operatorname{cth} x$. Hállense las derivadas de sus funciones inversas. Exprésense las funciones inversas indicadas y sus derivadas con logaritmos (la función inversa a $\operatorname{ch} x$ se define con la condición complementaria de que sus valores sean no negativos).

Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones (en todos los puntos en los cuales esto es posible).

8. $y = x^2(x^3 - 1)^4$.

9. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$.

10. $y = \sqrt[3]{x}$.

11. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

12. $y = x^2 \operatorname{sen} 2x + 2x \cos 3x$.

13. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

14. $y = \sqrt[5]{x} \operatorname{ctg} 2x - \dfrac{1}{2} \ln x \operatorname{arctg} x$.

15. $y = 2^{x^3} \ln \arccos x$.

16. $y = \arccos \dfrac{1}{x}$.

17. $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$.

18. $y = x^2 |x|$.

19. $y = x^x$.

20. $y = |x| \ln |x|$.

21. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$.

22. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$.

23. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

24. $y = \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

25. $y = \sqrt[x]{x}$.

26. $y = x^{x^a} + x^{a^x} + x^{x^x}$.

27. $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} + (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$.

28. $y = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - \ln \operatorname{cth} \dfrac{x}{2}$.

29. $y = \arccos \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

30. $y = \dfrac{b}{a} x + \dfrac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \times$
$\times \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\dfrac{a - b}{a + b}} \operatorname{th} \dfrac{x}{2} \right) \quad (0 \leqslant b < a)$.

# § 10. DERIVADAS Y DIFERENCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

## 10.1. DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES

**Definición 1.** *Supongamos que la función $f(x)$ está definida sobre el intervalo $(a, b)$, tiene derivada $f'(x)$ en cada punto $x \in (a, b)$ y $x_0 \in (a, b)$. Si para $x = x_0$ existe la derivada de la función $f'(x)$, entonces ella se llama segunda derivada* (o *derivada de segundo orden*) *de la función $f$ y se denota por $f''(x_0)$ o $f^{(2)}(x_0)$.*

De esta forma, $f''(x_0) = [f'(x)]'_{x = x_0}$ o suprimiendo la notación del argumento, $y'' = (y')'$. Análogamente se define la derivada $y^{(n)}$ de cualquier orden $n = 1, 2, \ldots$: *si existe la derivada $y^{(n-1)}$ de orden* $(n - 1)$ (aquí por derivada de orden nulo se sobreentiende la propia función: $y^{(0)} = y$ y por derivada de primer orden, $y'$), entonces, por definición, $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$.

Recordando cómo se definía la derivada (véase el p. 9.1), la definición de la derivada $n$-ésima en un punto $x_0$ se puede escribir en forma de límite

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Señalemos que de la suposición de que la función $f$ tiene en el punto $x_0$ derivada de orden $n$ se deduce, por la definición de la última, que en cierto entorno del punto $x_0$, la función $f$ tiene la derivada de orden $n - 1$ y por consiguiente, para $n > 1$, todas las derivadas de orden inferior $k < n - 1$ (las cuales, además, son continuas en este entorno, por cuanto tienen derivada en todos sus puntos, véanse los teoremas 1 y 2 en el p. 9.2), en particular, la propia función está definida en cierto entorno del punto $x_0$.

Todo lo dicho aquí se extiende de una forma natural a las así llamadas derivadas unilaterales de orden superior, lo que el lector puede hacer por su cuenta sin gran trabajo.

**Definición 2.** *Una función se llama n veces continuamente diferenciable sobre un intervalo, si en todos los puntos de este intervalo tiene derivadas continuas hasta de orden n inclusive* ($n = 1, 2, \dots$).

En este caso, en cualquiera de los extremos del intervalo analizado, cuando este extremo pertenece al intervalo, por derivada, como es usual, entenderemos las correspondientes derivadas unilaterales.

Para que la función sea $n$ veces continuamente diferenciable sobre un intervalo, es suficiente que tenga sobre éste derivada continua de orden $n$. En realidad, según la definición, la existencia de la derivada de orden $n$ sobre el intervalo analizado presupone la existencia sobre éste, de la derivada de orden $n - 1$, y por cuanto de la existencia de la derivada de orden $n - 1$, y por cuanto de la existencia de la derivada de cualquier función en un punto se deduce la continuidad de la función en este punto, entonces la derivada de orden $n - 1$ es continua sobre el intervalo dado. Análogamente, en el caso de $n > 1$ se demuestra la continuidad la derivada de orden $n - 2$, etc.

Ejemplos. 1. $y = x^3, y' = 3x^2, y'' = 6x, y^{(3)} = 6, y^{(4)} = y^{(5)} = \dots = 0$.

2. $y = a^x, y' = a^x \ln a, y'' = a^x \ln^2 a, y^3 = a^x \ln^3 a$. En general, por inducción es fácil establecer que $y^{(n)} = a^x \ln^n a$. En particular, $(e^x)^{(n)} = e^x, n = 0, 1, 2, \dots$ .

3. $y = \operatorname{sen} x$. Calculando sucesivamente las derivadas obtenemos $y' = \cos x$, $y'' = -\operatorname{sen} x, y^{(3)} = -\cos x, y^{(4)} = \operatorname{sen} x$, en lo adelante las derivadas se repiten en el mismo orden. Para escribir el resultado obtenido con una sola fórmula, observemos que $\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, y por esto $y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,
$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$, etc.

Por inducción $(\operatorname{sen} x)^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ para cualquier $n = 1, 2, \dots$ .

4. $y = \cos x$. Observando que $-\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, de forma análoga al ejemplo anterior obtendremos

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), n = 1, 2, \dots$$

## 10.2. DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES DE LA SUMA Y DEL PRODUCTO DE FUNCIONES

**Teorema 1.** *Supongamos que las funciones $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ tienen derivadas de n-ésimo orden en el punto $x_0$; entonces las funciones $y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x)$ e $y_1y_2 = f_1(x)f_2(x)$ también tienen derivadas de orden n en el punto $x_0$, además*

$$(y_1 + y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)}, \tag{10.1}$$

$$(y_1y_2)^{(n)} = y_1^{(n)}y_2 + C_n^1 y_1^{(n-1)}y_2^{(1)} + C_n^2 y_1^{(n-2)}y_2^{(2)} + \ldots + y_1y_2^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k)}, \tag{10.2}$$

*donde, como es usual, $C_n^k$ denota el número de combinaciones de n elementos respecto a k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).*

La fórmula (10.2) usualmente se llama *fórmula de Leibniz* *), *simbólicamente puede ser escrita en la forma siguiente, que es cómoda para ser recordada*

$$(y_1y_2)^{(n)} = (y_1 + y_2)^{[n]}.$$

El índice $[n]$ significa, que la expresion $(y_1 + y_2)^{[n]}$ se escribe de forma semejante al binomio de Newton, es decir en forma de suma con los mismos coeficientes que en la fórmula binomial, sólo que las potencias de las funciones $y_1$ e $y_2$ se sustituyen por sus derivadas del orden correspondiente (véase (10.2)).

Las fórmulas (10.1) y (10.2) se demuestran por inducción. Para $n = 1$, es decir, para las derivadas de primer orden, fueron demostradas en el p. 9.5. Supongamos ahora que estas fórmulas son válidas para las derivadas de $n$-ésimo orden. Demostremos su validez para las derivadas de orden $n + 1$.

En el caso de la suma de functiones tenemos:

$$(y_1 + y_2)^{(n+1)} = [(y_1 + y_2)^{(n)}]' = (y(n) + y_2^{(n)})' = (y_1^{(n)})' + (y_2^{(n)})' = y_1^{(n+1)} + y_2^{(n+1)}.$$

La fórmula (10.2) queda demostrada.

En el caso del producto de functiones los cálculos son algo más complejos:

$$(y_1y_2)^{(n+1)} = [(y_1y_2)^{(n)}]' = \Big[\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k)}\Big]v\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k[y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)} + y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)} =$$

$$= y_1^{(n+1)}y_2^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_k^n y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)} + y_1^{(0)}y_2^{(n+1)}.$$

*) G. Leibniz (1664 — 1761), filósofo y matemático alemán.

Aquí hemos utilizado el hecho de que $C_n^0 = C_n^n = 1$. Ahora, cambiemos el índice de la sumación en la segunda suma, haciendo $k = p - 1$; entonces el nuevo índice de la sumación $p$ variará desde 1 hasta $n$. Después de esto en las sumas obtenidas unamos dos a dos los sumandos que contienen derivadas del mismo orden. Denotando el índice general de la sumación por $p$, tendremos

$$(y_1y_2)^{(n+1)} = y_1^{(n+1)}y_2^{(0)} + \sum_{p=1}^{n} (C_n^p + C_n^{p-1})y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)} + y_1^{(0)}y_2^{(n+1)}.$$

De apuí, notando que $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$ *) y que $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$, obtendremos

$$(y_1y_2)^{(n+1)} = y_1^{(n+1)}y_2^{(0)} + \sum_{p=1}^{n} C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)} + y_1^{(0)}y_2^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)}. \ \square$$

**Corolario.** *Si c es una constante e $y = f(x)$ es una función que tiene derivada de n-ésimo orden en el punto $x_0$, entonces la función $cf(x)$ también tiene derivada de orden n cuando $x = x_0$, además*

$$(cy)^{(n)} = cy^{(n)}. \tag{10.3}$$

En realidad, si en la fórmula (10.2) hacemos $y_1 = c$, $y_2 = y$, entonces obtenemos la fórmula (10.3). Por otra parte, se deduce de una forma completamente evidente si se aplica $n$ veces la fórmula (9.19) a la función $cy$.

Analicemos un ejemplo. Sea $y = x^3 \operatorname{sen} x$. Hallemos con ayuda de la fórmula de Leibniz la derivada $y^{(10)}$:

$$(x^3 \operatorname{sen} x)^{(10)} = x^3 \operatorname{sen}\left(x + 10\frac{\pi}{2}\right) + 10 \cdot 3x^2 \operatorname{sen}\left(x + 9\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ 10 \cdot 9 \cdot 3x \operatorname{sen}\left(x + 8 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 10 \cdot 9 \cdot 8 \operatorname{sen}\left(x + 7\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -x^3 \operatorname{sen} x + 30x^2 \cos x + 270x \operatorname{sen} x - 720 \cos x.$$

## 10.3. DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES DE LAS FUNCIONES COMPUESTAS, DE LAS FUNCIONES INVERSAS Y DE LAS FUNCIONES DADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

*Supongamos que la función $y = y(x)$ tiene segunda derivada en el punto $x_0$, y $z = z(y)$ tiene segunda derivada en el punto $y_0 = y(x_0)$. Entonces la función compuesta $z\,[y(x)]$ tiene para $x = x_0$ segunda derivada, además*

*) En efecto, si se fija uno de los $n + 1$ elementos que componen las combinaciones de $p$ elementos, entonces el número de combinaciones en las cuales intervino este elemento fijado será igual a $C_n^{p-1}$, y el número de combinaciones de las que no intervino será igual a $C_n^p$, por esto $C_{n+1}^p = C_n^{p-1} + C_n^p$.

$$z''_{xx} = z''_{yy}\, y'^2_x + z'_y y''_{xx}. \tag{10.4}$$

En efecto, por cuanto existen las derivadas $y''(x_0)$ y $z''(y_0)$, entonces existen también $y'(x_0)$ y $z'(y_0)$. Por consiguiente, las funciones $y(x)$ y $z(y)$ son continuas en los puntos $x_0$ e $y_0$, respectivamente. Por esto, en cierto entorno del punto $x_0$ está definida la función compuesta $z = z[y(x)]$. Diferenciándola y omitiendo para simplificar la notación del argumento, tenemos $z'_x = z'_y y'_x$; diferenciando otra vez respecto a $x$ obtendremos

$$z''_{xx} = (z'_y)'_x y'_x + z'_y y''_{xx} = z''_{yy} y'^2_x + z'_y y''_{xx}. \ \square$$

De forma análoga se calculan, en las suposiciones correspondientes, las derivadas de orden superior de la función compuesta. Este método permite también demostrar la existencia y hallar las derivadas de orden superior de una functión inversa.

*Sea la función $y = y(x)$ continua y estrictamente monótona en cierto entorno del punto $x_0$ (compárese con el p. 9.6) y supongamos que cuando $x = x_0$ existen las derivadas $y'$ e $y''$, y además $y'(x_0) \neq 0$; entonces la función inversa $x = x(y)$ tiene segunda derivada en el punto $y_0 = y(x_0)$ y además puede ser expresada por los valores de las derivadas $y'$ e $y''$ de la función $y(x)$ cuando $x = x_0$.*

En realidad, omitiendo, como anteriormente las notaciones del argumento, por el teorema 3 del § 9 (véase el p. 9.6), tenemos $x'_y = 1/y'_x$. Calculando la derivada respecto a $y$ de ambas partes e aplicando en la parte derecha la regla de diferenciación de una función compuesta obtenemos

$$x''_{yy} = (x'_y)_y = \left|\frac{1}{y'_x}\right|_x x'_y = -\frac{y''_{xx}}{y'^2_x}\cdot\frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_{xx}}{y'^3}.$$

De forma análoga en las suposiciones correspondientes, se calculan *las derivadas de orden superior para la función inversa.*

De forma semejante se puede proceder en el caso de la tal llamada definición paramétrica de una función.

**Definición 3.** *Sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$ funciones definidas en cierto entorno del punto $t_0$ y una de ellas, por ejemplo, $x = x(t)$ continua y estrictamente monótona en el entorno indicado; entonces existe la función inversa a $x(t)$, la función $t = t(x)$ y en cierto entorno del punto $x_0 = x(t_0)$ tiene sentido la composición $y(t(x))$. Esta función y de x se llama función definida paramétricamente por las fórmulas $x = x(t)$, $y = y(t)$.*

Deduzcamos las fórmulas para la diferenciación de las funciones definidas paramétricamente.

*Si las funciones $x(t)$ e $y(t)$ tienen derivadas en el punto $t_0$ y se $x'$ $(t_0 \neq 0)$, entonces la función $y(t(x))$ definida paramétricamente también tiene derivada en el punto $x_0 = x(t_0)$ y además*

$$y'_x = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}. \tag{10.5}$$

En realidad, por la regla de diferenciación de la función compuesta tenemos (omitiendo la notación del argumento)

$$y'_x = y'_t t'_x; \tag{10.6}$$

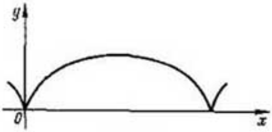



FIG. 46

por la regla de diferenciación de la función inversa

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \tag{10.7}$$

De las fórmulas (10.6) y (10.7) se deduce la fórmula (10.5). *Si además existen* $x''_{tt}(t_0)$ *e* $y''_{tt}(t_0)$, *entonces existe también* $y''_{xx}(x_0)$, *además*

$$y''_{xx} = (y'_x)_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_t t'_x = \frac{y''_{yy}x'_t - y'_t x''_{tt}}{x_t^3}.$$

Análogamente se calculan *las derivadas de orden superior de las funciones dadas en forma paramétrica.*

Analicemos en calidad de ejemplo de función dada en forma paramétrica

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad (a \neq 0, -\infty < t < +\infty). \tag{10.8}$$

Su gráfica se llama *cicloide* (fig. 46). Sea, para mayor exactitud, $a > 0$; entonces la función $x(t) = a(t - \operatorname{sen} t)$ crece estrictamente monótona. En realidad, sea $\Delta t > 0$, entonces, notando que $0 < \operatorname{sen} \frac{\Delta t}{2} < \frac{\Delta t}{2}$, tenemos

$$x(t + \Delta t) - x(t) = a\{\Delta t - [\operatorname{sen}(t + \Delta t) - \operatorname{sen} t]\} =$$
$$= a\left[\Delta t - 2\cos\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta t}{2}\right] > a\left(t\Delta - 2 \cdot 1 \cdot \frac{\Delta t}{2}\right) = 0,$$

lo que significa el crecimiento estrictamente monótono de la función $x(t)$. Por esto existe la función inversa unívoca $t = t(x)$.

A continuación, $x'_t = a(1 - \cos t) = 2a \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} \geqslant 0$, $y'_t = a \operatorname{sen} t$, y $x'_t$ se anula sólo los puntos del tipo $t = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ . Por esto, si $t \neq 2k\pi$, entonces por la regla de diferenciación de una función definida paramétricamente tenemos

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\operatorname{sen} t}{2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2};$$

$$y''_{xx} = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)_x = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_x \frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 t/2} \cdot \frac{1}{2a\operatorname{sen}^2 t/2} = -\frac{1}{4a\operatorname{sen}^4\frac{t}{2}}.$$

Ejercicio 1. Demuéstrese que el cicloide (10.8) es la trayectoria de un punto de una circunferencia de radio $a$ que rueda sin deslizamiento por el eje de las $x$.

## 10.4. DIFERENCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

En el presente punto, para mayor comodidad, a veces, en lugar del símbolo de diferenciación $d$ escribiremos la letra $\delta$, es decir, en lugar de $dy$, $dx$ escribiremos $\delta y$, $\delta x$.

Sea la función $y = f(x)$ diferenciable sobre cierto intervalo $(a, b)$. Como es conocido, su diferencial.

$$dy = f'(x)dx,$$

que se llama también su primera diferencial, depende de dos variables: $x$ y $dx$. Sea $f'(x)$ a su vez diferenciable en cierto punto $x_0 \in (a, b)$. Entonces la diferencial en este punto de la función $dy$ analizada como una función sólo de $x$ (es decir, para cierto $dx$ dado), si para su notación utilizamos el símbolo $\delta$, tiene la forma

$$\delta(dy) = \delta[f'(x)dx]|_{x=x_0} = [f'(x)dx]'|_{x=x_0}\delta x = f''(x_0)dx\,\delta x.$$

**Definición 4.** *El valor de la diferencial $\delta(dy)$, es decir, de la diferencial de la primera diferencial en cierto punto $x_0$ cuando $dx = \delta x$, se llama segunda diferencial de la función $f$ en este punto y se denota por $d^2y$, es decir,*

$$d^2y = f''(x_0)dx^2 \tag{10.9}$$

(por $dx^2$ y en general por $dx^n$, $n \in N$, se denota $(dx)^2$, respectivamente, por $(dx)^n$ y no por $d(x^n)$).

Observemos que en virtud de esta definición $d^2x = 0$ ya que en el cálculo de las diferenciales consideramos el incremento $dx = \Delta x$ constante.

De forma semejante, en el caso cuando la derivada de $(n-1)$-ésimo orden $y^{(n-1)}$ es diferenciable en el punto $x_0$ o lo que es equivalente, cuando para $x = x_0$ existe la derivada de $n$-ésimo $y^{(n)}$, se define *la diferencial de n-ésimo orden $d^ny$* de la función $y = f(x)$ en el punto $x_0$ como la diferencial de la diferencial de $(n-1)$-ésimo orden $d^{n-1}y$ en la cual está tomada $\delta x = dx$:

$$d^ny = \delta(d^{n-1}y)|_{\delta x = dx}.$$

Mostremos que es válida la fórmula

$$d^ny = y^{(n)}dx^n, n = 1, 2, \ldots \tag{10.10}$$

Su demostración la realizaremos por inducción. Para $n = 1$ y $n = 2$ está demostrada. Sea esta fórmula válida para las diferenciales de orden $n = 1$:

$$d^{n-1}y = y^{(n-1)}dx^{n-1}.$$

Entonces, por la definición dada anteriormente, para el cálculo de la diferencial de $n$-ésimo orden $d^{(n)}y$ es necesario calcular inicialmente la diferencial (la denotaremos por el simbolo $\delta$) de $d^{n-1}y$:

$$\delta(d^{n-1}y) = \delta(y^{(n-1)}dx^{n-1}) = (y^{(n-1)}dx^{n-1})'\delta x = y^{(n)}\delta x\,dx^{n-1},$$

y luego poniendo $\delta x = dx$:

$$d^n y = \delta(d^{n-1}y)|_{\delta x = dx} = y^{(n)}dx^n. \ \square$$

De la fórmula (10.10) se deduce que

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}. \tag{10.11}$$

Señalemos algunas propiedades de las diferenciales de orden superior

1°. $d^n(y_1 + y_2) = d^n y_1 + d^n y_2$.
2°. $d^n(cy) = cd^n y$, $c$ es una constante.

3°. $d^n(y_1 y_2) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k dy_1^{n-k} dy_2^k$ o utilizando

la escritura simbólica, $\quad d^n(y_1 y_2) = (dy_1 + dy_2)^{|n|}$,

donde la expresión $(dy_1 + dy_2)^{|n|}$ se escribe según la fórmula del binomio de Newton, es decir, es una suma del tipo $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}y_1 d^k y_2$; y además, para cualquier función $u$ se considera que $d^0 u = u^{(0)}dx^{(0)} = u$.

Estas propiedades se deducen directamente de las fórmulas correspondientes para las derivadas de $n$-ésimo orden (véase (10.1), (10.2), (10.3) y (10.10)).

OBSERVACIÓN IMPORTANTE. Las fórmulas (10.10) y (10.11) son válidas en general para $n > 1$ (a diferencia del caso $n = 1$) si y sólo si $x$ es una variable independiente. En el caso de las diferenciales de orden superior respecto a variables dependientes, todo es más complejo.

Supongamos $z = z(y)$, $y = y(x)$, que tiene sentido la composición $z[y(x)]$ y las funciones $z(y)$ e $y(x)$ son dos veces diferenciables. Entonces

$$dz = z'_y dy,$$

diferenciando otra vez y no recurriendo, para mayor sencillez, al símbolo $\delta$, es decir, considerando la notación $d(dz)$ equivalente a la notación $\delta(dz)|_{\delta x = dx}$ (así se procede siempre en la práctica), además aquí por $\delta(dz)$ se entiende la diferencial respecto a $x$ de la función $dz = z'_y(y)dy = z'_y[y(x)]y'_x(x)dx$, obtenemos

$$d^2z = d(dz) = d(z'_y dy) = d(z'_y)dy + z'_y d(dy) = z''_{yy}dy^2 + z'_y d^2y \tag{10.12}$$

(hemos escrito $dz'_y = z''_{yy}dy$ a base de las fórmulas (9.26), es decir, utilizando la invariancia de la primera diferencial).

Comparando las fórmulas (10.9) y (10.12) vemos que se diferencian en el segundo término y ya que en general $d^2y \neq 0$, entonces son diferentes sustancialmente. Dividiendo ambos miembros de la igualdad (10.12) por $dx^2$ obtenemos la fórmula de la segunda derivada para una función compuesta:

$$z''_{xx} = z''_{yy}y'^2_x + z'_y y''_{xx},$$

que fue obtenida por nosotros anteriormente (véase (10.4)) por otro camino.

De forma semejante, pueden ser calculadas las diferenciales y las derivadas de orden superior de una función compuesta.

Ejercicios. Calcúlense las derivadas y diferenciales:

2. $y^{(8)}$ para la función $y = \sqrt{x}$.

3. $y^{(50)}$ para la funcion
$y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$.

4. $y^{(n)}$ para la función
$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

5. $y^{(n)}$ para la función $y = \operatorname{sen}^2 x$.

6. $y^{(n)}$ para la función $y = x \operatorname{ch} x$.

7. $d^n y$ para la función $y = x^n e^x$.

8. $d^n y$ para la función $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

9. $y''_{xx}$ para la función $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

10. $y'''_{xxx}$ para la función
$x = a(t - \operatorname{sen} t)$,
$y = a(1 - \cos t)$.

11. $y'_x$ e $y''_{xx}$ para la función
$x = y - a \operatorname{sen} y$.

12. $y'_x$ e $y''_{xx}$ para la función
$x^2 + 2xy - y^2 = 1$.

# § 11. TEOREMAS SOBRE EL VALOR MEDIO PARA LAS FUNCIONES DIFERENCIABLES

## 11.1. TEOREMA DE FERMAT

Si la función $f$ tiene en cierto punto $x_0$ derivada finita o infinita, de signo determinado, entonces $f(x)$ se llama función que tiene para $x = x_0$ derivada en el sentido amplio.

**Teorema 1 (de Fermat *)).** *Sea la función $f$ definida en cierto entorno del punto $x_0$ y que toma en este punto su valor máximo o su valor mínimo. Entonces, si para $x = x_0$ existe la derivada en el sentido amplio, ella es igual a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función $f$ definida en el entorno $U(x_0)$ del punto $x_0$ y toma para mayor definición, si $x = x_0$, su valor máximo, es decir, para todos los $x \in U(x_0)$ se cumple la desigualdad $(f(x) \leqslant f(x_0)$. Entonces, si $x < x_0$, tenemos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \tag{11.1}$$

y si $x > x_0$, entonces

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0. \tag{11.2}$$

Si existe la derivada en el sentido amplio, es decir, si existe el límite, finito o infinito, de signo determinado

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

entonces, pasando al límite cuando $x \to x_0 - 0$ en la desigualdad (11.1), obtenemos $f'(x_0) \geqslant 0$; análogamente de la desigualdad (11.2) cuando $x \to x_0 + 0$ encontra-

*) P. Fermat (1601 — 1665), matemático francés.

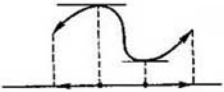


FIG. 47

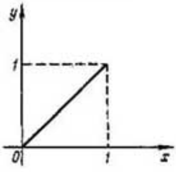



FIG. 48

mos $f'(x_0) \leqslant 0$. Estas desigualdades se cumplen simultáneamente sólo cuando $f'(x_0) = 0$. □

La interpretación geométrica del teorema de Fermat consiste en que si para $x = x_0$ la función $f$ toma su valor máximo o mínimo sobre cierto entorno del punto $x$, entonces la tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$ es paralela al eje $Ox$ (fig. 47).

OBSERVACIÓN. Si la función $f$ toma su valor máximo o mínimo para $x_0 = x$ en comparación con sus valores en los puntos que se encuentran a un lado del punto $x_0$, y tiene en $x_0$ derivada (unilateral), entonces esta derivada puede no igualarse a cero. Así por ejemplo, la función $f(x) = x$, analizada sobre el segmento $[0, 1]$, toma para $x = 0$, su valor mínimo y para $x = 1$ su valor máximo, sin embargo, tanto en un punto como en el otro la derivada es igual a la unidad (véase la fig. 48).

## 11.2. TEOREMAS DE ROLLE, LAGRANGE Y CAUCHY SOBRE LOS VALORES MEDIOS

**Teorema 2. (de Rolle *)).** *Sea la función $f$*

1) *continua sobre el segmento $[a, b]$;*

2) *tenga en cada punto del intervalo $(a, b)$ derivada finita o infinita, de signo determinado;*

3) *tome valores iguales en los extremos del segmento, es decir, $f(a) = f(b)$; entonces existe al menos un punto $\xi$, $a < \xi < b$, tal que $f'(\xi) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Ya sabemos que una función, continua sobre segmento, toma sus valores máximo y mínimo en ciertos puntos de este segmento (véase el p. 6.1). Sea $M = \max f(x)$, $m = \min f(x)$; entonces para todos los $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Si $m = M$, entonces la función $f$ es constante y, por lo tanto $f' \equiv 0$ sobre $[a, b]$. En calidad de punto $\xi$ en este caso se puede tomar cualquier punto del intervalo $(a, b)$.

Si $m \neq M$, entonces de la condición $f(a) = f(b)$ se deduce que, al menos uno de los valores $m$ o $M$ no se alcanza en los extremos del segmento $[a, b]$. Sea $M$ este valor, es decir, existe un punto $\xi \in (a, b)$, tal que $f(\xi) = M$, y por lo tanto, en este

*) M. Rolle (1652 — 1719), matemático francés.

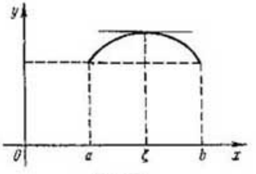



FIG. 49

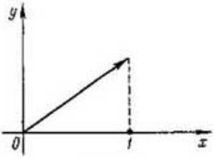



FIG. 50

punto $\xi$ la función $f$ alcanza su valor máximo también sobre el intervalo $(a, b)$. Por esto del teorema de Fermat se deduce que $f'(\xi) = 0$. □

El teorema de Rolle geométricamente significa que en la gráfica de una función, continua sobre un segmento y diferenciable en él, que toma valores idénticos en sus extremos, existe un punto en el cual la tangente es paralela al eje de las abscisas (fig. 49).

Señalemos que todas las premisas del teorema de Rolle son esenciales. Para convencerse de esto, es suficiente mostrar los ejemplos de funciones, para los cuales se cumplieran dos de las tres condiciones del teorema, pero no se cumpliera la tercera y para las cuales no existiera el punto $\xi$ tal que $f'(\xi) = 0$. (Durante esto, por la condición 3, en la que se habla sobre los valores de la función en los puntos extremos del intervalo, se debe analizar solamente las funciones, definidas sobre los segmentos.)

La función $f(x)$, definida sobre el segmento Ç0, 1] e igual a $x$ si $0 \leqslant x < 1$, y a 0 si $x = 1$, satisface las condiciones 2 y 3, pero no satisface la condición 1 (fig. 50).

La función $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, satisface las condiciones 1 y 3, pero no satisface la condición 2 (fig. 51).

Y por último, la función $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, satisface las condiciones 1 y 2, pero no satisface la condición 3 (véase la fig. 48).

Para todas estas funciones no existe un punto en el cual sus derivadas se hagan cero.

Llamemos la atención al hecho de que, según las condiciones del teorema de Rolle, el segmento $[a, b]$ puede contener puntos en los cuales la función tiene derivada infinita, es decir, en los cuales o bien $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, o bien $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$. Esta exigencia no se puede debilitar, sustituyéndola por la condi-

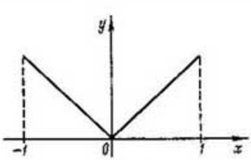



FIG. 51

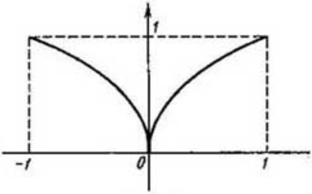


FIG. 52

ción $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$. Por ejemplo, para la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (fig. 52), no existe un punto $\xi \in [-1, 1]$, en el cual la derivada de esta función se haga cero. Al mismo tiempo la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ satisface todas las condiciones del teorema de Rolle sobre el segmento $[-1, 1]$, a excepción de que en el punto $x = 0$ esta función no tiene ni derivada finita ni infinita de signo determinado.

En efecto, para este punto, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, además, este límite no es infinito de signo determinado.

Este ejemplo muestra la conveniencia de que en el p. 11.1 al concepto de derivada en el "sentido amplio", junto con las derivadas finitas, se incorporaron sólo las derivadas infinitas de *signo determinado*.

Señalemos que con la construcción de los ejemplos correspondientes (si, naturalmente, es factible), se comprueba habitualmente en matemática, la esencialidad de las condiciones de los teoremas demostrados.

En el futuro no realizaremos la comprobación de la necesidad de las condiciones de los teoremas, dejándole al lector su realización a medida de sus propias necesidades.

Si la función $f(x)$ satisface las condiciones del teorema de Rolle sobre el segmento $[a, b]$, entonces la función $F(x) = f(x) - f(a)$ es igual a cero en sus extremos y $F'(x) = f'(x)$, en particular, estas derivadas se hacen iguales a cero simultáneamente. Por esto, el teorema de Rolle es equivalente a la afirmación: si una función es continua sobre cierto segmento, se hace nula en sus extremos y es diferenciable en todos sus puntos internos, entonces existe un punto interno en el cual la derivada de la función se hace igual a cero. Dicho brevemente,

*entre dos ceros de una función diferenciable se encuentra siempre al menos un cero de su derivada.*

*Ejercicios. 1. Demuéstrese que si la función $f$* satisface las condiciones del teorema de Rolle sobre el segmento $[a, b]$ y no es constante, entonces, en este segmento existen los puntos $\xi_1$ y $\xi_2$ tales que $f'(\xi_1) > 0$ y $f'(\xi_2) < 0$.

2. Cítese un ejemplo de función que sea continua sobre el segmento $[a, b]$, que tenga derivada en cada punto del intervalo $(a, b)$, pero que no tenga derivada (unilateral) en el punto $a$.

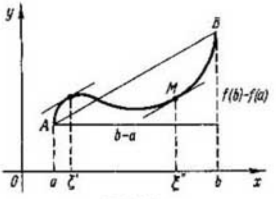



FIG. 53

**Teorema 3 (de Lagrange *)).** *Si la función $f$ se continua sobre el segmento $[a, b]$ y en cada punto del intervalo $(a, b)$ tiene derivada finita o infinita de signo determinado, entonces, en este intervalo existe al menos un punto $\xi$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{11.3}$$

Este teorema, evidentemente, es una generalización del teorema de Rolle.

DEMOSTRACIÓN. Analicemos la función auxiliar

$$F(x) = f(x) - \lambda x \tag{11.4}$$

y definamos el número $\lambda$ de forma tal que $F(a) = F(b)$, es decir, que $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$. Esto es equivalente a que

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{11.5}$$

Para la función $F$ se cumplen todas las condiciones del teorema de Rolle. En efecto, la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, y la función $\lambda x$, al ser lineal, es continua sobre todo el eje numérico; por esto, también la función $F(x) = f(x) - \lambda x$ será continua sobre el segmento $[a, b]$. La función $f$ tiene en todos los puntos del intervalo $(a, b)$ derivada finita o infinita, y la función $\lambda x$ derivada finita en todos los puntos del eje numérico, por esto, su diferencia, $F(x)$ también tiene en todos los puntos del intervalo $(a, b)$ derivada finita o infinita (véase la observación en el p. 9.5). Finalmente, en los extremos del segmento $[a, b]$ por la elección de $\lambda$ (véase (11.5)) la función $F$ alcanza valores idénticos. Por esto, existe al menos un punto $\xi$, $(a < \xi < b)$ tal que $F'(\xi) = 0$. De (11.4) obtenemos $F'(x) = f'(x) - \lambda$, por esto $f'(\xi) - \lambda = 0$. Sustituyendo aquí $\lambda$ de (11.5), obtenemos

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \square \tag{11.6}$$

El sentido geométrico del teorema de Lagrange consiste en lo siguiente. Sean $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ los extremos de la gráfica de la función $f$, y $AB$ la cuerda que une los puntos $A$ y $B$ (fig. 53). Entonces la relación $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es igual a la tan-

---

*) J. L. Lagrange (1736 — 1813), matemático y mecánico francés.

gente del ángulo $\beta$ entre la cuerda $AB$ y el eje $Ox$, es decir,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \beta$$

y la derivada $f'(\xi)$, como es sabido (véase el p. 9.3), es igual a la tangente del ángulo $\alpha$ entre la tangente a la gráfica de la función $f$ en el punto $(\xi, f(\xi))$ y el sentido positivo del eje $Ox$, es decir, $f'(\xi) = \operatorname{tg} \alpha$. Por esto, la igualdad (11.6) puede ser escrita en la forma

$$\operatorname{fg} \alpha = \operatorname{tg} \beta.$$

De esta forma, el teorema de Lagrange muestra que en el intervalo $(a, b)$ debe encontrarse un punto $\xi$ (quizá, no único, véase la fig. 53, donde los puntos $\xi'$ y $\xi''$ satisfacen las condiciones del teorema), en el cual la tangente a la gráfica es paralela a la cuerda $AB$.

El teorema de Lagrange encontrará una serie de aplicaciones importantes en el futuro.

Demos otras formas, de notación de la fórmula (11.3). Sea $a < \xi < b$ y $\frac{\xi - a}{b - a} = \theta$. Entonces

$$\xi = a + \theta(b - a), \quad 0 < \theta < 1. \tag{11.7}$$

Por el contrario, si $\xi$ se expresa por la fórmula (11.7), entonces, como es fácil ver, $a < \xi < b$. De esta forma, en la forma (11.7) pueden ser representados todos los puntos del intervalo $(a, b)$ y solamente ellos. Por esto, la fórmula (11.3) puede ser escrita en la forma

$$f(b) - f(a) = f'[a + \theta(b - a)](b - a), \quad 0 < \theta < 1. \tag{11.8}$$

Hagamos ahora $a = x$, $b - a = \Delta x$, y por tanto, $b = x + \Delta x$; entonces (11.8) toma la forma

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1. \tag{11.9}$$

La fórmula (11.9), así como las fórmulas equivalentes (11.3) y (11.8), se llaman *fórmulas de los incrementos finitos de Lagrange*, o sencillamente *fórmula de los incrementos finitos*, a diferencia de la igualdad aproximada

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \tag{11.10}$$

la que se llama a veces fórmula de los incrementos infinitesimales. Esta expresa el hecho de que el primer miembro y el segundo miembro de la igualdad aproximada (11.10) son iguales entre sí para la función $f$ diferenciable en el punto $x$ "salvo infinitésimos de orden superior al del incremento $\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$".

OBSERVACIÓN. La fórmula de Lagrange (11.3) puede ser representada en la forma

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b)$$

donde $a < b$. De esta forma, es válida no sólo cuando $a < b$, sino también para $a > b$.

Señalemos tres corolarios del teorema de Lagrange, útiles en el futuro.

**Corolario 1.** *Sea la función $f$*

*1) continua sobre un intervalo (funito o infinito),*

*2) tiene derivada nula en todos los puntos de este intervalo, a excepción, puede ser, de un conjunto finito de éstos.*

*Entonces la función $f$ es constante sobre el intervalo señalado.*

En efecto, supongamos que la función $f$ satisface las condiciones enunciadas sobre el segmento $\Delta$, $x_1 \in \Delta$, $x_2 \in \Delta$, $x_1 < x_2$. Numeremos en orden creciente a aquellos puintos del intervalo $\Delta$, en los cuales la derivada $f'(x)$ o bien no existe, o bien existe pero no es igual a cero: $f'(x) \neq 0$, y que se encuentran sobre el intervalo $(x_1, x_2)$. Denotémoslos por $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Sobre cada uno de los segmentos $[x_1, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_{k-1}, a_k]$, ..., $[a_n, x_2]$ la función $f$ es continua y en todos sus puntos interiores tiene derivada (nula) y, por lo tanto, satisface las condiciones del teorema de Lagrange. Según este teorema aplicable a cada uno de los segmentos señalados, tendremos

$$
\begin{gathered}
f(a_1) - f(x_1) = f'(\xi_1)(a_1 - x_1) = 0, \quad x_1 < \xi_1 < a_1, \\
f(a_2) - f(a_1) = f'(\xi_2)(a_2 - a_1) = 0, \quad a_1 < \xi_2 < a_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f(a_k) - f(a_{k-1}) = f'(\xi_k)(a_k - a_{k-1}) = 0 \quad a_{k-1} < \xi_k < a_k \qquad (11.11) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f(x_2) - f(a_n) = f'(\xi_{n+1})(x_2 - a_n) = 0, \quad a_n < \xi_{n+1} < x_2,
\end{gathered}
$$

ya que $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = \ldots = f'(\xi_{n+1}) = 0$. Sumando las igualdades (11.11), obtenemos

$$f(x_2) - f(x_1) = 0,$$

es decir,

$$f(x_2) = f(x_1).$$

Por cuanto $x_1$ y $x_2$ eran puntos arbitrarios del segmento $\Delta$ analizado, esto significa que la función $f$ es constante sobre $\Delta$. □

El corolario 1 tiene una interpretación mecánica evidente: si la función $y = f(x)$ es la ley del movimiento de un punto material por una recta, $x$ es el tiempo, $y$ es la distancia (con signo) desde el punto de referencia sobre la recta, entonces la condición $f'(x) = 0$ para todos los $x \in (a, b)$, significa que la velocidad del punto analizado durante el intervalo de tiempo $(a, b)$ siempre es igual a cero, es decir, el punto no se mueve, pero entonces, durante este tiempo la posición del punto, y por tanto el camino recorrido por éste, no varían. Esto significa que la funcion $f(x)$ es constante sobre el intervalo $(a, b)$.

**Corolario 2.** *Si las funciones $f$ y $g$ son continuas sobre un intervalo y en todos sus puntos, excepto un conjunto finito de éstos, tienen derivadas iguales*

$$f'(x) = g'(x),$$

*entonces estas funciones se diferencian sobre el segmento analizado sólo en una constante:*

$$f(x) = g(x) + c, \tag{11.12}$$

*c es una constante.*

En efecto, la función $F = f - g$ satisface las condiciones del corolario 1, es decir, $F$ es continua sobre el intervalo dado y $F' = 0$ en todos sus puntos, excepto, puede ser, un conjunto finito de éstos. Por esto $F = C$, es decir, tiene lugar la igualdad (11.12). □

**Corolario 3.** *Sea la función* $\varphi$

1) *continua sobre el intervalo* $(a, b)$;

2) *diferenciable en todos los puntos del intervalo* $(a, b)$, *a excepción, puede ser, de cierto punto* $x_0 \in (a, b)$;

3) *existe* $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi'(x)$; *entonces existe también la derivada* $\varphi'(x_0)$, *además*

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \varphi'(x).$$

En efecto, sea $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi'(x) = A$. Si $a < x < b$ y $x \neq x_0$ entonces por el teorema de Lagrange $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0)$ donde $\xi \in (x_0, x)$ si $x > x_0$, $\xi \in (x, x_0)$, si $x < x_0$, de donde

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(\xi).$$

Para mayor exactitud, consideremos que $x > x_0$. El punto $\xi = \xi(x)$ es una función de $x$ y además, en general, una función multiforme. Elijamos arbitrariamente para cada $x \in (a, b)$ un valor cualquiera de $\xi$, entonces obtenemos una función unívoca $\xi(x)$ (como se dice, una rama unívoca de la función multiforme). Ya que $x_0 < \xi(x) < x$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \xi(x) = x_0.$$

Aplicando la regla del cambio de variables para los límites de las funciones (véase el p. 4.8), obtenemos, que existe el límite

$$\lim_{x \to x_0} \varphi'(\xi) = A$$

y por tanto, existe también el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = A.$$

Esto significa que la derivada $\varphi'(x_0)$ existe y es igual a $A$. □

Ejercicio 3. Sea la función $f$ continua sobre el intervalo $(a, b)$ y diferenciable en todos los puntos de este intervalo, excepto, puede ser, cierto punto $x_0 \in (a, b)$. Supongamos que existen $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x)$, además, no son iguales entre sí. Demuéstrese que con estas suposiciones la derivada $f'(x)$ no existe.

En los teoremas de Rolle y Lagrange (así también como en el teorema de Cauchy, que expondremos a continuación) se habla de la existencia de cierto punto $\xi$, $a < \xi < b$, que puede ser llamado "punto medio", para el que se cumple una u otra de las igualdades. Con esto se explica el nombre de "teoremas sobre los valores medios" para este grupo de teoremas. Demostremos la última de las afirmaciones de este tipo que es necesaria para nosotros.

**Teorema 4 (de Cauchy).** *Sean las funciones $f$ y $g$*

1) *continuas sobre el segmento $[a, b]$;*

2) *tienen derivadas en cada punto del intervalo $(a, b)$;*

3) $g' \neq 0$ *en todos los puntos del intervalo $(A, b)$.*

*Entonces existe un punto $\xi$, $a < \xi < b$, tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{11.13}$$

Señalemos que de las hipótesis del teorema se deduce que la fórmula (11.11) tiene sentido, es decir, $g(a) \neq g(b)$. En efecto, si $g(a) = g(b)$, entonces la función $g$ satisfaría las condiciones del teorema de Rolle y, por lo tanto, se encontraría un punto $\xi$ tal que $g'(\xi) = 0$, $a < \xi < b$, lo que estaría en contradicción con la condición 3.

DEMOSTRACIÓN. Analicemos la función auxiliar

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x), \tag{11.14}$$

donde el número $\lambda$ lo hemos elegido de forma tal que $F(a) = F(b)$, es decir, que $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$. Para esto, es necesario tomar

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{11.15}$$

La función $F$ satisface todas las condiciones del teorema de Rolle, por tanto, existe un punto $\xi$, $a < \xi < b$, tal que $F'(\xi) = 0$. Pero de (11.14) $F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$, y por esto

$$f'(\xi) = \lambda g'(\xi) = 0$$

de donde se deduce que

$$\lambda = \frac{f'(\xi)}{f'(\xi)}. \tag{11.16}$$

Comparando (11.15) y (11.16), obtenemos la fórmula (11.13), usualmente llamada *fórmula de los incrementos finitos de Cauchy.* □

Señalemos que la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange es un caso particular de la fórmula de los incrementos finitos de Cauchy, en el cual $g(x) = x$. Hemos dado demostraciones independientes de estas fórmulas, en primer lugar por el important papel que desempeña la fórmula de Lagrange, en segundo lugar, para tener la posibilidad, utilizando una misma idea (la construcción de una función auxiliar, que satisfage las condiciones del teorema de Rolle), de aplicarla dos veces en las demostraciones, además, al inicio para mayor claridad, en un caso más sencillo.

La fórmula de Cauchy (11.13), al igual que la fórmula de Lagrange (11.3), es válida no sólo si $a < b$, sino también para $a > b$.

Ejercicio 4. Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Apliquémosle a esta función sobre el segmento $[0, x]$ la fórmula de Lagrange:

$$x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = (2\xi \operatorname{sen}\frac{1}{\xi} - \cos\frac{1}{\xi})x,$$

donde $0 < \xi < x$. Reduzcamos ambos miembros de la igualdad en $x$ cuando $x \neq 0$:

$$x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 2\xi \operatorname{sen}\frac{1}{\xi} - \cos\frac{1}{\xi}.$$

Pasando aquí al límite cuando $x \to 0$ (durante esto, evidentemente, $\xi \to 0$) obtenemos

$$\lim_{\xi \to 0} \cos\frac{1}{\xi} = 0,$$

ya que los otros dos sumandos, evidentemente, tienden hacia cero. Al mismo tiempo, el límite de la función $\cos\frac{1}{\xi}$, cuando el argumento tiende hacia cero, no existe. ¿Dónde está el error?

**Problema 7 (de Darboux *))**. Demuéstrese que si una función es diferenciable sobre un segmento, entonces su derivada, al tomar dos valores cualesquiers, toma también cualquier valor intermedio.

## § 12. RESOLUCIÓN DE LAS INDETERMINACIONES POR LA REGLA DE L'HOSPITAL

En muchos casos la búsqueda del límite de una función, dada analíticamente, cuando el argumento tiende hacia cierto punto (hacia un número o hacia uno de los infinitos $\infty$, $+\infty$ ó $-\infty$), ejecutada sustituyendo formalmente el valor correspondiente en vez del argumento en la fórmula, que representa la función analizada, lleva a las expresiones de la forma

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0 \text{ ó } 1^\infty.$$

Estas se llaman *indeterminaciones*, ya que por ellas no se puede juzgar si existe o no el límite señalado, sin hablar ya sobre la determinación de su valor, si éste existe. En este caso, el cálculo del límite se llama también "*resolución de las indeterminaciones*".

Junto con el método fundamental del cálculo de los límites de las funciones -el método de selección de su parte principal- existen otros métodos de búsqueda de los límites. Algunos de estos, que tienen la denominación general de *regla de L'Hospital* **), los expondremos en este párrafo.

### 12.1. INDETERMINACIONES DE LA FORMA 0/0

**Teorema 1.** *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas sobre el segmento $[a, b]$ tales que*:

1) $f(a) = g(a) = 0$;

2) *existen las derivadas (por la derecha) $f'(a)$ y $g'(a)$, además $g'(a) \neq 0$.*

*Entonces existe el límite*

---

*) G. Darboux (1872 — 1917), matemático francés.

**) L'Hospital G. (1661 — 1704), matemático francés.

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Apliquemos el método de selección de la parte principal. Por la condición 2 tenemos (véase el p. 9.2).

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a),$$
$$g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a).$$

De aquí, por la condición 1, obtendremos que

$$f(x)=f'(a)(x-a)+o(x-a),\quad g(x)=g'(a)(x-a)+o(x-a),$$

y por esto

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(a)+\dfrac{o(x-a)}{(x-a)}}{g'(a)+\dfrac{o(x-a)}{(x-a)}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.\ \square$$

En el teorema 1 se ha supuesto la existencia de las derivadas en el punto $a$. Demostremos ahora un teorema próximo por su contenido al anterior, en el cual, sin embargo, no se supondrá la existencia de las derivadas $f'(a)$ y $g'(a)$.

**Teorema 2.** *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$:*

1) *diferenciables en el intervalo $(a, b)$;*

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} g(X)=0;$

3) $g'(x)\neq 0$ *para todos los* $x\in(a, b)$;

4) *existe el límite* $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *finito o infinito, igual a* $+\infty$ *ó* $-\infty$.

*Entonces existe el límite*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por las condiciones del teorema, las funciones $f$ y $g$, no están definidas en el punto $a$; definámoslas haciendo $f(a)=g(a)=0$. Ahora $f$ y $g$ son continuas en el punto $a$ y satisfacen las condiciones del teorema de Cauchy sobre el valor medio (véase el p. 11.2) sobre cualquier segmento $[a, x]$, donde $a<x<b$. Por esto, para cada $x$, $a<x<b$, existe un $\xi=\xi(x)\in(a, x)$, tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\tag{12.1}$$

además $\lim\limits_{x\to a+0}\xi(x)=a$.

Por esto, si existe $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'x)}=k$, entonces de la regla del cambio de variable para los límites de funciones, se deduce que también existe el $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k$.

Ahora de (12.1) obtenemos
$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k. \ \square$$

Los teoremas 1 y 2 siguen siendo válidos con las transformaciones naturales, tanto en el caso del límite lateral izquierdo, como en el caso bilateral.

**Teorema 3.** *Sean las funciones $f$ y $g$:*

1) *diferenciables cuando $x > c$;*
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;
3) $g'(x) \neq 0$ *para todos los $x > c$;*
4) *existe el límite* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *finito o infinito, igual a $+\infty$ ó $-\infty$.*

*Entonces existe también el límite*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sin perder generalidad podemos considerar que $c > 0$ (si $c < 0$, en calidad de nuevo valor de $c$ tomaremos, por ejemplo, $c = 1$).

Ejecutemos el cambio de variable $x = \dfrac{1}{t}$. Las funciones $\varphi(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ y $\psi(t) = g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ están definidas sobre el intervalo $(0, 1/c)$; si $x \to +\infty$, entonces $t \to +0$ y viceversa. Sobre el intervalo $(0, 1/c)$ existen las derivadas
$$\varphi'(t) = -f'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2} \quad \text{y} \quad \psi'(t) = -g'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2},$$
donde con virgulilla están indicadas las derivadas de las funciones $f$ y $g$ respecto al argumento inicial.

De lo dicho y de las condiciones del teorema se deduce que las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ satisfacen sobre el intervalo $(0, 1/c)$ las condiciones 1, 2 y 3 del teorema 2. Mostremos además, que de la existencia del límite $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, el cual designaremos por $k$, se deduce la existencia de límite $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$ y su igualdad a $k$, es decir, que se cumple también la condición 4 del teorema 2. En efecto, utilizando las expresiones obtenidas para las derivadas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$, hallamos
$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k.$$

Ahora, del teorema 2, aplicado a las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$, se deduce que $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\varphi(t)}{\psi(t)} = k$. Pero
$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\frac{f(x)}{g(x)},$$

donde $x = \dfrac{1}{t}$, por esto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = k. \ \square$$

Este teorema sigue siendo válido si se hace la transformación correspondiente, para $x \to -\infty$.

## 12.2. INDETERMINACIONES DE LA FORMA $\infty/\infty$

**Teorema 4.** *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$:*

1) *diferenciables sobre el intervalo $(a, b)$;*
2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$;
3) $g'(x) \neq 0$ *sobre* $(a, b)$;
4) *existe el límite finito o infinito, igual a $+\infty$ ó $-\infty$*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{12.2}$$

*Entonces existe también el límite*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos al principio que el límite (12.2) es finito; designémoslo por $k$:

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Mostremos que también

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Para ésto, elijamos los puntos $x_0$ y $x$ tales que $a < x < x_0 < b$. Entonces, sobre el segmento $[x, x_0]$ las funciones $f$ y $g$ van a satisfacer las condiciones del teorema de Cauchy. Por esto, según este teorema existe un punto $\xi \in (x, x_0)$, tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

(Es evidente que el punto $\xi$ depende de la elección de los puntos $x$ y $x_0$, es decir, $\xi = \xi(x, x_0)$). Hallemos de esta fórmula la relación $f(x)/g(x)$. Transcribiéndola en la forma

$$\frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

obtenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{12.3}$$

Como quiera que se escoja para un $x_0$ dado el punto tal que se cumpla la desigualdad $a < \xi = \xi(x, x_0) < x_0$, por la condición 4) del teorema tendremos

$$\lim_{x_0 \to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k,$$

y para un $x_0$ dado, por la condición 2) del teorema obtenemos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}} = 1.$$

Sin embargo, en la parte derecha de la fórmula (12.3) no se puede utilizar sencillamente el teorema sobre el límite del producto de funciones, ya que los límites de los factores que allí aparecen se toman en diferentes condiciones: en un caso, el punto $x_0$ tiende hacia el punto $a$, y en el otro el punto $x_0$ es fijo, y hacia el punto $a$ tiende el punto $x$. No obstante, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, siempre se puede escoger $x_0$ tal que la relación $f'(\xi)/g'(\xi)$ sea tan cercana al número $k$ para todos los $\xi \in (a, x_0)$, y después escoger $\delta > 0$, tal que la relación $\dfrac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}$ sea tan cercana a 1 para todos los $x \in (a, a + \delta)$, que como resultado para todos los $x$ señalados se cumplirá la desigualdad

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \varepsilon.$$

Hablando con propiedad, el teorema está demostrado para el caso de un límite finito (12.2) y en este lugar podemos poner el signo. ☐

Para completar la exposición haremos algunas aclaraciones sobre las distintas etapas de la demostración, las que además, pueden ser fácilmente realizadas independientemente por aquellos que hayan asimilado suficientemente bien el material explicado con anterioridad.

Ante todo, se ha realizado la división por $f(x)$ y por $g(x)$. Para fundamentar esto, es necesario demostrar que para los valores correspondientes son válidas las desigualdades $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$. Naturalmente, estas desigualdades no tienen lugar, en general, para una elección cualquiera de los puntos $x \in (a, b)$, pero son válidas para todos los $x$ suficientemente cercanos al punto $a$. En efecto, por la condición 2) del teorema existe un $\delta_1 > 0$ tal que para todos los $x \in (a, a + \delta_1)$ se cumplen las desigualdades $|f(x)| > 0$, $|g(x)| > 0$. Por esto, si escogemos $x_0$ tal que $a < x_0 < a + \delta_1$, entonces $x$ también satisfará esta desigualdad, es decir, $a < x < a + \delta_1$, y por lo tanto, la división por $f(x)$ y por $g(x)$ será a ciencia cierta posible.

Después se realizó la división por $1 - f(x_0)/f(x)$. Esto también es posible para todos los $x$ suficientemente cercanos al punto $a$. En efecto, por la condición $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ existe en $\delta_2$ tal que para todos los $x$, que satisfacen las condiciones $a < x < a + \delta_2$, es válida la desigualdad $|f(x)| > |f(x_0)|$, y por esto, la desigualdad $1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)} \neq 0$. Durante esto, escogemos $\delta_2$ tal que $\delta_2 < \delta_1$, esto siempre es posible.

De esta forma, la fórmula (12.3) es válida para todos los $x$ y $x_0$ tales que $a < x < x_0 < a + \delta_2$.

Más adelante, para un $\varepsilon > 0$ dado por la existencia del límite finito

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k,$$

se encuentra un $\delta_3 > 0$, tal que para todos los $x \in (a, a + \delta_3)$ se cumple la desigualdad

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - k\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{12.4}$$

en este caso, escogemos $\delta_3$además de forma tal que $\delta_3 < \delta_1$, la elección de $x_0$ la sometemos a la condición $a < x_0 < a + \delta_3$.

Hagamos ahora,

$$\alpha_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - k, \quad x < \xi < x_0 \tag{12.5}$$

El punto $\xi$ y por esto la función $\alpha_1$ dependen de los puntos $x_0$ y $x$, sin embargo, durante la elección que hemos hecho, es decir, cuando

$$a < x < x_0 < a + \delta_3,$$

tendremos $a < \xi < a + \delta_3$, y por lo tanto, en virtud de la desigualdad (12.4) se cumplirá la desigualdad

$$|\alpha_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12.6}$$

Hagamos luego

$$\alpha_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}} - 1. \tag{12.7}$$

Es evidente que por la condición 2) del teorema tenemos

$$\lim_{x \to a+0} \alpha_2(x) = 0. \tag{12.8}$$

De (12.3), (12.5) y (12.7) se deduce que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (k + \alpha_1)(1 + \alpha_2(x)) = k + \alpha_1 + (k + \alpha_1)\alpha_2(x). \tag{12.9}$$

Escojamos ahora $\delta_\varepsilon$, $0 < \delta_\varepsilon < \delta_3$, tal que para $a < x < a + \delta_\varepsilon$ se cumpla la desigualdad

$$(|k| + |\alpha_1|)|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{12.10}$$

para lo cual según (12.6) es suficiente que se cumpla la desigualdad

$$|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2(|k| + \varepsilon)}.$$

Esto es posible en virtud de (12.8).

De las desigualdades (12.6) y (12.10) se deduce que para todos los $x$, que satisfacen la condición $a < x < a + \delta_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|\alpha_1 + (k + \alpha_1)\alpha_2(x)| \leqslant |\alpha_1| + (|k| + |\alpha_1|)|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

y por esto, de (12.9) se deduce que $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \varepsilon$ cuando $a < x < a + \delta_\varepsilon$. Esto significa la existencia del límite

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Así se aclaran, en el "lenguaje de las desigualdades", las afirmaciones hechas anteriormente sobre la elección de los valores de $x_0$ y $x$ suficientemente cercanos al punto $a$, que aseguran la cercanía necesaria de la relación $f(x)/g(x)$ al número $k$.

Analicemos ahora el caso del límite infinito.

Sea $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$. Entonces, en cierto entorno del punto $a$ tenemos $f'(x) \neq 0$ (¿ por que?) y $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$. Por esto, por lo demostrado anteriormente, $\lim\limits_{a \to a+0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$, de donde se deduce que $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Pero es necesario demostrar una afirmación más fuerte, o sea, que el límite es igual a $+\infty$. Mostremos esto. Ya que, por la suposición, $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to +\infty$ cuando $x \to a + 0$, entonces existe un $\eta_1 > 0$, tal que para todos los $x$ que satisfacen la condición $a < x < a + \eta_1$, tendremos

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > 0.$$

Más adelante, fijemos $x_0$, $a < x_0 < a + \eta_1$, ya que tendremos que utilizar otra vez la fórmula (12.3).

Por último, escojamos $\eta_2$, $0 < \eta_2 < x_0 - a$, tal que para todos los $x \in (a, a + \eta_2)$ tenga lugar la desigualdad $|f(x)| > |f(x_0)|$, $|g(x)| > |g(x_0)|$, a consecuencia de lo cual

$$1 - \frac{f(x_0)}{f(x)} > 0, \quad 1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} > 0. \tag{12.11}$$

Entonces, para todos los $x$, que satisfacen la condición $a < x < a + \eta_2$, se cumplen las desigualdades (12.11), la desigualdad

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > 0 \quad \text{donde} \quad x < \xi = \xi(x) < x_0,$$

y es válida la fórmula (12.3). De ella se deduce que para todos los $x$ señalados

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0.$$

De la afirmación demostrada anteriormente $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ se deduce ahora que $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

De forma análoga se analiza el caso

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty. \ \square$$

El teorema 4 junto con su demostración sigue vigente cuando se hacen las transformaciones naturales, y cuando $x \to a - 0$, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, así como en el caso de los límites bilaterales.

Se puede mostrar, que cuando se cumplen las condiciones 1, 2 y 3 que forman parte de cualquiera de los teoremas 2, 3 ó 4, no puede existir el límite $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ sin la existencia de uno de los dos "límites infinitos de signo determinado" $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ o $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$.

**Problema 8.** Demostrar que si se cumplen las condiciones 1, 2 y 3 del teorema 4 y $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, entonces o bien $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, o bien $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$.

Ejemplos. 1. Hallemos $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$. Observando que

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0,$$

obtenemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

Esto significa que cuando $x \to +\infty$ la función $\ln x$ crece más lentamente que cualquier exponente positivo de la variable $x$.

A veces la regla de L'Hospital se debe aplicar varias veces.

2. Hallemos $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{a^x}$; donde $n$ es un número natural y $a > 1$. Tenemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^n)'}{(a^x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \dots$$

$$\dots = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{a^x \ln^n a} = 0. \tag{12.12}$$

De esta forma, cuando $x \to +\infty$ cualquier grado de $x^n$ crece más lentamente, que la función exponencial $a^x$, $a > 1$.

3. Se debe tener en cuenta que la realización de cálculos según el modelo (12.12) está justificada sólo en el caso cuando como resultado se obtiene un límite finito o infinito. Así, por ejemplo, sería erróneo escribir

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x + \operatorname{sen} x)},$$

ya que el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x + \operatorname{sen} x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

no existe.

En realidad, tomando la sucesión $x'_n = 2\pi n \to +\infty$ y $x''_n = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \to +\infty$ cuando $n \to \infty$, obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - \cos x'_n}{1 + \cos x'_n} = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \cos x''_n}{1 + \cos x''_n} = 1.$$

Al mismo tiempo, la indeterminación dada de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ puede ser resuelta de forma elemental

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1.$$

Ejercicio 1. Sean $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \operatorname{sen} x$. Hállese $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y demuéstrese que en este caso la regla de L'Hospital no es aplicable.

4. Puede ocurrir que la utilización de la regla de L'Hospital no simplifique el problema de determinación del límite de la función. Por ejemplo, aplicando la regla de L'Hospital para el cálculo del límite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ obtendremos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{(\sqrt{1+x^2})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

es decir, se obtuvo el límite de la fracción inversa a la dada, es decir, el problema permaneció invariable. Conjuntamente con esto, el límite dado se halla fácilmente por el método elemental:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

5. Las indeterminaciones $0^0$, $\infty^0$ ó $1^\infty$ se pueden resolver, tomando previamente el logaritmo de las funciones correspondientes. Por ejemplo, para hallar $\lim\limits_{x\to+0} x^x$, es conveniente hallar el límite

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0.$$

Por esto, en virtud de la continuidad de la función exponencial

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x\ln x} = 1.$$

Las indeterminaciones de las formas $0\cdot\infty$ y $\infty-\infty$ se deben reducir a las formas $0/0$ ó $\infty/\infty$. En este caso, como siempre, durante la aplicación de la regla de L'Hospital, en el cálculo se recomienda simplificar las expresiones obtenidas. Aclaremos esto en un ejemplo.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\operatorname{sen}^2 x}$. Señalemos que

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{\operatorname{sen} x}\,\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2\operatorname{sen} x}.$$

El límite del primer factor de la parte derecha se halla directamente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cos x\right) = 2,$$

y el límite del segundo, aplicando la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen} x}{2x\operatorname{sen} x + x^2\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cos x} = \frac{1}{3}.$$

De esta forma, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right) = \frac{2}{3}$.

Ejercicios. Hállense los límites:

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - x^a}{x-a}$, $a>0$. 4. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to+0} x^\varepsilon\ln x$, $\varepsilon>0$. 5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right)$.

# § 13. FÓRMULA DE TAYLOR

## 13.1. DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE TAYLOR

Si la función $y = f(x)$ tiene en el punto $x_0$ derivada, entonces el incremento de esta función puede representarse en la forma

$$\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

donde $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - y_0$, $y_0 = f(x_0)$ y $A = f'(x_0)$, es decir, $f(x) = y_0 + A(x - x_0) + o(x - x_0)$. Dicho de otra forma, existe la función lineal

$$P_1(x) = y_0 + A(x - x_0) \tag{13.1}$$

tal que

$$f(x) = P_1(x) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

además

$$P_1(x_0) = y_0 = f(x_0), \quad P_1'(x_0) = A = f'(x_0).$$

Planteemos un problema más general. Supongamos que la función $f$ tiene en el punto $x_0 n$ derivadas. Es necesario aclarar si existe un polinomio $P_n(x)$ de grado no mayor que $n$, tal que

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0, \tag{13.2}$$

y

$$f(x_0) = P_n(x_0), f'(x_0) = P'_n(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0). \tag{13.3}$$

Buscaremos este polinomio, por analogía con la fórmula (13.1), en la forma

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n.$$

Observando que $P_n(x_0) = A_0$, de la primera condición (13.3), es decir, de $f(x_0) = P_n(x_0)$, tenemos $A_0 = f(x_0)$. Luego,

$$P'_n(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + \ldots + nA_n(x - x_0)^{n-1},$$

de donde $P'_n(x_0) = A_1$, y ya que $P'_n(x_0) = f'(x_0)$, entonces $A_1 = f'(x_0)$. Después encontramos la segunda derivada del polinomio $P_n(x)$:

$$P_n''(x) = 2 \cdot 1 \cdot A_2 + \ldots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2}.$$

De aquí y de la condición $f''(x_0) = P_n''(x_0)$ obtenemos $A_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2!}$ y en general

$$A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Por la propia construcción, para el polinomio

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se cumplen todas las relaciones (13.3). Comprobemos si satisface la condición (13.2).

Sea
$$r_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - P_n(x).$$

De la condición (13.3) se deduce que
$$r_n(x_0) = r'_n(x_0) = \dots = r_n^{(n)}(x_0) = 0. \tag{13.4}$$

Por esto, aplicando $n$ veces la regla de L'Hospital para descubrir la indeterminación $\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}$ cuando $x \to x_0$, y precisamente al principio $n - 1$ veces el teorema 2 del § 12 y después el teorema 1 del mismo párrafo, obtenemos:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x_0)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{r'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \frac{r^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$
es decir, en efecto $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$, $x \to x_0$.

Así queda demostrado el importante teorema siguiente.

**Teorema 1.** *Supongamos que la función $f(x)$ definida sobre el intervalo $(a, b)$ tiene en el punto $x_0 \in (a, b)$ derivadas hasta el orden $n$ inclusive. Entonces, cuando $x \to x_0$*
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \tag{13.5}$$
*ó*
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Este teorema sigue siendo válido, junto con su demostración, también para la función $f$, definida sobre el segmento $[a, b]$, cuando $x_0 \in [a, b]$, si para $x_0 = a$ y $x_0 = b$ por derivadas se entienden las derivadas unilaterales correspondientes.

La fórmula (13.5) se llama *fórmula de Taylor* *) *de n-ésimo orden con el término residual en la forma de Peano.*

El polinomio
$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{n!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{13.6}$$
se llama *polinomio de Taylor* de grado $n$, y la función
$$r_n(x) = f(x) - Pn(x) \tag{13.7}$$
*término residual de orden n de la fórmula de Taylor.* Como se muestra, el término residual $r_n(x)$ es un infinitésimo, cuando $x \to x_0$, de orden más alto que todos los términos del polinomio de Taylor (13.6).

Mostremos otra forma de notación de la fórmula (13.5). Suponiendo
$$x - x_0 = \Delta x, \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

---

*) Taylor (1685 — 1731), matemático inglès.

obtenemos

$$\Delta y = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \Delta x^k + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0. \tag{13.5'}$$

Si en la fórmula (13.5) $x_0 = 0$, entonces se obtiene una forma parcial de la fórmula de Taylor, llamada usualmente *fórmula de Maclaurin* *):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \to 0. \tag{13.8}$$

El teorema demostrado permite sustituir cualquier función que satisfaga las condiciones de este teorema, en el entorno de cierto punto, por un polinomio salvo infinitésimos de orden más alto que los términos del polinomio. Este polinomio es el polinomio de Taylor. La magnitud del error está dada en este caso por el término residual.

La fórmula de Taylor con término residual en la forma de Peano da un método uniforme de selección de la parte principal de la función en un entorno de un punto dado. En esta circunstancia están fundamentadas las múltiples y distintas aplicaciones de la fórmula (13.5), en diferentes cuestiones del análisis.

Señalemos un corolario útil del teorema 1.

**Corolario.** *Sea la función $f(x)$ definida sobre el intervalo $(a, b)$ y supongamos que tiene en el punto $x$ derivadas hasta de orden $n + 1$ inclusive. Entonces cuando $x \to x_0$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + O(x - x_0)^{n+1}. \tag{13.9}$$

En efecto, según el teorema 1 cuando $x \to x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n+1}), \tag{13.10}$$

y ya que

$$\frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} + o((x - x_0)^{n+1}) = O((x - x_0)^{n+1}) \quad \text{para} \quad x \to x_0,$$

entonces, de la fórmula (13.10) se deduce directamente la fórmula (13.9). □

Ejercicio 1. Demuéstrese que si la función $f(x)$, en cierto entorno del punto $x_0$ tiene derivada de orden $n$, entonces, cualesquiera que sean el punto $x$ de este entorno y la función $\psi(t)$, que es continua sobre el segmento con extremos en los puntos $x_0$ y $x$ y tiene derivada no nula en el interior de este segmento, se halla un punto $\xi$, que se encuentra entre $x_0$ y $x$, tal que para el término residual $r_{n-1}(x)$ de la fórmula de Taylor de la función $f(x)$ tiene lugar la fórmula

$$r_{n-1}(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} (x - \xi)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

*) C. Maclaurin (1698 — 1746), matemático escocés.

Obténganse de aquí las formas siguientes de notación del término residual:

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!\,p}(x - x_0)^p(x - \xi)^{n-p}, \quad p > 0 \quad \text{(forma de Schlömilch-Roche *)}),$$

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{(forma de Lagrange)},$$

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{(n-1)!}(1 - \theta)^{n-1}(x - x_0)^n,$$

$$0 < \theta < 1 \quad \text{(forma de Cauchy)}.$$

Indicación. Analícese la función auxiliar

$$\varphi(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k$$

y aplíquese a las funciónes $\varphi$ y $\psi$ el teorema de Cauchy sobre el valor medio. Para deducir el término residual en la forma Schlömilch — Roche hágase $\psi(t) = (x - t)^p$.

### 13.2. EL POLINOMIO DE TAYLOR COMO EL POLINOMIO DE MEJOR APROXIMACIÓN DE UNA FUNCIÓN EN UN ENTORNO DEL PUNTO DADO

Señalemos previamente que, evidentemente, todo polinomio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{13.11}$$

puede ser representado, para cualquier $x_0$, en la forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(x - x_0)^k. \tag{13.12}$$

En realidad, es suficiente en (13.11) poner $x = x_0 + h$ y desarrollar la parte derecha según las potencias de $h$; entonces

$$P_n(x) = A_0 + A_1 h + \dots + A_n h^n, \quad \text{donde} \quad h = x - x_0,$$

es decir, obtuvimos la fórmula (13.12).

Supongamos ahora que para la función $f$, que tiene en el punto $x_0$ derivada de orden $n$, existe el polinomio $P_n(x)$ de grado no mayor que $n$, tal que para cierto $m \geqslant n$ se cumple la igualdad

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^m), \quad x \to x_0, \tag{13.13}$$

---

*) O. Schlömilch (1823 — 1901), matemático alemán. E. Roche (1820 — 1883), astrónomo y matemático francés.

y por lo tanto, ya que para $m \geqslant n$ tiene lugar la relación

$$o((x - x_0)^m = o\ ((x - x_0)^n), \quad x \to x_0$$

(recordemos, que semejantes fórmulas se leen sólo de izquierda a derecha) y la igualdad

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0. \tag{13.14}$$

Por lo dicho anteriormente, el polinomio $P_n(x)$ se puede representar en la forma (13.12), y entonces sus coeficientes $A_0, A_1, \ldots, A_n$, se hallan, como fue demostrado en el p. 13.1, por la fórmula

$$A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Esto significa que el polinimio $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor (de grado no mayor que $n$), de la función $f$.

De esta forma, ningún polinomio de grado menor o igual a $n$, diferente del polinomio de Taylor, puede aproximar a la función dada con una exactitud $o((x - x_0)^n)$, cuando $x \to x_0$, y por lo tanto, con una exactitud mayor $o((x - x_0)^m)$, $m >$ n, $x \to x_0$. Dicho de otra forma, el polinomio de Taylor es el único polinomio, que posee la propiedad (13.14), todos los polinomios restantes del mismo grado "aproximan peor" a la función $f$ cuando $x \to x_0$. Precisamente en este sentido se dice que el polinomio de Taylor es el polinomio de mejor aproximación de la función dada en un entorno del punto $x_0$ cuando $x \to x_0$.

La unicidad de la representación de la función en la forma (13.13) puede ser utilizada a veces para su desarrollo según la fórmula de Taylor. Precisamente, si es posible obtener de alguna forma indirecta la representación (13.13), entonces, por el teorema 2 se puede afirmar que ésta es el desarrollo según la fórmula de Taylor (13.5), es decir, que los coeficientes del polinomio hallado se expresan por la fórmula (13.14).

Así, por ejemplo, la relación (13.12) representa el desarrollo del polinomio (13.11) según la fórmula de Taylor, además en este caso $r_n(x) \equiv 0$, por esto, por la unicidad del polinomio que satisface la condición (13.14), los coeficientes del polinomio (13.12) tienen la forma

$$A_k = \frac{P_n^k(x_0)}{k!}.$$

De esta forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

En particular, durante el desarrollo del polinomio de grado $n$ según la fórmula de Taylor el resto de orden $n$ es idénticamente igual a cero.

Supongamos que se exige desarrollar según la fórmula de Taylor la función $f(x) = 1/(1 - x)$ en un entorno del punto $x_0 = 0$. Observando que $1/(1 - x)$ no es otra cosa que la suma de la progresión geométrica infinita

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \ |x| < 1,$$

y suponiendo $r_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \frac{x^{n+1}}{1-x}$, $|x| < 1$, obtenemos

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + r_n(x),$$

donde $r_n(x) = O(x^{n+1})$ y, por tanto, $r_n(x) = o(x^n)$ cuando $x \to 0$. De esta forma, la representación

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n), \quad x \to 0,$$

es el desarrollo de la función $1/(1-x)$, según la fórmula de Taylor en un entorno de cero.

### 13.3. EJEMPLOS DE DESARROLLO SEGÚN LA FÓRMULA DE TAYLOR

1. $f(x) = \operatorname{sen} x$. La función sen $x$ tiene derivadas de todos los órdenes. Hallemos para ella la fórmula de Taylor cuando $x_0 = 0$, es decir, la fórmula de Maclaurin (13.8). Fue demostrado (véase el p. 10.1), que $(\operatorname{sen} x)^{(m)} = \operatorname{sen}\left(x + m\frac{\pi}{2}\right)$, por esto

$$f^{(m)}(0) = \operatorname{sen}\frac{m\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{para } m = 2k, \\ & \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ (-1)^k & \text{para } m = 2k+1, \end{cases} \tag{13.15}$$

y por la fórmula (13.5),

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

cuando $x \to 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, o más breve,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{cuando} \quad x \to 0.$$

Hemos escrito aquí el término residual en la forma $o(x^{2n+2})$, y no en la forma $o(x^{2n+1})$ ya que el término del polinomio de Taylor, siguiente al último sumando escrito, en virtud de (13.15) es igual a cero.

2. $f(x) = \cos x$. Como es conocido (véase el p. 10.1), $f^{(m)}(x) = \cos\left(x + \frac{m\pi}{2}\right)$, y por esto,

$$f^{(m)}(0) = \cos\frac{m\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{para } m = 2k+1, \\ (-1)^k & \text{para } m = 2k, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

y

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

cuando $x \to 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, o, más breve,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{cuando} \quad x \to 0.$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

3. $f(x) = e^x$. Ya que $(e^x)^{(n)} = e^x$, entonces $f^{(n)}(0) = 1$, $n = 0, 1, \ldots$, por lo tanto,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \tag{13.16}$$

cuando $x \to 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, o más breve,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{cuando} \quad x \to 0.$$

De aquí, sustituyendo $x$ por $-x$, obtenemos

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{cuando} \quad x \to 0, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13.17}$$

4. $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Sumando y restando (13.16) y (13.17), tendremos

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{cuando} \quad x \to 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Por la unicidad de la representación de la función en la forma señalada (véase el p. 13.2) las relaciones obtenidas son las fórmulas de Taylor para las funciones $\operatorname{sh} x$ y $\operatorname{ch} x$.

5. $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $\alpha$ es cierto número dado. Ya que $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$, entonces

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)$$

y, por lo tanto,

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

cuando $x \to 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ó, más breve,

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k + 1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

cuando $x \to 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

6. $f(x) = \ln(1 + x)$. Es fácil ver que

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} = (1 + x)^{-1}, \quad f''(x) = -(1 + x)^{-2}$$

y en general $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k - 1)!(1 + x)^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Por esto $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k - 1)!$, $k = 1, 2, \ldots$, y ya que $f(0) = 0$, entonces

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

cuando $x \to 0$, $n = 1, 2, \ldots$, o, más breve,

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{cuando} \quad x \to 0, \quad x = 1, 2, \ldots .$$

OBSERVACIÓN 1. Por el corolario del teorema 1, las fórmulas obtenidas se pueden escribir, utilizando el símbolo $O$ ($O$ grande), de la forma siguiente:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k + 1)!} + O(x^{2n+3}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+2}),$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}),$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k + 1)!} + O(x^{2n+3}),$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+1}), n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k + 1)}{k!} x^k + O(x^{n+1}),$$

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}),$$

$n = 1, 2, \ldots$, cuando $x \to x_0$.

Tal notacion de la fórmula de Taylor en algunas cuestiones resulta más cómoda que su notación con el símbolo $o$ ($o$ pequeña).

OBSERVACIÓN 2. De los desarrollos de las funciones elementales, obtenidos por la fórmula de Taylor en el entorno de cero, es posible con ayuda de un cambio de variable lineal, obtener su desarrollo en un entorno de cualquier punto perteneciente a su dominio.

Por ejemplo, desarrollemos por este método, según la fórmula de Taylor con término residual en la forma de Peano, la función $f(x) = \sqrt[5]{x}$ en un entorno del punto $x_0 = 1$. Haciendo $x = 1 + t$ y aplicando la fórmula (13.19), obtenemos

$$\sqrt[5]{x} = (1 + t)^{1/5} =$$

$$= 1 + \frac{1}{5}t + \frac{1}{2!}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)t^2 + \frac{1}{3!}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1} - 2\right)t^3 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(\frac{1}{5} - 2\right)\dots\left(\frac{1}{5} - n + 1\right)t^n + o(t^n) =$$

$$= 1 + \frac{1}{5}(x - 1) - \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 5^2}(x - 1)^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 9}{3!5^3}(x - 1)^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^n 1 \cdot 4 \cdot 9 \dots (5n - 6)}{n!5^n}(x - 1)^n + o((x - 1)^n),$$

cuando $x \to 1$ (o, lo que es lo mismo, cuando $t \to 0$). Este es el desarrollo buscado.

OBSERVACIÓN 3. Combinando los desarrollos de las funciones, señalados anteriormente, se puede seleccionar la parte principal (véase el p. 8.4) de las diferentes funciones elementales en los entornos de tales puntos que cuando el argumento tiende hacia ellos la función tiende a cero o al infinito, estos casos se encuentran con mayor frecuencia.

En calidad de ejemplo seleccionemos la parte principal de la función ctg $x$ cuando $x \to 0$ hasta el orden $O(x^3)$.

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1 - \dfrac{x^2}{2} + O(x^4)}{\left[x - \dfrac{x^3}{6} + O(x^5)\right]} =$$

$$= \frac{1}{x}\left[1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right]\left[1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)\right]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{x}\left[1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right]\left[1 + \frac{x^2}{6} - O(x^4) + O((-\frac{x^2}{6} + O(x^4))^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{x}\left[1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right] = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + O(x^3), \quad x \to 0.$$

Aquí fueron utilizados los desarrollos por la fórmula de Taylor del coseno, del seno y del binomio $(1 + u)^\alpha$ cuando $\alpha = -1$ y $u = -\dfrac{x^2}{6} + O(x^4)$, $x \to 0$.

### 13.4. CÁLCULO DE LÍMITES CON AYUDA DE LA FÓRMULA DE TAYLOR (MÉTODO DE SELECCIÓN DE LA PARTE PRINCIPAL)

La fórmula de Taylor da una regla muy sencilla y muy general para seleccionar la parte principal de una función. Como resultado, este método de cálculo de los límites de las funciones con ayuda de la selección de la parte principal adquiere un carácter algorítmico acabado.

Analicemos primeramente el caso de las indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$. Supongamos se exige hallar el límite $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, donde $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. En este caso, se recomienda desarrollar según la fórmula de Taylor las funciones $f$ y $g$ en un entorno del punto $x_0$ (si, naturalmente, esto es posible), limitándose en este desarrollo sólo a los primeros términos diferentes de cero, es decir, tomar el desarrollo en la forma

$$f(x) = a(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad a \neq 0,$$
$$g(x) = b(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m), \quad b \neq 0,$$

entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)}{b(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m)} =$$
$$= \frac{a}{b} \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{n-m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > m, \\ \frac{a}{b} & \text{si } n = m, \\ \infty & \text{si } n < m. \end{cases}$$

Con frecuencia resulta cómodo para el desarrollo de las funciones $f$ y $g$ según la fórmula de Taylor utilizar el grupo de desarrollos de las funciones elementales, obtenido en el p. 13.13. Para esto se debe, en el caso de $x_0 \neq 0$ ejecutar previamente el cambio de variables $t = x - x_0$; entonces $x \to x_0$ corresponderá a $t \to 0$. El caso de $x \to \infty$ con el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$ se reduce al caso $t \to 0$.

Si se tiene la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, es decir, se exige hallar $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, donde $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, entonces es fácil reducirla al caso analizado $\frac{0}{0}$ mediante la transformación $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$.

De forma semejante al cálculo de los límites, con ayuda de la regla de L'Hospital, aplicando el método de selección de la parte principal para resolver las indeterminaciones de la forma $0 \cdot \infty$ y $\infty - \infty$ se les debe transformar a las indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$. Por último, para resolver las indeterminaciones de la forma

$0^0$, $\infty^0$ y $1^\infty$ por el método señalado, es necesario tomar, previamente, el logaritmo de las funciones analizadas.

Analicemos en ejemplos, cómo se aplica la fórmula de Taylor para el cálculo de los límites de las funciones. Supongamos que se exige hallar

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}.$$

Observando que (véase el p. 13.3)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - o(x^3),\quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

$$\operatorname{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3/3+o(x^3)}{x^3/6+o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3/3}{x^3/6} = 2.$$

Analicemos la indeterminación de la forma $\infty - \infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2}{x^2\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right]^2 - x^2}{x^2[x+o(x)]^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x^4/3+o(x^4)}{x^2[x^2+o(x^2)]} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^4/3+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^4/3}{x^4} = -\frac{1}{3}.$$

En calidad de último ejemplo calculemos el límite $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^{1/x}$, es decir, resolvamos la indeterminación de la forma $1^\infty$. Según la regla general, hallamos el límite del logaritmo de la expresión, que se encuentra bajo el signo del límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\operatorname{sen}x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{x+o(x^2)}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+o(x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{O(x)}{x} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\operatorname{sen}x}{x}} = 1.$$

*Ejercicios. Hállense los límites:*

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen}x}{e^x-1-x-x^2/2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x-x^2)}{x\operatorname{sen}x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\operatorname{sen} x)-\cos x}{x^4}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\sqrt[4]{1-x^2}-4e^{x^3}+\ln(1+x^2)}{\operatorname{arctg} x-\operatorname{sen} x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x})+2x^3}{x^5}$.

# § 14. INVESTIGACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE LAS FUNCIONES

## 14.1. CRITERIO DE MONOTONÍA DE LAS FUNCIONES

**Teorema 1.** *Para que una función $f$ diferenciable sobre el intervalo $(a, b)$ crezca (decrezca) sobre este intervalo, es necesario y suficiente que su derivada en todos los puntos de éste sea no negativa, $f'(x) \geqslant 0$ (no positiva, respectivamente, $f'(x) \leqslant 0$).*

*Si en todos los puntos de $(a, b)$ la derivada es positiva: $f'(x) < 0$ (respectivamente negativa: $f'(x) < 0$), entonces la función $f$ crece estrictamente (decrece estrictamente) sobre el intervalo analizado.*

NECESIDAD. Si la función $f$ crece (decrece) sobre $(a, b)$, entonces para cualquier punto $x_0 \in (a, b)$ cuando $\Delta x > 0$ tenemos $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \geqslant 0 (\Delta y \leqslant \leqslant 0)$. Por esto $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0 \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0\right)$; pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos $f'(x_0) \geqslant 0 (f'(x_0) \leqslant 0)$.

SUFICIENCIA. Sea $a < x_1 < x_2 < b$. Entonces, según la fórmula de Lagrange (véase el p. 11.2) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, donde $x_1 < \xi < x_2$. Ya que $x_2 - x_1 > > 0$, entonces cuando $f'(x) \geqslant 0$ sobre $(a, b)$ (de donde se deduce que en particular, $f'(\xi) \geqslant 0$) tendremos $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, es decir, la función $f$ crece. Análogamente, cuando $f'(x) \leqslant 0$ sobre $(a, b)$ tenemos $f'(\xi) \leqslant 0$, y por lo tanto, $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, es decir, la función $f$ decrece.

Si $f\,(x) > 0$ sobre $(a, b)$, entonces $f'(\xi) > 0$ y por esto, $f(x_2) > f(x_1)$, es decir, la función $f$ crece estrictamente. Sea ahora $f'(x) < 0$ sobre $(a, b)$; entonces $f'(\xi) < 0$, por lo tanto, $f(x_2) < f(x_1)$, es decir, la función $f$ decrece estrictamente. □

Señalemos que las condiciones $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ no son necesarias para el crecimiento estricto, respectivamente decrecimiento estricto de la función diferenciable sobre un intervalo, lo que muestran los ejemplos de las funciones $f_1(x) = x^3$ y $f_2(x) = -x^3$. La primera de ellas crece estrictamente, y la segunda decrece estrictamente sobre todo el eje numérico, pero para $x = 0$ sus derivadas se hacen nulas.

El teorema sigue siendo válido para las funciones continuas, que no tengan derivadas en un número finito de puntos. La afirmación de la segunda parte del teorema sigue siendo válida, si además, en un número finito de puntos la derivada se anula.

Por ejemplo,

*si la función es continua sobre cierto intervalo y tiene en todos los puntos derivada positiva (negativa), excepto, puede ser, en un número finito de puntos, en los cuales la derivada se hace nula o no existe, entonces la función crece estrictamente (respectivamente, decrece estrictamente) sobre el intervalo analizado.*

Esto se deduce directamente del teorema 1: es suficiente aplicarlo sucesivamente a todos los intervalos, en los que se divide el intervalo dado por el conjunto finito de puntos señalados.

Ejemplo. Investiguemos la función

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{cuando} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{cuando} \quad x = 0. \end{cases}$$

La función $f$ es diferenciable (y, por lo tanto, continua) sobre el segmento $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Una revisión especial la requiere sólo la existencia de la derivada en el punto $x = 0$. Aplicando, por ejemplo, dos veces la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t - t}{t^2} =$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{2t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t = 0.$$

Esto también significa que existe $f'(0) = 0$.

Para todos los $x \neq 0$ tenemos

$$f'(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0,$$

o sea, $x < \operatorname{tg} x$, si $0 < x < \pi/2$ (véase la demostración del lema 1 en el p. 8.1). Por tanto, la función $f$ decrece estrictamente sobre el segmento $[0, \pi/2]$, y por esto $f(0) > f(x) > f(1)$, es decir,

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \quad \text{cuando} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{14.1}$$

## 14.2. DETERMINACIÓN DE LOS VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE LA FUNCIÓN

**Definición 1.** *Sea la función $f$ definida en cierto entorno del punto $x_0$. Entonces $x_0$ se llama punto de máximo (punto de mínimo, respectivamente) de la función $f$, si existe un $\delta > 0$ tal que para todos los $\Delta x$ que satisfacen la condición $|\Delta x| < \delta$, se cumple la desigualdad $f(x_0 + \Delta x) \leqslant f(x_0)$ (respectivamente $f(x_0 + \Delta x) \geqslant \geqslant f(x_0)$).*

*Si existe un $\delta > 0$, tal que para todos los $\Delta x \neq 0$, tales que $|\Delta x| < \delta$, se cumple la desigualdad $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ (respectivamente $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$), entonces $x_0$ se llama punto de máximo estricto (respectivamente, mínimo estricto).*

*Los puntos de máximo y mínimo* (*estrictos*) *se llaman puntos de extremo* (*estricto*).

Para los puntos $x_0$ de extremo estricto de la función $f$, y sólo para ellos, el incremento $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ no cambia de signo cuando el argumento pasa por $x_0$, es decir, cuando cambia el signo de $\Delta x$. Precisamente $\Delta f < 0$ para todos los puntos de máximo estricto y $\Delta f > 0$ en el caso de mínimo estricto independientemente del signo del suficientemente pequeño $\Delta x \neq 0$.

**Teorema 2 (condiciones necesarias del extremo).** *Supongamos que $x_0$ es un punto de extremo de la función $f$, definida en cierto entorno del punto $x_0$. Entonces o bien la derivada $f'(x_0)$ no existe, o bien $f'(x_0) = 0$.*

En efecto, si $x_0$ es un punto de extremo para la función $f$, entonces se encuentra un entorno $U(x_0, \delta)$, tal que el valor de la función $f$ en el punto $x_0$ será el mayor o el menor en este entorno. Por esto, si en el punto $x_0$ existe la derivada, entonces ella, por el teorema de Fermat (véase el p. 11.1), es igual a cero.

Señalemos que la condición $f'(x) = 0$ no es, para las funciones diferenciables cuando $x = x_0$, una condición suficiente para la presencia de extremo, como esto muestra el ejemplo de la función $f(x) = x^3$, la que para $x = 0$ tiene derivada igual a cero, pero para la cual $x = 0$ no es un punto de extremo.

Ejercicio 1 (condiciones suficientes de extremo). Sea la función $f$ definida sobre el intervalo $(a, b)$ y continua en el punto $x_0 \in (a, b)$. Demuéstrese que si $f$ crece (estrictamente) sobre el intervalo $(a, x_0)$ y decrece (estrictamente) sobre $(x_0, b)$, entonces $x_0$ es un punto de máximo (estricto); si la función $f$ decrece (estrictamente) sobre $(a, x_0)$ y crece (estrictamente) sobre $(x_0, b)$, entonces $x_0$ es un punto de mínimo (estricto).

**Teorema 3 (condiciones suficientes de extremo estricto).** *Sea la función $f$ diferenciable en cierto entorno del punto $x_0$, excepto, puede ser, en el propio punto $x_0 \in (a, b)$, en el cual ella es, sin embargo, continua. Si la derivada $f'(x)$ cambia de signo cuando pasa por $x_0$ (esto significa, que existe un número $\delta > 0$ tal que los valores de la derivada $f'$ tienen un mismo signo en todo $(x_0 - \delta, x_0)$ y signo contrario para todos los $x \in (x_0, x_0 + \delta)$), entonces $x_0$ es un punto de extremo estricto.*

*En este caso, si para $x_0 - \delta < x < x_0$ se cumple la desigualdad $f'(x) > 0$ y para $x_0 + \delta > x > x_0$ la desigualdad $f'(x) < 0$, entonces $x_0$ es un punto de máximo estricto; si para $x_0 - \delta < x < x_0$ se cumple la desigualdad $f'(x) < 0$ y para $x_0 + \delta > x > x_0$ la desigualdad $f'(x) > 0$, entonces $x_0$ es un punto de mínimo estricto* (fig. 54).

DEMOSTRACIÓN. Analicemos el caso $f'(x) > 0$ para $x < x_0$ y $f'(x) < 0$ para $x > x_0$ donde $x$ pertenece al entorno del punto $x_0$, señalado en las condiciones del teorema. Por el teorema de Lagrange (véase el p. 11.2)

$$\delta f = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

DONDE $\xi$ se encuentra en el intervalo con extremos $x_0$ y $x$.

Si $x < x_0$, entonces $x - x_0 < 0$ y $f'(\xi > 0$, ya que $x < \xi < x_0$. Si $x > x_0$, entonces $x - x_0 < 0$ y $f'\xi) > 0$, ya que en este caso $x_0 < \xi < x$. De esta forma,

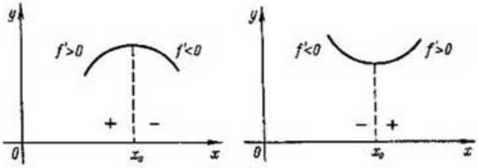



FIG. 54

siempre $\Delta f < 0$, es decir, el punto $x_0$ es un punto de máximo estricto. Análogamente se analiza el segundo caso. □

Del p. 14.1 se deduce que si la función tiene en todos los puntos de cierto entorno reducido de un punto dado $x_0$ derivada de un mismo signo, y en el propio punto $x_0$ la derivada o bien es igual a cero o bien no existe, sin embargo, la función es continua, es decir, si la derivada de una función continua "no cambia de signo" cuando pasa por el punto $x_0$, entonces este punto a ciencia cierta *no es un punto de extremo* de la función analizada (más aún, la función en el entorno señalado crece o decrece estrictamente, en dependencia de que la derivada en los puntos $x \neq x_0$ sea positiva o negativa).

Uniendo esta afirmación con el teorema 3, demostrado anteriormente, obtenemos el resultado siguiente.

*Si la función $f(x)$, definida en cierto entorno del punto $x_0$, continua cuando $x = x_0$, tiene en todos los puntos del entorno analizado, excepto, puede ser, del punto $x_0$, derivada, y esta derivada por cada lado de $x_0$ conserva signo constante (por lo tanto, se puede hablar sobre la conservación o del cambio del signo de la derivada cuando pasa por $x_0$), entonces, para que la función alcance su extremo cuando $x = x_0$, es necesario y suficiente que la derivada cambie de signo cuando pasa por el punto $x_0$.*

Se debe, sin embargo, prestar atención al hecho de que el caso aquí analizado, es decir, el caso cuando se puede hablar en el sentido señalado sobre el cambio de signo de la derivada cuando pasa por el punto $x_0$, no agotan las situaciones posibles (incluso para las funciones diferenciables en todos los puntos): puede suceder, que en entornos unilaterales, tan pequeños como se quiera, del punto $x_0$ la derivada de la función cambie de signo. En este caso, hay que utilizar otros métodos investigando las funciones para el extremo cuando $x = x_0$.

Por esto, en la clase de todas las funciones diferenciables, el teorema 3 da sólo *las condiciones suficientes* de extremo estricto.

**Problema 9.** Constrúyase un ejemplo de función, que sea diferenciable sobre un intervalo, alcanza en cierto punto $x_0$ un extremo estricto, y su derivada en cualquier entorno del punto $x_0$ (tanto por la izquierda, como por la derecha de ella) toma valores positivos y negativos (de esta forma, demuéstrese, que la condición de cambio de signo de la derivada en el punto dado es suficiente para la presencia de un extremo estricto, pero al mismo tiempo no es necesaria).

Introduzcamos otro concepto que utilizaremos en el futuro.

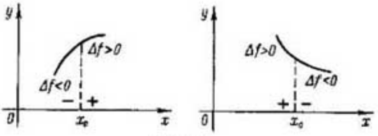



FIG. 55

**Definición 2.** *Sea la función $f$ definida en cierto entorno del punto $x_0$. Llamaremos a $x_0$ punto de crecimiento (decrecimiento) del la función $f$, si existe un $\delta > 0$, tal que cuando $x_0 - \delta < x < x_0$ se cumple la desigualdad $f(x) < f(x_0)$ (respectivamente $f(x) > f(x_0)$, y cuando $x_0 < x < x_0 + \delta$ la desigualdad $f(x) > f(x_0)$ (respectivamente $f(x) < f(x_0)$).*

De esta forma, los puntos de crecimiento y decrecimiento de la función $f$ se caracterizan por que durante el paso por ellos el incremento $\Delta f$ cambia de signo, más preciso, de "$-$" a "$+$" en el punto de crecimiento y de "$+$" a "$-$" en el punto de decrecimiento (fig. 55).

No se debe pensar que si la función está definida sobre el intervalo, entonces cualquier punto de este intervalo es o bien un punto de extremo de la función, o bien un punto de crecimiento, o bien un punto de decrecimiento: pueden existir puntos, que no pertenezcan a ninguno de los tipos señalados. Por ejemplo, el punto $x = 0$ para la función

$$y = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{cuando } x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando } x = 0 \end{cases} \tag{14.2}$$

no es ni punto de extremo, ni punto de crecimiento, ni punto de decrecimiento.

La derivada de la función (14.2) es igual (véase el ejemplo 8 en el p. 9.7)

$$y' = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{cuando } x \neq 0, \qquad (14.3') \\ 0 & \text{cuando } x = 0. \qquad (14.3'') \end{cases}$$

De esta forma, la función (14.2) es diferenciable sobre todo el eje numérico. Cuando $x = 0$ su derivada tiene discontinuidad de segundo género, ya que

$$\lim_{x \to 0} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 \tag{14.4}$$

y el segundo sumando en el segundo miembro de la igualdad (14.3′), es decir, $-\cos \dfrac{1}{x}$ no tiene límite cuando $x \to 0$. Además de esto, este sumando, variando en cualquier entorno unilateral del punto $x = 0$ desde $-1$ hasta $+1$, cambia de signo infinitas veces. De aquí, a base de las fórmulas (14.3′) y (14.3′′) y (14.4) se deduce que la derivada de la función (14.2) en cualquier entorno unilateral del cero, tan pe-

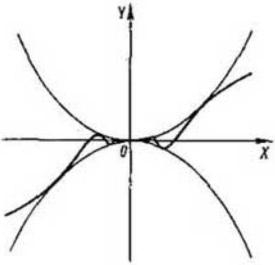



FIG. 56

queño como se quiera, también cambia de signo. El carácter general del comportamiento de la función (14.2) está representado en la fig. 56.

Enunciemos ahora las condiciones suficientes para la presencia de extremos estrictos, así como también de los puntos de crecimiento y decrecimiento fundamentadas en la utilización de las derivadas de órdenes superiores.

**Teorema 4.** *Supongamos que en el punto $x_0$ para la función $f$ existen las derivadas hasta de orden $n \geqslant 1$ inclusive, además*

$$f^{(i)}(x_0) = 0 \quad para \quad i = 1, \ldots, \quad n - 1, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0. \tag{14.5}$$

*Entonces, si $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, es decir, $n$ es un número par, entonces la función $f$ tiene en el punto $x_0$ un extremo estricto, más preciso, un maximo cuando $f^{(2k)}(x_0) < 0$ y un mínimo cuando $f^{(2k)}(x_0) > 0$. Si $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, \ldots$, es decir, $n$ es un número impar, entonces la función $f$ no tiene en el punto $x_0$ extremos; en este caso, $x_0$ es un punto de crecimiento cuando $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ y de decrecimiento cuando $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$.*

Hagámosle a la demostración del teorema una pequeña observación.

Si $\beta(x) = o(\alpha(x))$ cuando $x \to x_0$, entonces existe un $\delta > 0$, tal que cuando $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, es válida la desigualdad

$$|\beta(x)| \leqslant \frac{1}{2}\,|\alpha(x)|. \tag{14.6}$$

En realidad,

$$\beta(x) = \varepsilon(x)\alpha(x), \tag{14.7}$$

donde $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ y, por lo tanto, existe un $\delta$ tal que cuando $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, se cumple la desigualdad

$$|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}\,. \tag{14.8}$$

De (14.7) y (14.8) se deduce (14.6).

DEMOSTRACIÓN. Ante todo observemos que ya que $f$ tiene en el punto $x_0$ derivada de orden $n \geqslant 1$, entonces (según la definición de derivada) la derivada de orden $n - 1$ de la función analizada, está definida en cierto entorno del punto $x_0$. Por esto, la propia función $f$ también está definida, en todo caso, en el mismo entorno del punto $x_0$.

Escribamos la fórmula de Taylor de orden $n$ para la función $f$ en un entorno del punto $x_0$. En virtud de (13.5') y la condición (14.5) tendremos

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta x^n + \alpha(x), \tag{14.9}$$

donde $\Delta x^n \overset{\text{def}}{=} (\Delta x)^n$,

$$\alpha(x) = o(\Delta x^n), \quad \Delta x \to 0,$$

y, por lo tanto (véase el p. 8.2),

$$\alpha(x) = o\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta x^n\right), \quad \Delta x \to 0.$$

Por esto, por la observación hecha, existe un $\delta > 0$, tal que cuando $|\Delta x| < \delta$, $\Delta x \neq 0$,

$$|\alpha(x)| < \frac{1}{2}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta x^n\right|.$$

De aquí se deduce que cuando $|\Delta x| < \delta$, $\Delta x \neq 0$, el signo del segundo miembro de la igualdad (14.9), y por lo tanto, el signo de $\Delta f$ coincide con el signo del primer sumando del segundo miembro.

Si $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces en (14.9) $\Delta x$ se eleva a una potencia par, por esto el signo de $\Delta f$ no depende del signo de $\Delta x \neq 0$, y por lo tanto, $x_0$ es un punto de extremo estricto, además un punto de máximo estricto cuando $f^{(2k)}(x_0) < 0$ (en este caso $\Delta f < 0$) y mínimo estricto cuando $f^{(2k)}(x_0) > 0$ (en este caso $\Delta f > 0$).

Si $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, entonces $\Delta x$ se eleva a una potencia impar, por esto, el signo de $\Delta f$ cambia junto con la variación del signo de $\Delta x$, y, por lo tanto, $x_0$ no es un punto de extremo. Si $\Delta x$ cambia de signo de "$-$" a "$+$", entonces caundo $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ el incremento $\Delta f$ cambia el signo de "$-$" a "$+$", y, por lo tanto, $x_0$ es un punto de crecimiento de la función $f$, y cuando $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$ el incremento $\Delta f$ cambia de signo de "$+$" a "$-$", y, por lo tanto, $x_0$ es un punto de decrecimiento de la función $f$. □

Del teorema demostrado se derivan, en particular, cuando $n = 1$ y $n = 2$ dos corolarios.

1. *Si $f'(x) > 0$, entonces $x_0$ es un punto de crecimiento de la función; si $f'(x) < 0$, entonces $x_0$ es un punto de decrecimiento de la función.*

2. *Si $f'(x_0) = 0$, y $f''(x_0) \neq 0$, entonces cuando $f''(x_0) < 0$, $x_0$ es un punto de mínimo estricto, y cuando $f''(x_0) < 0$, es un punto de máximo estricto de la función* (fig. 57).

El corolario 1 sigue siendo válido para las derivadas infinitas: si $f'(x_0) = +\infty$ (respectivamente $f'(x_0) = -\infty$), entonces $x_0$ es un punto de crecimiento (respecti-

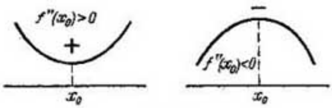



FIG. 57

vamente de decrecimiento) de la función. En realidad, si por ejemplo, $f'(x_0) = +\infty$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, y, en particular, para $\varepsilon = 1$ existe un $\delta > 0$, tal que para todos los $\Delta x$, que satisfacen la condición $|\Delta x| < \delta$, tiene lugar la desigualdad $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 1$. Por esto cuando $0 < \Delta x < \delta$ tenemos $\Delta y > \Delta x > 0$ y cuando $-\delta < \Delta x < 0$, análogamente $\Delta y < \Delta x < 0$, es decir, $x_0$ es un punto de crecimiento. De forma semejante se analiza el caso $f'(x_0) = -\infty$.

Señalemos que del primer corolario otra vez se deriva el teorema de Fermat (véase el teorema 1 del p. 11.1). En efecto, si la función $f(x)$ está definida en cierto entorno del punto $x_0$ y tiene en este punto un extremo, entonces la derivada en $x_0$ no puede ser ni positiva, ni negativa, ya que en caso contrario la función o bien crecería, o bien decrecería en este punto. Por lo tanto, la derivada en $x_0$, o no existe, o si existe, necesariamente es nula.

Observemos también que del teorema 4 se deduce directamente el criterio siguiente de presencia de puntos extremos.

*Supongamos que para la función $f$ en el punto $x_0$ existen las derivadas hasta de orden $n \geqslant 1$, inclusive, además*

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad n-1, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

*Entonces, para que cuando $x = x_0$ la función alcance un extremo, es necesario y suficiente que $n$ sea un número par.*

Todas las reglas obtenidas son válidas sólo en el caso cuando la función $f$ está definida en cierto entorno del punto $x_0$. Sin embargo, sobre los extremos de la función se puede hablar no sólo en este caso: sea $f$ una función definida sobre cierto conjunto númerico $E$; llamaremos a $x_0 \in E$ *punto de máximo* (*mínimo*) *), si existe un $\delta > 0$, tal que si $x \in E$ y $|x - x_0| < \delta$, entonces $f(x) \leqslant f(x_0)$ (respectivamente $f(x) \geqslant f(x_0)$). De una forma semejante se definen en este caso los conceptos de máximo estricto y de mínimo estricto, se debe solamente cambiar los signos de las desigualdades no estrictas por los de las desigualdades estrictas y exigir además que $x \neq x_0$.

Por ejemplo, si la función $f$ está definida sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$, entonces el punto $a$ en el sentido señalado puede ser extremal. Señalemos, sin embargo, que la derivada (por la derecha) en este punto, en general, no está obligada a convertirse en cero. Así, la función $y = x$, analizada sobre el segmento $[0, 1]$, tiene mínimo estricto cuando $x = 0$ y maximo estricto cuando $x = 1$, sin embargo, en estos puntos, como sobre todo el segmento $[0, 1]$, $y' = 1$.

---

*) Sería correcto agregar local, pero no vamos a complicar la terminología.

La aclaración de la circunstancia de si la función tiene o no extremos en los extremos del intervalo, perteneciente a su dominio (a estos extremos los llamaremos extremales), exige una investigación especial.

Ejercicio 2. Sea la función $f$ definida sobre el segmento $[a, b]$ y tiene derivadas cuando $x = a$ y $x = b$. Demuéstrese que si $f'_+(a) > 0$ (respectivamente $f'_-(b) < 0$, entonces el punto $x = a$ (respectivamente $x = b$) es un punto de mínimo estricto, y si $f'_+(a) < 0$ (respectivamente $f'(b) > 0$), entonces $x = a$ (respectivamente $x = b$) es un punto de máximo estricto.

Los teoremas establecidos por nosotros descansan en la base de un método, que permite resolver uniformemente infinidad de problemas matemáticos, físicos y técnicos, en los cuales se buscan los valores extremos de alguna magnitud.

Supongamos, por ejemplo, que se exige determinar el valor máximo de la función $f$ sobre el segmento $[a, b]$. Puede suceder, que esto sea posible realizar de una forma suficientemente sencilla por algún método, partiendo de un tipo concreto de función. Si no se ve cómo se puede hacer esto, entonces se deben hallar todos sus puntos críticos, que se encuentren sobre $[a, b]$ (el punto, en el cual la función está definida, y su derivada o bien es nula, o bien no existe, usualmente se llama *punto crítico* de esta función). Después, de estos valores de $x$ es necesario, partiendo de lo dicho, separar aquellos en los cuales es posible un máximo (se puede a ciencia cierta desechar los puntos que satisfacen las condiciones suficientes para la presencia de un mínimo). Después de esto, es suficiente comparar entre sí, por la magnitud, los valores de la función en los puntos obtenidos y los números $f(a)$ y $f(b)$; el mayor de estos números será el valor máximo de la función sobre el segmento $[a, b]$. Este problema puede resolverse en principio, a ciencia cierta, si el conjunto de los puntos críticos es finito.

Si la función está definida sobre el intervalo semiabierto (finito o infinito), por ejemplo, sobre el intervalo semiabierto de la forma $[a, b)$, el problema sobre la determinación de su valor máximo sobre este intervalo semiabierto exige investigaciones auxiliares, hallando el conjunto de los puntos señalados anteriormente, es necesario estudiar el comportamiento de la función cuando $x \to b - 0$. De forma análoga se resuelven los problemas de determinación de los valores mínimos de la función.

Sin embargo, no se debe pensar, que el método expuesto permite hallar los puntos de extremo de la función dada con el grado de exactitud necesario. Esto no es así, ya que si utilizamos este método, es necesario ante todo, saber resolver la ecuación $f'(x) = 0$ con el grado de exactitud dado, lo que resulta otro problema matemático. Como éste se resuelve con ayuda del cálculo diferencial, en aquellos casos cuando la solución exacta de la ecuación no se da en una forma explícita, se mostrará más adelante (véase el tomo 2, § 60).

Ejemplo. Dos puntos se mueven con velocidades constantes $v_1$ y $v_2$ por dos rectas, que forman un ángulo recto, en el sentido del vértice de este ángulo, del cual al inicio del movimiento el primer punto se encontraba a una distancia $a$ y el segundo a una distancia $b$. ¿En qué momento después del inicio del movimiento la distancia entre los puntos será mínima?

Sea $\rho = \rho(t)$ la distancia entre los puntos en el momento $t$ después del inicio del movimiento, que consideraremos comenzado cuando $t = 0$. Entonces

$$\rho^2(t) = (a - v_1 t)^2 + (b - v_2 t)^2.$$

La función $\rho(t)$, evidentemente, alcanza el mínimo para el mismo valor $t$, para el cual alcanza el mínimo la función $y = \rho^2(t)$.

Físicamente es evidente que la distancia $\rho(t)$ debe alcanzar un mínimo (los cuerpos comienzan a acercarse) y a ciencia cierta no hay máximo, ya que $\rho(t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$. En virtud de la condición necesaria de extremo esto puede ser sólo en un punto en el cual $y' = 0$ y ya que $y' = -2v_1(a - v_1 t) - 2v_2(b - v_2 t)$ entonces de la condición $y' = 0$ obtenemos una solución única

$$t_0 = \frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2},$$

que da respuesta a la pregunta planteada.

## 14.3. CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Sea la función $f$ definida sobre el intervalo $(a, b)$ y sea $a < x_1 < x_2 < b$. Tracemos una recta por los puntos $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2, f(x_2))$, que están sobre la gráfica de la función $f$. Su ecuación será

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Denotemos el segundo miembro de esta ecuación por $l(x)$, entonces abreviadamente se escribe de la forma

$$y = l(x).$$

Es evidente que $l(x_1) = f(x_1)$, $l(x_2) = f(x_2)$.

**Definición 3.** *La función $f$ se llama convexa hacia las $y$ positivas* (*convexa hacia las $y$ negativas*) *sobre el intervalo* $(a, b)$ *si cualesquiera que sean los puntos $x_1$ y $x_2$, $a < x_1 < x_2 < b$, para cualquier punto $x_0$ del intervalo $(x_1, x_2)$, se cumple la desigualdad*

$$l(x_0) \leqslant f(x_0) \tag{14.10}$$

(*respectivamente*

$$l(x_0) \geqslant f(x_0)). \tag{14.11}$$

Geométricamente esto significa que cualquier punto de la cuerda $AB$ (es decir, del segmento de la recta $y = l(x)$ con extremos en los puntos $A$ y $B$) está no por encima (no por abajo) del punto de la gráfica de la función $f$ correspondiente al mismo valor del argumento (fig. 58).

**Definición 4.** *Si en lugar de* (14.10) *y* (14.11) *se cumplen las desigualdades estrictas $l(x_0) < f(x_0)$ y respectivamente $l(x_0) > f(x_0)$ para cualesquiera $x_0$, $x_1$ y $x_2$ tales que $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$, entonces la función $f$ se llama estrictamente convexa hacia las $y$ positivas* (*estrictamente convexa hacia las $y$ negativas*) *sobre el intervalo* $(a, b)$.

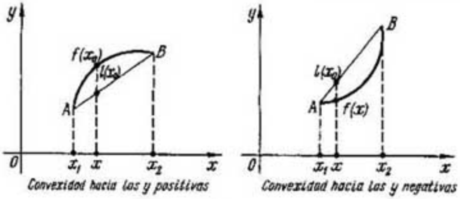



FIG. 58

En este caso cualquier punto de la cuerda $AB$, excluyendo sus extremos se encuentra por abajo (por encima) del punto correspondiente de la gráfica de la función.

**Definición 5.** *Cualquier intervalo, sobre el cual la función es (estrictamente) convexa hacia las y positivas, respectivamente hacia las y negativas, se llama intervalo de convexidad (estricta) hacia las y positivas, respectivamente hacia las y negativas, de esta función.*

**Teorema 5 (condición suficiente de la convexidad estricta).** *Sea la función $f$ dos veces diferenciable sobre el intervalo $(a, b)$. Entonces, si $f'' < 0$ sobre $(a, b)$, la función $f$ es estrictamente convexa hacia las y positivas y si $f'' > 0$ sobre $(a, b)$, entonces la función $f$ es estrictamente convexa hacia las y negativas sobre este intervalo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a < x_1 < x < x_2 < b$. Entonces

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x)\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f(x_2) - f(x)](x - x_1) - [f(x) - f(x_1)](x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Aplicando el teorema de Lagrange (véase el p. 11.2) obtenemos

$$l(x) - f(x) = \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f'(\eta) - f'(\xi)](x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1},$$

donde $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$.

Apliquemos de nuevo el teorema de Lagrange:

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(\zeta)(x_2 - x)(x - x_1)(\eta - \xi)}{x_2 - x_1}, \quad \xi < \zeta < \eta.$$

De aquí se ve que si $f'' < 0$ sobre $(a, b)$, por consiguiente, en particular, $f''(\zeta) < 0$, entonces $l(x) < f(x)$, es decir, la función $f$ es convexa estrictamente

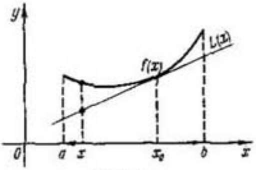



FIG. 59

hacia las $y$ positivas; si $f'' > 0$ sobre $(a, b)$, entonces $l(x) > f(x)$, es decir, la función $f$ es convexa hacia las $y$ negativas. □

La condición del signo constante de la segunda derivada, siendo suficiente para la convexidad estricta (hacia las $y$ positivas o negativas) no es al mismo tiempo necesaria. Así, la función $y = x^4$ es estrictamente convexa hacia las $y$ negativas sobre toda la recta numérica, no obstante, su segunda derivada $y'' = 12x^2$ se anula para $x = 0$.

Señalemos que si la función $f$ es (estrictamente) convexa hacia las $y$ positivas en el intervalo $(a, b)$, entonces la función $f$ es (estrictamente) convexa hacia las $y$ negativas sobre este intervalo y viceversa, y por cuanto $\frac{d^2}{dx^2}[-f(x)] = -\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, entonces, por ejemplo, la condición suficiente de convexidad estricta hacia las $y$ positivas dada en el teorema 5 se deduce de la condición suficiente de convexidad estricta de la función hacia las $y$ negativas contenida en este mismo teorema.

Ejercicios. 3. Demuéstrese que para la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{cuando} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando} \quad x = 0 \end{cases}$$

el punto $x = 0$ no pertenece a ningún intervalo de convexidad hacia las y positivas o negativas y no es extremo de ninguno de estos intervalos.

4. Demuéstrese que la función $y = x^4$ es convexa estrictamente hacia las $y$ negativas sobre todo el eje numérico.

Vemos que la convexidad hacia las $y$ positivas o negativas de una función $f$ depende del signo de la segunda derivada. Resulta que la ubicación de la gráfica de una función dos veces diferenciable con respecto a la tangente, también, en determinado sentido, está relacionada con el signo de la segunda derivada.

**Teorema 6.** *Supongamos que la función $f$, en todo el intervalo $(a, b)$, tiene segunda derivada positiva (negativa): $f''(x) > 0$ (respectivamente, $f''(x) < 0$), $x \in (a, b)$* *). *Entonces cualquiera que sea el punto $x_0 \in (a, b)$, todos los puntos*

*) De aquí se deduce que la función $f$ es estrictamente convexa hacia las $y$ negativas (positivas) sobre $(a, b)$.

*$(x, f(x))$, $x \in (a, b)$, de la gráfica de la función $f$ están por arriba (respectivamente por abajo) de la tangente trazada a ella en el punto $(x_0, f(x_0))$ (naturalmente, el propio punto, que se encuentra sobre la tangente indicada, es una excepción* *) (fig. 59).

En efecto, la ecuación de la tangente a la gráfica de la función $f$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ será

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Denotemos el segundo miembro de esta ecuación por $L(x)$. Entonces, aplicando el teorema de Lagrange a la diferencia $f(x) - f(x_0)$ obtendremos

$$\begin{aligned} f(x) - L(x) &= [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0) = \\ &= f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0), \end{aligned}$$

donde $a < x_0 < b$, $a < x < b$ y el punto $\xi$ está entre $x$ y $x_0$.

Aplicando otra vez el teorema de Lagrange, pero ya al incremento de la derivada, obtendremos

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0)$$

donde el punto $\eta$ está entre $\xi$ y $x_0$.

Cuando $x \neq x_0$ tenemos $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$ ya que el punto $\xi$ siempre está entre $x$ y $x_0$ y, por consiguiente, siempre está por el mismo lado de $x_0$ que el punto $x$.

Por consecuencia, el signo de la diferencia $f(x) - L(x)$ coincide, cuando $x \neq x_0$, con el signo de $f''(\eta)$. Por esto, si sobre el intervalo $(a, b)$ la segunda derivada es positiva (por consiguiente es positiva en el punto $\eta$), entonces para todas las $x \in (a, b)$ menos para el punto $x = x_0$ se cumple la desigualdad $f(x) - L(x) < 0$; si sobre el intervalo $(a, b)$ la segunda derivada es negativa: entonces para los puntos indicados es válida la desigualdad $f(x) - L(x) < 0$. □

Aclaremos este teorema partiendo de consideraciones algo diferentes. Si la función $f$ en todos los puntos sobre cierto intervalo tiene segunda derivada, entonces en el entorno de cualquier punto $x_0$ de este intervalo se puede seleccionar la parte principal de la función $f$ en forma de polinomio de Taylor de segundo orden

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2, \quad x \to x_0$$

y por consiguiente la gráfica de la función $f''$ "en el entorno del punto $x_0$ se comporta casi como una parábola"

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2,$$

la cual, cuando su coeficiente de $x^2$, es decir $\dfrac{f''(x_0)}{2}$ es positivo, es convexa hacia las

---

*) Si la función $f$ además está definida y tiene derivada unilateral en el extremo $a$ ó $b$ del intervalo, entonces la propiedad indicada, como se ve en la demostración que se dará más adelante, se cumple también para la tangente en el punto $(a, f(a))$ (respectivamente, en el punto $(b, f(b))$).

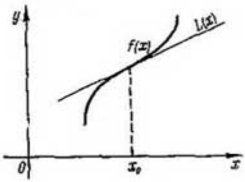



FIG. 60

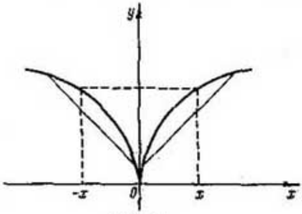



FIG. 61

$y$ negativas y está por arriba de cualquier tangente, en particular, por arriba de la tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ (esta recta es también la tangente a la gráfica de la función $f$), y cuando el coeficiente indicado es negativo, es convexa hacia las $y$ positivas y está por abajo de cualquiera de sus tangentes.

De nuevo vemos qué conveniente es, en el estudio de una función en el entorno de un punto dado, separar con ayuda de la fórmula de Taylor la parte principal de la función en este punto. En el futuro, al resolver diversos problemas del análisis, de nuevo, repetidas veces tendremos la oportunidad de convencernos de las grandes posibilidades y de lo fructífero del método de la separación de la parte principal.

**Definición 6.** *Supongamos que la función $f$ es diferenciable para $x = x_0$ y supongamos que $y = L(x)$ es la ecuación de la tangente a la gráfica de la función $f$ en el punto $(x_0, f(x_0))$. Si la diferencia $f(x) - L(x)$ cambia de signo al pasar por el punto $x_0$, entonces $x_0$ se llama punto de inflexión de la función.*

Más detallada y exactamente, esto significa que existe un $\delta$-entorno $U(x_0, \delta)$ del punto $x_0$ tal que sobre cada uno de los intervalos $(x_0 - \delta, x_0)$ y $(x_0, x_0 + \delta)$ la diferencia $f(x) - L(x)$ conserva el signo constante contrario a su signo sobre el otro intervalo.

Geométricamente esto significa que la gráfica de la función $f$ pasa en el punto $(x_0, f(x_0))$ de un lado (de la recta inclinada) de la tangente en este punto al otro lado (véase la fig. 60).

Si $x_0$ es un punto de inflexión de la función, entonces el punto $(x_0, f(x_0))$ se llama *punto de inflexión de la gráfica de la función $f$.*

Ejemplos. 1. $f(x) = x^3$, $f''(x) = 6x$. Evidentemente en este caso $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y $f''(x) > 0$ para $x > 0$. Por esto, sobre el intervalo infinito $(-\infty, 0)$, la función $f(x) = x^3$ es convexa estrictamente hacia las $y$ positivas; sobre el intervalo $(0, +\infty)$ es convexa estrictamente hacia las $y$ negativas y el punto $x = 0$ es al mismo tiempo extremo de intervalos de convexidad hacia las $y$ positivas y negativas. Este punto es también un punto de inflexión por cuanto la ecuación de la tangente en él será $y = 0$ y para $x < 0$ tiene lugar la desigualdad $f(x) < 0$ y para $x > 0$ al contrario $f(x) > 0$.

2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; la gráfica de esta función (fig. 61) se llama *parábola semicúbica*. Aquí $f''(x) = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, por lo que para todos los $x \neq 0$ es válida la desigual-

dad $f''(x) < 0$. Por consiguiente, los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ son intervalos de convexidad estricta hacia las $y$ positivas. Conjuntamente con esto, para cualquier $x \neq 0$

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = f(x) > 0 = f(0),$$

por lo que el punto $x = 0$ no pertenece a ningún intervalo de convexidad hacia las $y$ positivas (esta función no tiene intervalo de convexidad hacia las $y$ negativas).

La gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en el punto $(0, 0)$ tiene tangente vertical y sus ramas para las cuales $x > 0$ y $x < 0$ están por lados diferentes de ella. No obstante, $x = 0$ no es un punto de inflexión, por cuanto en virtud de la verticalidad de la tangente en este punto su ecuación no se puede escribir en la forma $y = L(x)$ y, por consiguiente, $x = 0$ no satisface las condiciones de la definición 6.

Dicho en sentido figurado, la gráfica de la parábola semicúbica no hace inflexión al pasar por la tangente en el punto $(0, 0)$, sino que "regresa hacia atrás", por lo que los puntos de este tipo se llaman *puntos de retroceso*.

**Teorema 7 (condición necesaria de la existencia de un punto de inflexión).** *Supongamos que la función $f$ tiene para $x = x_0$ segunda derivada continua. Entonces, si el punto $x_0$ es un punto de inflexión de la función $f$, $f''(x_0) = 0$.*

En efecto, si tuviera lugar la desigualdad $f''(x_0) > 0$ (respectivamente, $f''(x_0) < 0$), entonces, por la continuidad de la segunda derivada para $x = x_0$, se encontraría un entorno $U(x_0)$ de este punto en el cual se cumpliría la condición $f''(x) > 0$ (respectivamente, $f''(x) < 0$) y, por consiguiente, por el teorema 6, para todos los $x \in U(x)$, $x \neq x_0$, la gráfica de la función $f$ estaría por arriba (por abajo) de la tangente trazada a ella en el punto $x_0$, lo cual contradiría que $x_0$ es un punto de inflexión. □

OBSERVACIÓN. De forma semejante a como todos los puntos de extremo de una función pertenecen al conjunto de los puntos en los cuales la derivada o bien es igual a cero o bien no existe, así mismo todos los puntos de inflexión de una función (dos veces continuamente diferenciable, menos podría ser para un número finito de valores de la variable independiente) entran en el conjunto de los puntos en los cuales la segunda derivada o bien es igual a cero, o bien no existe.

**Teorema 8 (primera condición suficiente de la existencia de un punto de inflexión).** *Si una función $f$ diferenciable en el punto $x_0$ es dos veces diferenciable en algún entorno reducido $\mathring{U}(x_0, \delta)$ de este punto y la segunda derivada $f''$ de la función $f$ cambia de signo al pasar el argumento por $x_0$ (es decir, o bien $f''(x) < 0$ cuando $x_0 - \delta < x < x_0$ y $f''(x) > 0$ cuando $x_0 < x < x_0 + \delta$, o bien $f''(x) > 0$ cuando $x_0 - \delta < x < x_0$ y $f''(x) < 0$ cuando $x_0 < x < x_0 + \delta$), entonces $x_0$ es un punto de inflexión de la función $f$.*

En realidad, representemos, como se hizo anteriormente, la ecuación de la tangente $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ en la forma $y = L(x)$. En la demostración del teorema 6 fue mostrado que

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0),$$

donde los puntos $x$ y $\xi$ están por un mismo lado de $x_0$, por lo que cuando $x \neq x_0$ tenemos $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$ y, por consiguiente,

$$\operatorname{sign}[f(x) - L(x)] = \operatorname{sign} f''(\eta).$$

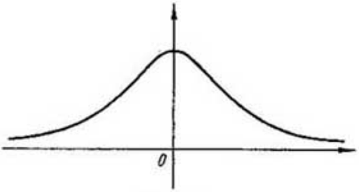


FIG. 62

El punto $\eta$ está entre $\xi$ y $x_0$, es decir, por el mismo lado de $x_0$ que el punto $x$. De aquí se deriva que si $f''$ cambia de signo al pasar el punto $x_0$, entonces la diferencia $f(x) - L(x)$ cambia de signo y, por consiguiente, es un punto de inflexión. □

**Teorema 9 (segunda condición suficiente para la presencia de un punto de inflexión).** *Sea $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, entonces $x_0$ es un punto de inflexión.*

DEMOSTRACIÓN. Por la fórmula de Taylor, en virtud de la condición $f''(x_0) = 0$ tenemos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3),$$

y por cuanto $L(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, entonces

$$f(x) - L(x) = \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3).$$

De aquí se deduce (véase la observación sobre los infinitésimos ante la demostración del teorema 4 de este párrafo), que el signo de la diferencia $f(x) - L(x)$ cambia cuando cambia el signo de $x - x_0$. Esto significa que $x_0$ es un punto de inflexión. □

Ejemplo. Analicemos la función $f(x) = e^{-x^2}$ y hallemos sus puntos de inflexión. Tenemos

$$f'(x) = -2xe^{-x^2},$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = 4\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

De aquí se ve que la segunda derivada de la función $f$ se anula en los puntos $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ y al pasar por ellos cambia su signo. Por consiguiente, por el teorema 8, estos puntos son puntos de inflexión de la función $f$ (fig. 62).

**Problema 10.** Demuéstrese que si la función $f$ es continua sobre el intervalo $(a, b)$ y si para cualesquiera puntos $x_1$ y $x_2$, $a < x_1 < x_2 < b$, se cumple la desigualdad

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leqslant f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

entonces $(a, b)$ es un intervalo de convexidad hacia las $y$ positivas para la función $f$.

**Problema 11.** Demuéstrese la afirmación que sigue a continuación. Para que una función diferenciable sea convexa hacia las $y$ positivas (negativas) sobre cierto intervalo, es necesario y suficiente que su derivada decrezca (crezca) sobre él. Para que una función diferenciable sea estrictamente convexa hacia las $y$ positivas (negativas) sobre cierto intervalo es suficiente que su derivada decrezca (crezca) estrictamente sobre él.

### 14.4. ASÍNTOTAS

**Definición 7.** *Supongamos que la función $f(x)$ está definida para todos los $x > a$ (respectivamente, para todos los $x < a$). Si existen los números $k$ y $l$ tales que $f(x) - kx - l = o(1)$ cuando $x \to +\infty$ (respectivamente, cuando $x \to -\infty$), entonces la recta*

$$y = kx + l \tag{14.12}$$

*se llama asíntota de la gráfica de la función $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ (respectivamente, cuando $x \to -\infty$).*

La existencia de una asíntota de la gráfica de una función significa que cuando $x \to +\infty$ (ó $x \to -\infty$) la función se comporta "casi como una función lineal", es decir, se diferencia de una función lineal en un infinitésimo.

Hallemos, por ejemplo, la asíntota de la gráfica de la función $y = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$. Dividiendo el numerador por el denominador según la regla de la división de polinomios obtendremos $y = x - 4 + \dfrac{2}{x + 1}$. Ya que $\dfrac{2}{x + 1} = o(1)$ cuando $x \to \pm\infty$, entonces la recta $y = x - 4$ es la asíntota de la gráfica de la función dada tanto cuando $x \to +\infty$ como cuando $x \to -\infty$.

Analicemos el sentido geométrico de la asíntota. Sea $M = (x, f(x))$ un punto de la gráfica de la función $f$, $M_0$ es la proyección de este punto sobre el eje $Ox$, $AB$ es la asíntota (14.12); $\theta$, el ángulo entre la asíntota y el sentido positivo del eje $Ox$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$; $MP$, la perpendicular bajada desde el punto $M$ sobre la asíntota $AB$; $Q$, el punto de intersección de la recta $MM_0$ con la asíntota $AB$ (fig. 63). Entonces

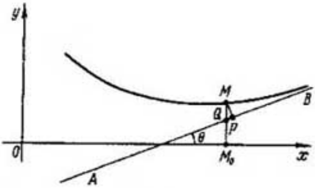



FIG. 63

$MM_0 = f(x)$, $QM_0 = kx + l$, $MQ = MM_0 - QM_0 = f(x) - (kx + l)$, $MP = MQ \cos\theta$. De esta forma, $MP$ se diferencia de $MQ$ sólo en el factor $\cos\theta$ diferente de cero, por lo que las condiciones $MQ \to 0$ y MP $\to 0$ cuando $x \to +\infty$ (respectivamente, cuando $x \to -\infty$) son equivalentes, es decir, si $\lim\limits_{x\to+\infty} MQ = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} MP = 0$ y viceversa.

De aquí se deduce que la asíntota puede ser definida como la recta, la distancia hasta la cual desde la gráfica de la función, es decir, el segmento $MP$, tiede a cero cuando el punto $M = (x, f(x))$ "tiende al infinito permaneciendo en la gráfica" (cundo $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$, respectivamente).

Indiquemos ahora el método general de la búsquede de la asíntota (14.12), es decir, el método de definición de los coeficintes $k$ y $l$ en la ecuación (14.12). Analizaremos para mayor exactitud sólo el caso $x \to +\infty$ (cuando $x \to -\infty$ el razonamiento se lleva a cabo análogamente). Supongamos que la gráfica de la función $f$ tiene una asíntota (14.12) cuando $x \to +\infty$. Entonces por definición

$$f(x) = kx + l + o(1). \tag{14.13}$$

Dividamos ambas partes de la igualdad (14.10) por $x$ y pasemos al límite cuando $x \to +\infty$. Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \tag{14.14}$$

Utilizando el valor $k$ hallado, obtendremos de (14.13) para la determinación de $l$ la fórmula

$$l = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx). \tag{14.15}$$

La afirmación inversa también es válida: si existen los números $k$ y $l$ tales que se cumple la condición (14.15), entonces la recta $y = kx + l$ es asíntota de la gráfica de la función $f(x)$. En realidad, de (14.15) tenemos

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx + l)] = 0,$$

es decir, la recta $y = kx + l$ efectivamente satisface la definición de asíntota, dicho de otro modo, cumple la condición (14.13).

De esta forma, las fórmulas (14.14) y (14.15) reducen el problema de la búsqueda de las asíntotas (14.12) al cálculo de límites de un tipo determinado. Más aún, mostramos que si existe la representación de la función $f$ en la forma (14.13), entonces $k$ y $l$ se expresan por las fórmulas (14.14) y (14.15). Por consiguiente, si existe la representación (14.13), entonces es única.

Hallemos por esta regla la asíntota de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$ hallada por nosotros anteriormente por otro método:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x - 2}{x(x - 1)} = 1,$$

$$l = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x - 2}{x + 1} = -4,$$

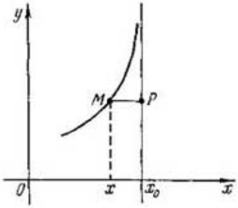



FIG. 64

es decir, como era de esperar, obtuvimos la misma ecuación de la asíntota $y = x - 4$ tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.

La ecuación de cualquier recta no paralela al eje $Oy$ puede ser escrita en la forma (14.12). Es natural extender la definición de asíntota a las rectas paralelas al eje $Oy$.

**Definición 8.** *Supongamos que la función f está definida en cierto entorno del punto $x_0$ (puede ser unilateral) y supongamos que se cumpla al menos una de las siguientes condiciones*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty. \tag{14.16}$$

*Entonces la recta $x = x_0$* (fig. 64) *se llama asíntota vertical de la gráfica de la función f (a diferencia de la asíntota del tipo* (14.12) *la cual se llama inclinada).*

En el caso de asíntota vertical, como en el caso de inclinada, la distancia $MP = x - x_0$ entre el punto $M$ y la recta $x = x_0$ tiende a cero si el punto $M(x, f(x))$ tiende al infinito por la gráfica, es decir, cuando $x \to x_0 - 0$ ó $x \to x_0 + 0$.

Para hallar las asíntotas verticales de la gráfica de una función $f$ es necesario hallar los valores $x$ para los cuales se cumple una o ambas condiciones (14.16). Por ejemplo, la función $y = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$ tiene una asíntota vertical $x = -1$. En general, si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional (($P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios), $Q(x_0) = 0$, $P(x_0) \neq 0$, entonces la recta $x = x_0$ es una asíntota de la gráfica de la función $f(x)$.

## 14.5. CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

El estudio de una función dada y la construcción de su gráfica con ayuda del aparato analítico desarrollado es racional llevarlo a cabo en el siguiente orden.

1. Determinar el dominio de existencia de la función, la región de continuidad y los puntos de discontinuidad.
2. Hallar las asíntotas.
3. Trazar aproximadamente, a grandes rasgos, la gráfica de la función.
4. Calcular la primera y si es necesario la segunda derivada (con frecuencia sin derivadas de orden superior se llega a la solución).

5. Hallar los puntos en los cuales la primera derivada y la segunda no existen o son iguales a cero.

6. Componer la tabla de variación del signo de la primera y segunda derivadas. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, convexidad hacia las $y$ positivas o negativas de la función, hallar los puntos de extremo (entre ellos los terminales) y los puntos de inflexión.

7. Finalmente trazar la gráfica.

Además, a medida que sea mayor la exactitud que querramos alcanzar en la gráfica, en general, es necesario hallar más puntos sobre ella. Generalmente es conveniente hallar (puede ser con una exactitud determinada) los puntos de intersección de la gráfica con los ejes de coordenadas y los puntos correspondientes a los extremos de la función; otros puntos se hallan a medida de las necesidades.

En el caso en que las expresiones de la segunda derivada sean muy voluminosas, a veces se hace necesario reducirse al análisis de las propiedades de la gráfica que se pueden estudiar sólo con ayuda de la primera derivada.

Ejemplo 1. Construyamos la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$.

Esta función está definida y es continua para todos los $x \neq -1$. Como ya sabemos (véase el p. 14.4) tiene asíntotas $y = x - 4$ y $x = -1$, y además $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = -\infty$. Fue señalado también que $f(x) = x - 4 + \dfrac{2}{x + 1}$ por lo que $f(x) > x - 4$ cuando $x > -1$ (la gráfica de la función se encuentra por arriba de la asíntota) y $f(x) < x - 4$ cuando $x < -1$ (la gráfica se encuentra por abajo de la asíntota).

La gráfica de la función $f(x)$ interseca el eje $Ox$ en los puntos en los cuales $x^2 - 3x - 2 = 0$, es decir, cuando $x_1, x_2 = (3 \pm \sqrt{17})/2$ ó aproximadamente en los puntos $x_1 = 3{,}5$, $x_2 = 0{,}5$. La gráfica interseca el eje $Oy$ en el punto $y = -2$. Esto permite trazar la gráfica de la función $f(x)$ en la forma indicada en la fig. 65.

El estudio posterior tiene el fin de hallar los extremos, los puntos de inflexión y los intervalos de convexidad hacia las $y$ negativas o positivas de la gráfica de la función. Para esto hallemos $y'$ e $y''$:

$$y' = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}, \quad y'' = \frac{4}{(x + 1)^3}.$$

De aquí se ve que $y' = 0$ cuando $x = -1 - \sqrt{2} \approx -2{,}4$ y $x = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}4$. En el punto $x = -1$ las derivadas $y'$ e $y''$ no existen.

Compongamos la tabla de variación del signo de la primera y segunda derivadas en dependencia de la variación del argumento, incluyendo en ella los puntos críticos:

| $x$ | | $-1 - \sqrt{2}$ | | $-1$ | | $-1 + \sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | − | No existe | − | 0 | + |
| $y''$ | − | − | − | No existe | + | + | + |

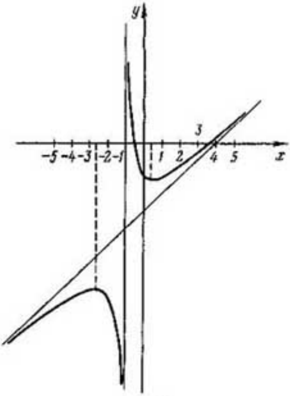



FIG. 65

De esta tabla se ve que la función $f(x)$ tiene en el punto $x = -1 + \sqrt{2}$ un mínimo estricto y en el punto $x = -1 - \sqrt{2}$ un máximo estricto; cuando $x < -1$ la función es convexa estrictamente hacia las $y$ positivas y cuando $x > -1$ es convexa estrictamente hacia las $y$ negativas. No hay puntos de inflexión, ya que cuando $x = -1$ la función es discontinua.

Hemos hallado el carácter general del comportamiento de la función. Para construir la gráfica más exactamente es necesario hallar una serie de puntos de la gráfica como se señaló anteriormente.

En el futuro, para mayor brevedad, a las tablas semejantes a la tabla dada más arriba las llamaremos *tablas del comportamiento de las funciones* y a veces señalaremos en ellas inmediatamente los puntos de extremo, los puntos de inflexión y los intervalos de convexidad.

Ejemplo 2. Construyamos la gráfica de la función $f(x) = (x + 1)^3\sqrt[3]{x^2}$.

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales y además es continua en cada punto, por lo que no tiene asíntotas verticales. Ya que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty,$$

se deduce que no hay también asíntotas inclinadas.

Para la construcción de la gráfica a grandes rasgos observemos que:

1) $f(x)$ se anula en los puntos $x = -1$ y $x = 0$;

2) $f > 0$ cuando $x > -1$, $x \neq 0$;

3) $f < 0$ cuando $x < -1$;

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

El aspecto aproximado de la gráfica de la función que se puede trazar sobre la base de estas observaciones se representa en la fig. 66.

Realicemos ahora una investigación más detallada de la función con ayuda de las derivadas. Hallemos $y'$ e $y''$:

$$y' = \frac{(x+1)^2(11x+2)}{3\sqrt[3]{x}}, \quad y'' = \frac{2(x+1)(44x^2+16x-1)}{9x\sqrt[3]{x}}.$$

De aquí se ve que $y' = 0$ cuando $x = -1$ y $x = -2/11$; $y'' = 0$ cuando $x = -1$ y también cuando $44x^2 + 16x - 1 = 0$, es decir, aproximadamente cuando $x_1 = -9/22$ y $x_2 = 1/22$. Cuando $x = 0$ las derivadas $y'$ e $y''$ no existen.

Compongamos la tabla del comportamiento de la función.

| Intervalos de convexidad y puntos de inflexión | Intervalos de monotonía y puntos del extremo | $y''$ | $y'$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|
| Convexidad hacia las $y$ positivas | | $-$ | $+$ | $(-\infty, -1)$ |
| Puntos de inflexión | | 0 | 0 | $-1$ |
| Convexidad hacia las $y$ negativas | Crecimiento | $+$ | $+$ | $(-1, x_1)$ |
| Punto de inflexión | | 0 | $+$ | $x_1$ |
| | | $-$ | $+$ | $\left(x_1, -\frac{2}{11}\right)$ |
| Convexidad hacia las $y$ positivas | Máximo | $-$ | 0 | $-\frac{2}{11}$ |
| | Decrecimiento | $-$ | $-$ | $\left(-\frac{2}{11}, 0\right)$ |
| | Mínimo | No existe | No existe | 0 |
| Convexidad hacia las $y$ positivas | | $-$ | $+$ | $(0, x_0)$ |
| Punto de inflexión | Crecimiento | 0 | $+$ | $x_2$ |
| Convexidad hacia las $y$ negativas | | $+$ | $+$ | $(x_2, +\infty)$ |

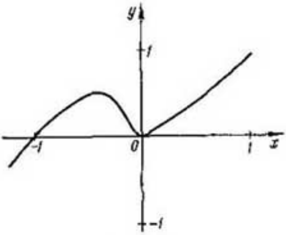



FIG. 66

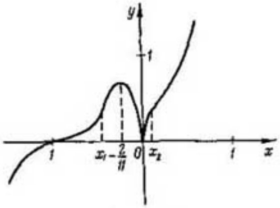



FIG. 67

Ahora se puede trazar la gráfica de la función $y = (x + 1)^3\sqrt[3]{x^2}$ más exactamente. Su aspecto está representado en la fig. 67. Como se ve, la investigación con ayuda de las derivadas permitió precisar sustancialmente el aspecto de la gráfica (compárense las figs. 66 y 67).

El aparato desarrollado permite construir las gráficas de las funciones dadas paramétrica y localmente: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Aquí no se supone que el par de funciones $x = x(t)$ $y = y(t)$ determina unívocamente una función del tipo $y = y(x)$ ó $x = x(y)$. Por gráfica de una función dada paramétricamente se sobreentiende la unión de las gráficas de todas las funciones del tipo $y = f(x)$ y $x = g(y)$ dadas por las fórmulas $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Hagamos algunas observaciones preliminares. Para hallar las asíntotas paralelas al eje $Oy$ es necesario hallar tales valores $t_0$ *) para los cuales existe el límite finito $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} x(t) = a$ ó $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} x(t) = a$ y $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} y(t)$, respectivamente $\lim\limits_{t_0 - 0} y(t)$ es igual a $+\infty$ ó $-\infty$.

Si tales valores $t_0$ existen, entonces

$$x = a \tag{14.17}$$

será la ecuación de la asíntota buscada.

De forma análoga, la búsqueda de las asíntotas paralelas al eje $Ox$ se reduce a la determinación de tales valores $t_0$ para los cuales existen el límite finito $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} y(t) = b$ ó $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} y(t) = b$, y $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} x(t)$, respectivamente $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} x(t)$, es igual a $+\infty$ ó $-\infty$. Si resulta que tales valores $t_0$ existen, entonces

$$y = b \tag{14.18}$$

es la ecuación de la asíntota buscada.

Por último, para la búsqueda de las asíntotas no paralelas ni al eje $Ox$, ni al eje $Oy$, es necesario hallar tales valores $t_0$ para los cuales los límites $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} x(t)$ y

---

*) Aquí y en el futuro $t_0$ es un número o uno de los infinitos $+\infty$ ó $-\infty$.

$\lim\limits_{t \to t_0+0} y(t)$ (ó $\lim\limits_{t \to t_0-0} x(t)$ y $\lim\limits_{t \to t_0-0} y(t)$) son iguales a $+\infty$ ó $-\infty$, y existe el límite finito $\lim\limits_{t \to t_0+0} \dfrac{y(t)}{x(t)} k \neq 0$ (respectivamente, $\lim\limits_{t \to t_0-0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = k$). Si para este valor, además existe el límite finito $\lim\limits_{t \to t_0+0} [y(t) - kx(t)] = l$ (respectivamente, $\lim\limits_{t \to t_0-0} [y(t) - kx(t)] = l$), entonces la recta

$$y = kx + l \tag{14.19}$$

es asíntota de la gráfica de la función analizada.

Aquí siempre $t_0$ puede ser tanto finito como infinito.

Ejercicio 5. Dedúzcanse las ecuaciones de las asíntotas (14.17), (14.18) y (14.19), partiendo de que se llama asíntota la recta tal que la distancia desde el punto $(x(t), y(t))$ de la gráfica de la función, dada paramètricamente: $x = x(t)$, $y = y(t)$, hasta ella tiende a cero cuando el punto tiende al infinito, permaneciendo sobre la gráfica de la función, es decir, cuando $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \to \infty$, cuando $t \to t_0 + 0$ ó $t \to t_0 - 0$.

En el trazado preliminar de la gráfica de una función dada paramétricamente, a menudo es útil construir inicialmente por separado las gráficas de las funciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

Para la determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función dada paramétricamente, para hallar sus extremos, los puntos de inflexión y también los intervalos de convexidad hacia las y positivas o negativas, es necesario utilizar las expresiones de las derivadas $y'_{xx}$ e $y''_{xx}$ por las derivadas $x'_t$, $y''_{tt}$, $y'_t$, $x''_{tt}$. Es necesario tener en cuenta que las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, en general, no definen unívocamente una función del tipo $y = y(x)$, así que en el estudio de la gráfica de la función es necesario siempre seguir con atención que "rama" de la gráfica se analiza. A veces es más útil analizar, por el contrario, a la $x$ como función de la $y$.

Ejemplo 3. Construyamos la gráfica de la función

$$x = \frac{t^2 + 1}{4(1 - t)}, \quad y = \frac{t}{1 + t}. \tag{14.20}$$

La representación paramétrica tiene sentido para todos los $t$ menos $t = \pm 1$. Las asíntotas paralelas al eje $Ox$ se obtienen para $t = 1$ y $t = \pm\infty$, sus ecuaciones son respectivamente $y = 1/2$ e $y = 1$. La asíntota paralela al eje $Oy$ se obtiene para $t = -1$; su ecuación es $x = 1/4$. En el caso dado no hay asíntotas inclinadas.

Para la construcción de la gráfica a grandes rasgos es útil formar la tabla de variación de los signos de las variables $x$ e $y$ en dependencia de la variación de $t$; en ella pueden ser incluidos algunos valores característicos de $x$ e $y$. Así en el caso dado es útil la tabla siguiente.

| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $+\infty$ | $+$ | $1/4$ | $+$ | $1/4$ | $+$ | $\infty$ | $-$ | $-\infty$ |
| $y$ | $1$ | $+$ | $\infty$ | $-$ | $0$ | $+$ | $1/2$ | $+$ | $1$ |

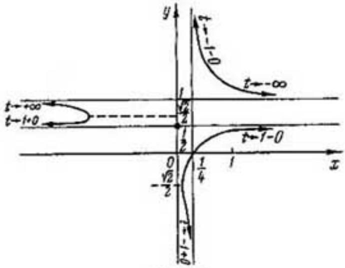



FIG. 68

Ahora construyamos la gráfica (fig. 68). Para mayor claridad, en la gráfica está señalado, cómo las ramas de la gráfica corresponden a la variación del parámetro.

Más adelante,

$$x'_t = \frac{1 + 2t - t^2}{4(1 - t)^3}, \; y'_t = \frac{1}{(1 + t)^2},$$

por esto

$$x'_y = \frac{(1 + t)^2(1 + 2t - t^2)}{4(1 - t)^2}. \tag{14.21}$$

En el caso dado es mejor analizar $x$ como función de $y$, y no al contrario, ya que de la gráfica dibujada se ve que es natural esperar que $x$ se define unívocamente como función de $y$, $y \neq 1/2$ e $y \neq 1$.

De (14.21) se ve que $x'_y = 0$ cuando $t = -1$ y cuando $1 + 2t - t^2 = 0$, es decir, cuando $t = 1 + \sqrt{2}$ y $t = 1 - \sqrt{2}$. Al valor $t = -1$ no le corresponde ningún punto de la gráfica y para $t = 1 + \sqrt{2}$ y $t = 1 - \sqrt{2}$, tenemos respectivamente

$$y = \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{1 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Compongamos ahora la tabla de variación del signo de la derivada $x'_y$, esta tabla permite hallar los puntos de extremo.

| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1 - \sqrt{2}$ | | $1$ | | $1 + \sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $1$ | | $\infty$ | | $-\sqrt{2}/2$ | | $1/2$ | | $\sqrt{2}/2$ | | $1$ |
| $x'/y$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Extremos | | | | | Mínimo | | | | Máximo | | |

De la tabla se ve que en el punto $y = \sqrt{2}/2$ la función $x = x(y)$ tiene máximo, en el punto $y = -\sqrt{2}/2$ mínimo y es estrictamente monótona sobre los intervalos

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \quad (1, +\infty).$$

Es necesario prestar atención a que tomando $y$ como variable independiente y $x$ como la dependiente, es decir, tomando el eje $Oy$ como el primer eje de coordenadas y el eje $Ox$ como el segundo, obtuvimos un sistema de coordenadas orientado en sentido contrario al sistema de coordenadas analizado por nosotros todo el tiempo, en el cual el primer eje es $Ox$ y el segundo $Oy$. Al lector le será útil convencerse de que los criterios demostrados por nosotros más arriba, por ejemplo, para la existencia de los extremos y los puntos de inflexión, geométricamente no están relacionados con una u otra orientación de los ejes de coordenadas.

Para el analisis de la convexidad y de los puntos de inflexión de la función $x(y)$ hallemos $x''_{yy}$:

$$x''_{yy} = (x'_y)'_t t'_y = \frac{(1 + t)^3(3 + 3t - 3t^2 + t^3)}{2(1 - t)^3}.$$

La derivada $x''_{yy}$ es igual a cero cuando $t = -1$ y para aquellos $t$ para los cuales

$$P(t) \equiv 3 + 3t - 3t^2 + t^3 = 0.$$

Observando que $P'(t) = 3(t - 1)^2 \geqslant 0$ y además $P' = 0$ sólo en un punto, $t = 1$ vemos que $P(t)$ crece monótonamente sobre todo el eje real (¿por qué?). Por consiguiente existe un único $t_0$ tal que $P(t_0) = 0$. Además $P(0) = 3 > 0$ y $P(-1) = -4 < 0$ de donde $-1 < t_0 < 0$. Si $y_0 = \dfrac{t_0}{1 + t_0}$, entonces evidentemente $-\infty < y_0 < 0$ (por supuesto se puede obtener una estimación más exacta para $y_0$ escogiendo $t_1$ y $t_2$ más cercanos y tales que $P(t_1) < 0$, $P(t_2) > 0$). Formemos ahora la tabla de variación de la derivada $x''_{yy}$ y determinemos con su ayuda los intervalos de convexidad hacia las $y$ positivas y negativas y también los puntos de inflexión:

| $t$ | $-\infty$ | $(-\infty, -1)$ | $-1$ | $(-1, t_0)$ | $t_0$ | $(t_0, 1)$ | $1$ | $(1, +\infty)$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $1$ | $(1, +\infty)$ | $\infty$ | $(-\infty, y_0)$ | $y_0$ | $(y_0, ½)$ | ½ | $(1/2, 1)$ | $1$ |
| $x''_y$ | | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | No existe | $-$ | |
| Intervalos de convexidad | | Convexidad hacia las $y$ negativas | | Convexidad hacia las $y$ positivas | | Convexidad hacia las $y$ negativas | | Convexidad hacia las $y$ positivas | |
| Puntos de inflexión y puntos de discontinuidad | Punto de discontinuidad | | | | Punto de inflexión | | Punto de discontinuidad | | Punto de discontinuidad |

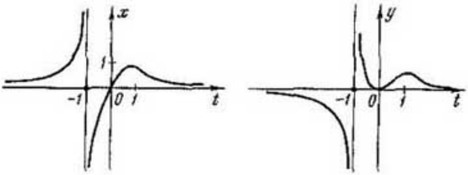



FIG. 69

La gráfica de la función (14.20) queda estudiada.

Ejemplo 4. Construyamos la gráfica de la función

$$x = \frac{t}{1+t^3}, \quad y = \frac{t^2}{1+t^3}. \tag{14.22}$$

En el caso dado no hay asíntotas paralelas a los ejes coordenados; ya que $x \to \infty$ e $y \to \infty$ cuando $t \to -1$, entonces es posible que exista una asíntota inclinada. Para hallarla calculemos los límites correspondientes:

$$\lim_{t \to -1} \frac{y}{x} = \lim_{t \to -1} t = -1, \quad \text{es decir,} \quad k = -1,$$

$$\lim_{t \to -1} (y - kx) = \lim_{t \to -1} \left( \frac{t^2}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^3} \right) = \lim_{t \to -1} \frac{t}{t^2 - t + 1} = -\frac{1}{3}.$$

De aquí se deduce que la asíntota inclinada existe y que su ecuación será

$$y = -x - \frac{1}{3}.$$

Construyamos aproximadamente las gráficas de las funciones $x(t)$ e $y(t)$. Para esto hallaremos previamente las derivadas:

$$x'_t = \frac{1 - 2t^3}{(1+t^3)^2}, \quad y'_t = \frac{t(2-t^2)}{(1+t^3)^2}. \tag{14.23}$$

La derivada $x'_t$ se anula para $t = 1/\sqrt[3]{2}$ cambiando el signo de "+" a "−", por lo que éste es un punto de máximo; la derivada $y'_t$ se anula para $t = 0$, cambiando el signo de "−" a "+" (quiere decir que éste es un punto de mínimo) y para $t = 1/\sqrt[3]{2}$ cambiando el signo de "+" a "−" (por consiguiente éste también es un punto de máximo). De estas observaciones se deduce que las gráficas de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ tienen el aspecto representado en la fig. 69.

Por estas gráficas, conociendo la ecuación de la asíntota se puede hallar aproximadamente la gráfica de la función (14.22) que buscamos. La gráfica tiene el aspecto representado en la fig. 70.

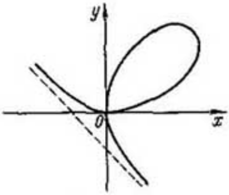


FIG. 70

El análisis de la derivada $y'_x$ permite precisar las dimensiones del "lazo" formado por la gráfica. De (14.23) tenemos $y'_x = \dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. Ahora veamos que: 1) $y'_x = 0$ para $t = 0$ y $t = \sqrt[3]{2}$, es decir, la tangente a la gráfica es paralela al eje $Ox$ en los puntos $(0; 0)$ y $(\sqrt[3]{2}/3; \sqrt[3]{4}/3)$; 2) $y'_x = \infty$ para $t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ y $t = \infty$, es decir, la tangente es paralela al eje $Oy$ en los puntos $(\sqrt[3]{4}/3, \sqrt[3]{2}/3)$ y $(0; 0)$. De esta forma al punto $(0; 0)$ (que como se dice es un punto múltiple de la gráfica) le corresponden dos valores del parámetro, $t = 0$ y $t = \infty$, si sólo definimos complementariamente las funciones (14.22) haciendo $x(\infty) = 0$, $y(\infty) = 0$. En este punto dos partes de la gráfica tienen respectivamente los ejes coordenados como sus tangentes.

La gráfica de la función (14.22) se llama *folio de Descartes* *). De la fórmula (14.22) no es difícil obtener su expresión implícita

$$x^3 + y^3 - xy = 0.$$

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las siguientes funciones:

6. $y = x^{1/x}$.
7. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}$.
8. $y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$.
9. $y = x^2 \ln x$.
10. $y = \dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.
11. $y = x^2\left(1 - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$.
12. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.
13. $x = t - e^{-t}$, $y = 2t - e^{-2t}$.
14. $x = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t}{t^4+1}$.
15. $y^3 - x^2y^2 - x^3 = 0$. Indicación: exprésense $x$ e $y$ por $t$ considerando $y = tx$.

*) R. Descartes (1596 — 1650), filósofo, matemático, físico y fisiólogo francés.

# § 15. FUNCIÓN VECTORIAL

## 15.1. CONCEPTO DE LÍMITE Y CONTINUIDAD PARA UNA FUNCIÓN VECTORIAL

**Definición 1.** *Si a cada valor $t \in E$, donde $E$ es cierto conjunto de números, le corresponde un determinado vector $r = r(t)$ del espacio tridimensional, entonces diremos que sobre $E$ está definida una función vectorial $r(t)$.*

En esta definición, en dependencia de los problemas analizados, por los valores de $r(t)$ se puede entender tanto vectores libres como vectores con extremos fijos en un mismo punto (los tal llamados *radio-vectores*).

Si en el espacio está dado un sistema de coordenadas rectangular, entonces, como es bien conocido, a cada vector le corresponden tres números reales ordenados, sus coordenadas, y viceversa, a cada tres números reales ordenados les corresponde un vector, para el cual estos números son sus coordenadas. Por esto, el dar una función vectorial es equivalente a dar tres funciones escalares (numéricas) $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ que son sus coordenadas:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Si para todos los $t \in E$ tenemos $z(t) = 0$, entonces la función vectorial $r(t)$ se llama bidimensional. En este caso se escribe

$$r(t) = (x(t), y(t)).$$

La longitud de cualquier vector $\rho$ se denota por $|\rho|$. Supondremos que son conocidas las principales propiedades algebraicas de los vectores, el concepto de producto escalar y vectorial y también las propiedades de estos productos. El producto escalar de los vectores $a$ y $b$ se denota por $ab$ o $(a, b)$ y el producto vectorial por $a \times b$ o $[a, b]$.

Introduzcamos los conceptos de límite, continuidad, derivada y diferencial para las funciones vectoriales.

**Definición 2.** *Supongamos que la función vectorial $r(t)$ está definida en cierto entorno reducido del punto $t_0$ y $a$ es cierto vector. Llamaremos al vector $a$ límite de la función $r(t)$ cuando $t \to t_0$ y escribiremos $a = \lim_{t \to t_0} r(t)$* (o $r(t) \to a$ *cuando $t \to t_0$*) *si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todos los $t$ que satisfacen la condición $|t - t_0| < \delta$, $t \neq t_0$, se cumple la desigualdad* (fig. 71) $|r(t) - a| < \varepsilon$.

Es evidente que (compárese con el lema del p. 4.9)

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = a, \tag{15.1}$$

si y sólo si

$$\lim_{x \to t_0} |r(t) - a| = 0. \tag{15.2}$$

Si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y $a = (a_1, a_2, a_3)$ entonces para que $a = \lim_{t \to t_0} r(t)$ es necesario y suficiente que

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3. \tag{15.3}$$

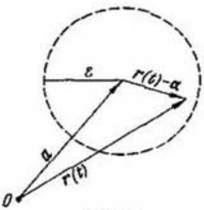



FIG. 71

En realidad

$$|r(t) - a| = \sqrt{[x(t) - a_1]^2 + [y(t) - a_2]^2 + [z(t) - a_3]^2}. \qquad (15.4)$$

Por esto, $|r(t) - a| \geqslant |x(t) - a_1|$. De aquí se deduce que la condición $|r(t) - a| \to 0$ cuando $t \to t_0$ trae consigo la condición $|x(t) - a_1| \to 0$ cuando $t \to t_0$, es decir, $\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1$. Análogamente se demuestran las otras igualdades de (15.3). Inversamente, si se cumple (15.3), entonces de (15.4) inmediatamente obtenemos que $|r(t) - a| \to 0$ cuando $t \to t_0$, es decir, $a = \lim_{t \to t_0} r(t)$.

Señalemos algunas propiedades de los límites de las funciones vectoriales.

1°. Si $\lim_{t \to t_0} r(t) = a$, entonces $\lim_{t \to t_0} |r(t)| = |a|$. Esto se deduce directamente de la desigualdad $\big| |r| - |a| \big| \leqslant |r - a|$.

2°. $\lim_{t \to t_0} [r_1(t) + r_2(t)] = \lim_{t \to t_0} r_1(t) + \lim_{t \to t_0} r_2(t)$.

3°. $\lim_{t \to t_0} f(t)r(t) = \lim_{t \to t_0} f(t) \lim_{t \to t_0} r(t)$ ($f(t)$ es una función escalar).

4°. $\lim_{t \to t_0} r_1(t)r_2(t) = \lim_{t \to t_0} r_1(t) \lim_{t \to t_0} r_2(t)$.

5°. $\lim_{t \to t_0} r_1(t) \times r_2(t) = \lim_{t \to t_0} r_1(t) \times \lim_{t \to t_0} r_2(t)$.

En las propiedades 2° — 5° todas las funciones analizadas están definidas en cierto entorno del punto $t_0$ menos, podría ser, el propio punto $t_0$ y se supone que todos los límites que aparecen en los segundos miembros de las igualdades existen; entonces se afirma que también existen los límites que están en los primeros miembros y en este caso son válidas las igualdades escritas.

Todas estas propiedades se demuestran de forma análoga a como demostramos las afirmaciones semejantes que aparecieron anteriormente (véanse los p. 4.9 y 5.10). Demostremos, por ejemplo, la propiedad 5°. Previamente observemos que para cualesquiera vectores $p$ y $q$

$$|p \times q| = |p||q| \operatorname{sen} \widehat{pq} \leqslant |p||q|. \qquad (15.5)$$

Por esto, si $p = p(t)$ y $q = q(t)$ y además $\lim_{t \to t_0} |p(t)| = 0$ y $|q(t)|$ es una función acotada, entonces de (15.5) tenemos (véase el p. 4.9)

$$\lim_{t \to t_0} |p \times q| = 0. \qquad (15.6)$$

Sea ahora $\lim\limits_{t \to t_0} r_1(t) = a$, $\lim\limits_{t \to t_0} r_2(t) = b$. Hagamos $\alpha(t) = r_1(t) - a$, $\beta(t) = r_2(t) - b$, entonces según (15.2)

$$\lim_{t \to t_0} |\alpha(t)| = \lim_{t \to t_0} |\beta(t)| = 0 \tag{15.7}$$

y

$$r_1(t) \times r_2(t) = [a + \alpha(t)] \times [b + \beta(t)] = \\ = a \times b + a \times \beta(t) + \alpha(t) \times b + \alpha(t) \times \beta(t),$$

donde en virtud de (15.7) $\lim\limits_{t \to t_0} |a \times \beta(t)| = \lim\limits_{t \to t_0} |\alpha(t) \times b| = \lim\limits_{t \to t_0} |\alpha(t) \times \beta(t)| = 0$ y ya que

$$|a \times \beta(t) + \alpha(t) \times b + \alpha(t)| \times \beta(t) \leqslant \\ \leqslant |a \times \beta(t)| + |\alpha(t) \times b| + |\alpha(t) \times \beta(t)|,$$

entonces $\lim\limits_{t \to t_0} |\alpha \times \beta(t) + \alpha(t) \times b + \alpha(t) \times \beta(t) = 0$. Esto, según (15.2) significa que

$$\lim_{t \to t_0} r_1(t) \times r_2(t) = a \times b. \ \square$$

Señalemos que las propiedades 1° — 5° de los límites de las funciones vectoriales pueden ser obtenidas, naturalmente, con ayuda de las fórmulas (15.3) de las propiedades correspondientes de las funciones escalares si se pasa a la escritura en coordenadas de los vectores y sus productos escalares y vectoriales.

Pasemos a la definición de la continuidad de una función vectorial.

**Definición 3.** *Una función vectorial $r = r(t)$ definida en cierto entorno del punto $t_0$ se llama continua en $t_0$ si $\lim\limits_{t \to t_0} r(t) = r(t_0)$.*

De la equivalencia de las condiciones (15.1) y (15.3) se deduce que para que la función vectorial $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ definida en cierto entorno del punto $t_0$ sea continua en este punto es necesario y suficiente que para $t = t_0$ sean continuas las funciones $x(t), y(t), z(t)$.

De las propiedades de los límites de las funciones vectoriales se deduce que la suma, los productos escalares y vectoriales de las funciones vectoriales y también el producto de funciones escalares por vectoriales serán continuos en algún punto si en este punto son continuos todos los sumandos y los factores, respectivamente.

## 15.2. DERIVADA Y DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

**Definición 4.** *Supongamos que la función vectorial $r = r(t)$ está definida en cierto entorno del punto $t_0$. Si existe el límite*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t}$$

*entonces se llama derivada de la función vectorial dada en $t_0$ y se denota por $r'(t_0)$ ó $\dot{r}(t_0)$.*

De esta forma, la derivada de una función vectorial en un punto es un vector.

Para que la función $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ definida en cierto entorno del punto $t_0$ tenga derivada en $t_0$ es necesario y suficiente que las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ tengan derivadas para $t = t_0$ y además en este caso

$$r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)), \; |r'(t_0)| = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0)}.$$

Esto se deduce directamente de la equivalencia de los enfoques (15.1) y (15.3) de la definición de límite para la función vectorial:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t} =$$

$$= \left( \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \right)$$

**Definición 5.** *La función vectorial $r = r(t)$ definida en cierto entorno del punto $t_0$ se llama diferenciable para $t = t_0$ si su incremento $\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)$ en el punto $t_0$ es representable en la forma*

$$\Delta r = a\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t \tag{15.8}$$

*donde $\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$. Además la función vectorial lineal* [*] *$a\Delta t$ se llama diferencial de la función $r(t)$ en el punto $t_0$ y se denota por $dr = a\Delta t$*

$$\Delta r = dr + \varepsilon(\Delta t)\Delta t. \tag{15.9}$$

Es evidente que si la función vectorial es diferenciable para $t = t_0$, entonces es continuo en este punto.

Como en el caso de las funciones escalares, de la diferenciabilidad de una función se deduce la existencia de la derivada $r'(t)$ y su igualdad al vector $a$. En realidad, de (15.8) tenemos

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} [a + \varepsilon(\Delta t)] = a.$$

Viceversa, si existe la derivada $r'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$, entonces suponiendo $\varepsilon(\Delta t) = $ $= \frac{\Delta r}{\Delta t} - r'(t_0)$, obtenemos $\Delta r = r'(t_0)\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t$ donde $\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$. Quiere decir que $r(t)$ es diferenciable en el punto $t_0$ y

$$dr = r'(t_0)\Delta t.$$

[*] La función vectorial de argumento $t$ se llama lineal si tiene la forma $at + b$, donde $a$ y $b$ son dos vectores cualesquiera dados.

Hagamos, por definición, $dt = \Delta t$ para la variable independiente $t$, entonces (eliminando la notación del argumento $t_0$)

$$dr = r'dt, \quad r' = \frac{dr}{dt}.$$

Sustituyendo la expresión obtenida para $dr$, en (15.9) obtenemos

$$\Delta r = r'\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t,$$

ó

$$\Delta r = r'\Delta t + \alpha(\Delta t), \tag{15.10}$$

donde $\alpha(\Delta t) = \varepsilon(\Delta t)\Delta t = o(\Delta t)$ cuando $\Delta t \to 0$ *) y $\alpha(0) = 0$.

Sea ahora $t = t(\tau)$. Si esta función es diferenciable en el punto $\tau_0$, $t_0 = t(\tau_0)$ y $\Delta\tau = \tau - \tau_0$, entonces de (15.10) (denotando para mayor claridad $r'$ por $r'_t$) se deduce que

$$\frac{\Delta r}{\Delta\tau} = r'_t \frac{\Delta t}{\Delta\tau} + \frac{\alpha(\Delta t)}{\Delta\tau}.$$

Ya que $\Delta t \to 0$ cuando $\Delta\tau \to 0$, entonces como en el caso de una función numérica (véase el p. 9.7), poniendo $\varepsilon(0) = 0$, obtendremos

$$\lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\alpha(\Delta t)}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t)\frac{\Delta\tau}{\Delta\tau} = 0,$$

por lo que la derivada $r'_\tau = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta r}{\Delta\tau}$ existe y $r'_\tau = r'_t t'_\tau$. De aquí, como en el caso de las funciones escalares, se deduce la invariancia de la escritura de la diferencial de una función vectorial; tanto para la variable dependiente $t$ como para la variable independiente $\tau$ tenemos

$$dr = r'_t dt, \quad dr = r'_t d\tau.$$

Demos las fórmulas de diferenciación de la función vectorial (el argumento, para simplificar las notaciones, se omite):

1. $(r_1 + r_2)' = r_1' + r'_2$.
2. $(fr) = f'r + fr'$.
3. $(r_1 r_2)' = r'_1 r_2 + r_1 r'_2$.
4. $(r_1 \times r_2) = r'_1 \times r_2 + r_1 \times r'_2$.

Aquí, todas las funciones analizadas están definidas en cierto entorno del punto $t_0$ y se supone que todas las derivadas que aparecen en el segundo miembro de cada igualdad existen para $t = t_0$; entonces, en el punto $t_0$ existen también las derivadas que aparecen en el primer miembro y además son válidas las igualdades escritas.

Todas estas fórmulas se demuestran análogamente a las fórmulas de diferenciación de las funciones escalares (véase el p. 9.5). Demostremos, por ejemplo, la fórmula 4.

---

*) Por analogía con el caso de las funciones escalares para la función vectorial $\alpha(t)$ se escribe $\alpha = o(\beta)$ cuando $t \to t_0$ si $\alpha(t) = \varepsilon(t)\beta(t)$, donde $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0$.

Utilizando las propiedades 1° — 5° de los límites de las funciones vectoriales obtendremos

$$[r_1(t) \times r_2(t)]'_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_1(t_0 + \Delta t) \times r_2(t_0 + \Delta t) - r_1(t_0) \times r_2(t_0)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{r_1(t_0 + \Delta t) - r_1(t_0)}{\Delta t} \times r_2(t_0 + \Delta t) + r_1(t_0) \times \frac{r_2(t_0 + \Delta t) - r_2(t_0)}{\Delta t}\right] =$$

$$= r_1'(t_0) \times r_2(t_0) \times r_2(t_0) \times r_2'(t_0).$$

Si la función vectorial $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ está definida en cierto entorno del punto $t_0$ y tiene $n$ derivadas en este punto, entonces para ella es válida la fórmula de Taylor

$$\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{d^k r(t_0)}{dt^k} \Delta t^k + o(\Delta t^n).$$

Esta fórmula se deduce directamente del desarrollo de las funciones coordenadas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ por la fórmula de Taylor.

Vemos que muchos hechos establecidos en la teoría de las funciones escalares, se transfieren al pie de la letra a las funciones vectoriales. No obstante, sería un error pensar que esto siempre es así: por ejemplo, en determinado sentido, el análogo de la fórmula de los incrementos finitos no tiene lugar para las funciones vectoriales.

En efecto, analicemos la función vectorial bidimensional $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Por cuanto $r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$, entonces $|r'(t)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = 1$ para cualquier $t \in [0, 2\pi]$. Por consiguiente no existe tal punto $\xi \in [0, 2\pi]$ para el cual sea válida la igualdad análoga a la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange para las funciones escalares

$$r(2\pi) - r(0) = 2\pi r'(\xi),$$

ya que en el primer miembro aparece un vector nulo, por cuanto $r(2\pi) = r(0)$ y en el segundo uno no nulo.

La afirmación siguiente es una variación de la fórmula de los incrementos finitos para las funciones vectoriales.

**Teorema 1.** *Supongamos que la función vectorial $r(t)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y diferenciable en su interior. Entonces existe un punto $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$|r(b) - r(a)| \leqslant (b - a)|r'(\xi)|. \tag{15.11}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $r(a) = r(b)$, entonces la desigualdad (15.11) es válida para cualquier elección del punto $\xi \in (a, b)$ ya que su primer miembro se anula.

Sea $r(a) \neq r(b)$. Estimemos la longitud $|r(b) - r(a)|$ del vector $r(b) - r(a) \neq 0$. Si se da cualquier vector $x$, entonces denotando por $e$ al vector unidad en el sentido del vector $x$, obtendremos $|x| = (x, e)$ ya que por la definición del producto escalar $(x, e) = |x||e| \cos \widehat{xe}$, $|e| = 1$, $\widehat{xe} = 0$, y por consiguiente $\cos \widehat{xe} = 1$. Por esto, si $e$ es el vector unidad en el sentido del vector $r(b) - r(a) \neq 0$, entonces

$$|r(b) - r(a)| = (r(b) - r(a), e) = (r(b), e) - (r(a), e),$$

es decir, se obtuvo la diferencia de los valores de una función numérica

$$f(t) = (r(t), e) \tag{15.12}$$

en los extremos del segmento $[a, b]$:

$$|r(b) - r(a)| = f(b) - f(a). \tag{15.13}$$

De (15.12) se deduce que la función $f(t)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y diferenciable en todos sus puntos interiores, ya que por la condición del teorema, la función $r(t)$ posee estas propiedades. Por esto, según la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange, existe un punto $\xi \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$. Pero en virtud de la regla de diferenciación del producto escalar tenemos

$$f'(t) = (r'(t), e)$$

como consecuencia de lo cual

$$f(b) - f(a) = (r'(\xi), e)(b - a), \quad a < \xi < b. \tag{15.14}$$

Para dos vectores cualesquiera $x$ e $y$, de la definición de producto escalar se deduce la desigualdad

$$|(x, y)| = |x||y||\cos xy| \leqslant |x||y|;$$

en particular

$$|(r'(\xi), e)| \leqslant |r'(\xi)||e| = |r'(\xi)|.$$

Por consiguiente, de (15.4) obtenemos:

$$f(b) - f(a) \leqslant |r'(\xi)|(b - a), \quad a < \xi < b.$$

De esta desigualdad y de la fórmula (15.13) se deduce directamente la desigualdad (15.11). □

# § 16. LONGITUD DE CURVA

## 16.1. CONCEPTO DE CURVA

Analicemos las aplicaciones de los segmentos en el espacio tridimensional $R^3$. Sea $[a, b]$ cierto segmento y $r(t)$ su aplicación en $R^3$, es decir, la aplicación que pone en correspondencia a cada punto $t \in [a, b]$ un punto $r(t)$ del espacio $R^3$, más breve, $r: [a, b] \to R^3$.

Consideraremos que en el espacio $R^3$ está fijo un sistema de coordenadas. En este caso el dar un punto del espacio es equivalente a dar sus tres coordenadas. Denotemos las coordenadas del punto $r(t)$ por $x(t), y(t), z(t)$:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Entonces, el dar la aplicación $r(t)$ resulta ser equivalente a dar tres funciones numéricas $x(t), y(t), z(t)$ llamadas *funciones coordenadas de la aplicación* $r(t)$.

La aplicación $r(t)$ se llama *continua sobre el segmento* $[a, b]$ si sobre este segmento son continuas todas sus funciones coordenadas.

Para la aplicación $r(t)$ denotaremos por $\mathbf{r}(t)$ la función vectorial para la cual las coordenadas del vector $\mathbf{r}(t)$ coinciden con las coordenadas del punto $r(t)$, es decir, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y llamaremos a la aplicación $r(t)$ y a la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ correspondientes una a otra.

Es evidente que la aplicación $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ si y sólo si sobre este segmento es continua la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ correspondiente. Efectivamente, sabemos que una función vectorial es continua sobre un segmento si y sólo si sobre él son continuas todas sus coordenadas (vease el p. 15.1), lo cual, por definición, es la condición de continuidad de la aplicación $r(t)$ sobre un segmento.

Ahora se puede enunciar la definición de curva.

El conjunto $\Gamma$ del espacio dado como la imagen continua de cierto segmento *) se llama *curva continua* o simplemente curva.

La aplicación continua indicada — denotémosla de nuevo por $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — del segmento $[a, b]$ sobre el conjunto $\Gamma \subset R^3$ se llama representación de la curva $\Gamma$ y se escribe

$$\Gamma = \{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}.$$

La variable $t$ se llama *parámetro de la curva* $\Gamma$.

De esta forma una curva no es simplemente un conjunto del espacio, sino un conjunto analizado como resultado de cierta aplicación continua de un segmento. Dicho de otro modo, una curva es un conjunto del espacio más una aplicación continua del segmento sobre él.

Por esto, un mismo conjunto, obtenido como la imagen de segmentos aplicados continuamente se analiza como curvas diferentes.

Señalemos que la aplicación continua $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ que es una representación de la curva $\Gamma$ no se considera biunívoca: en un mismo punto de la curva $\Gamma$ se pueden aplicar dos o más puntos del segmento $[a, b]$.

Los puntos de la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ en los cuales se aplica más de un punto del segmento $[a, b]$ se llaman *puntos múltiples de esta curva*.

Así, si el punto $M$ de la curva continua $\Gamma$ es un punto múltiple de la última, entonces para la representación dada $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, de esta curva $\Gamma$, existen al menos dos valores diferentes $t_1$ y $t_2$ del parámetro $t$, $a \leqslant t_1 \leqslant b$, $a \leqslant t_2 \leqslant b$ tales que $r(t_1) = r(t_2) = M$.

El punto $r(a)$ de la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ se llama su origen y el punto $r(b)$, su extremo.

**Definición 1.** *La curva* $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ *se llama curva cerrada o lo que es lo mismo contorno cerrado si su origen coincide con su extremo:* $r(a) = r(b)$.

*Una curva cerrada que no tiene puntos múltiples menos el punto* $r(a) = r(b)$ *y tal que* $r(t) \neq r(a) = r(b)$ *para* $a < t < b$, *se llama contorno cerrado simple.*

Diremos que el punto $M = r(t)$ de la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ tiende al punto $M_0 = r(t_0)$ de esta curva si $|MM_0| \to 0$ cuando $t \to t_0$.

---

*) Se llama *imagen continua de un segmento* la imagen de un segmento por una aplicación continua del último.

Si la curva $\Gamma$ está en cierto plano, entonces esta curva se llama *plana*. Si el plano indicado se escoge por plano coordenado $xOy$, entonces la representación de la curva tiene el aspecto

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = 0$$

y la ecuación $z = 0$, si esto no nos puede llevar a confusiones, usualmente no se escribe.

La gráfica de una función $y = f(x)$ continua sobre cierto segmento $[a, b]$ es una curva plana en nuestro sentido con la representación.

$$x = x, \quad y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$$

(en este caso el parámetro $t = x$).

La aplicación $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, que define la curva $\Gamma$ para un sistema de coordenadas $x, y, z$ fijo en el espacio se puede definir también en la forma coordenada, es decir, dando las coordenadas del punto $r(t)$:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

En este caso las tres funciones $x(t), y(t), z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ se llaman *representación coordenada de la curva* $\Gamma$ *y se escribe*

$$\Gamma = \{x(t), y(t), z(t); a \leqslant t \leqslant b\}.$$

La aplicación $r(t)$ se puede dar mediante la función vectorial correspondiente a ella $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, donde, como siempre, $r(t)$ es el radio vector con extremo en el punto $r(t)$ *). En este caso la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ se llama *hodógrafo* de la función vectorial $r(t)$ y la propia función vectorial $r(t)$ es *la representación vectorial de la curva* $\Gamma$ y se escribe

$$\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}.$$

La circunferencia es un ejemplo de curva. Tomemos para mayor precisión la circunferencia de radio $r$ con centro en el origen de coordenadas. Esta circunferencia se puede representar, por ejemplo, como la imagen continua del segmento $[0, 2\pi]$ con ayuda de las funciones

$$x = r \cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{16.1}$$

Es evidente que la circunferencia es un contorno cerrado simple. Un ejemplo de curva no cerrada es cualquier arco de circunferencia correspondiente, por ejemplo, a la variación del parámetro $t$ sobre el segmento $[0, \alpha]$, donde $0 \leqslant \alpha < 2\pi$.

Señalemos que el conjunto de puntos de la curva

$$x = r \cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi \tag{16.2}$$

coincide con el conjunto de puntos de la curva (16.1): en uno y otro caso es la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ sobre el plano $x, y$. No obstante, ha sido obtenida, como resultado de aplicaciones diferentes: para la transformación (16.1), es decir, para la variación del parámetro $t$ desde 0 hasta $2\pi$ esta circunferencia se recorre una vez y en la transformación (16.2), es decir, para la variación del parámetro $t$ desde 0 hasta $4\pi$ se recorre dos veces. Por esto (16.1) y (16.2) son curvas diferentes.

---

*) Si no se ha acordado algo diferente, entonces siempre se supone que el origen del radio vector se encuentra en el origen de coordenadas.

De forma análoga se definen las formas especiales de curvas continuas, diferenciables (continuamente), dos veces (continuamente) diferenciables, etc. Definamos, por ejemplo, las curvas continuamente diferenciables. La aplicación $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ del segmento $[a, b]$ en el espacio se llama *continuamente diferenciable* si todas las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son continuamente diferenciables sobre el segmento $[a, b]$.

La curva $\Gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ se llama *continuamente diferenciable* si su representación $r(t)$ es continuamente diferenciable sobre el segmento $[a, b]$.

Análogamente se definen las curvas diferenciables, dos veces diferenciables, dos veces continuamente diferenciables, etc.

La definición de curva dada tiene en su base la representación física sobre la trayectoria (camino) de un punto material que se mueve en el espacio. Pero en tal trayectoria se pueden escoger parámetros diferentes, por ejemlo, el tiempo de movimiento $t$, la longitud del espacio recorrido $s$ o cualquier otro. Por esto la condición que consiste en que dos curvas con diferentes representaciones siempre se consideran diferentes, no es siempre cómoda. Tal acuerdo es natural para las curvas (16.1) y (16.2). No obstante, las dos representaciones de las curvas

$$x = \cos t, \quad y = -\operatorname{sen} t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant 0 \quad \text{e} \quad y = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

sería natural considerarlas representación de una misma curva: la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$.

Estas consideraciones nos conducen a la idea de llevar a cabo cierta especificación del concepto de curva: la unión de ciertas curvas diferentes en el sentido de la definición dada anteriormente en una curva. Hagamos esto.

Diremos que las curvas $\Gamma_1 = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ y $\Gamma_2 = \{\rho(\tau),\ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}$ son una misma curva si existe una función continua y estrictamente creciente $\tau = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$ o una función continua estrictamente decreciente $\tau = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $\varphi(a) = \beta$, $\varphi(b) = \alpha$, tal que para todos los $t \in [a, b]$ tiene lugar $r(t) = \rho(\varphi(t))$.

En el caso de las curvas (continuamente) diferenciables se supone que la función $\varphi\colon [a, b] - [\alpha, \beta]$ es además (continuamente) diferenciable sobre $[a, b]$ y tiene derivada que no se anula. La última condición garantiza la diferenciabilidad (continua) de la función inversa $\varphi^{-1}$.

Semejantes transformaciones del parámetro, es decir, tales que llevan a la misma curva en el sentido de la definición dada, se llaman *transformaciones admisibles del parámetro* y todas las representaciones de una misma curva se llaman *equivalentes* entre sí.

Más detalladamente el paso a otras representaciones de una curva dada se analizará en el punto siguiente.

## 16.2*. CURVAS DADAS PARAMÉTRICAMENTE

Para la construcción de una teoría estricta de curvas que admiten diferentes representaciones introduzcamos previamente el concepto de aplicaciones equivalentes de segmentos en el espacio.

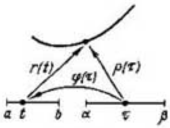



FIG. 72

**Definición 2.** *La aplicación continua $r(t)$ del segmento $[a, b]$ en el espacio se llama equivalente a la aplicación continua $\rho(\tau)$ del segmento $[\alpha, \beta]$ en el mismo espacio si existe una función continua estrictamente monótona $t = \varphi(\tau)$ (creciente o decreciente), tal que aplica el segmento $[\alpha, \beta]$ sobre el segmento $[a, b]$ y para cada $\tau \in [\alpha, \beta]$ es válida la igualdad* (fig. 72)

$$r(\varphi(\tau)) = \rho(\tau). \tag{16.3}$$

La función $\varphi(\tau)$ se llama aplicación realizadora de la equivalencia de las aplicaciones $r(t)$ y $\rho(\tau)$.

Si la aplicación continua $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, del segmento $[a, b]$ en el espacio es equivalente a la aplicación continua $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, del segmento $[\alpha, \beta]$ en el espacio, entonces se escribe $r(t) \sim \rho(\tau)$.

Es fácil convencerse de que cualquier aplicación continua de un segmento en el espacio es equivalente a sí misma: $r(t) \sim r(t)$ (aquí la aplicación realizadora de la equivalencia es la función $t = \tau$, $a = \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta = b$). Esta propiedad se llama propiedad *de reflexividad*. Fácilmente se comprueba también que si $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, y $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, son aplicaciones continuas de los segmentos $[a, b]$ y $[\alpha, \beta]$, respectivamente, en el espacio y si $r(t) \sim \rho(\tau)$, entonces $\rho(\tau) \sim r(t)$ es también la propiedad *de simetría*. Así mismo es fácil convencerse de que si $r_1(t_1)$, $a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1$, $r_2(t_2)$, $a_2 \leqslant t_2 \leqslant b_2$, y $r_3(t_3)$, $a_3 \leqslant t_3 \leqslant b_3$, son aplicaciones continuas de los segmentos $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ y $[a_3, b_3]$, respectivamente, en el espacio, entonces de $r_1(t_1) \sim r_2(t_2)$ y $r_2(t_2) \sim r_3(t_3)$ se deduce que $r_1(t_1) \sim r_3(t_3)$ es la propiedad *de transitividad*.

Si en algún conjunto de elementos está introducido un concepto de equivalencia que posee las tres propiedades indicadas (reflexividad, simetría y transitividad), entonces tal conjunto se descompone en clases disjuntas de elementos equivalentes (véase § 61). En nuestro caso se obtienen clases disjuntas de aplicaciones de segmentos, continuas y equivalentes entre sí.

Finalmente, observemos que si $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, y $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, son aplicaciones de segmentos en el espacio, continuas y equivalentes, entonces las imágenes de los segmentos $[a, b]$ y $[\alpha, \beta]$ en el espacio por las transformaciones $r(t)$ y $\rho(\tau)$ coinciden, respectivamente. Esto se deriva inmediatamente de la condición (16.3).

Pasemos ahora al concepto de curva.

**Definición 3.** *Cualquier conjunto $\Gamma$ de aplicaciones $r(t)$ de segmentos $[a, b]$ en el espacio, continuas y equivalentes (véase la definición 2) se llama curva dada paramétricamente:*

$$\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

*Cada una de las aplicaciones indicadas se llama representación de esta curva.*

La función vectorial $r(t)$ ($r(t)$ es un radio vector con su extremo en el punto $r(t)$) por analogía con el p. 16.1 se llama *representación vectorial de la curva* $\Gamma$ *definida paramétricamente:*

$$\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces el conjunto de funciones $x(t), y(t), z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, se llama *representación coordenada de la curva* $\Gamma$ *dada paramétricamente:*

$$\Gamma = \{x(t), y(t), z(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Es evidente que una curva dada paramétricamente se determina unívocamente por cada una de sus representaciones. Esto permite (lo cual es más cómodo), por ejemplo, en la escritura $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ entender el segundo miembro de la igualdad no como el conjunto de todas las representaciones de la curva $\Gamma$, sino como cierta representación $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, totalmente definida. En el futuro obraremos así no sólo en el caso indicado sino también en los casos de representaciones tanto vectoriales como coordenadas.

Ejemplo. Por nuestra definición, las curvas dadas paramétricamente

$$x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

y

$$x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ 0 \leqslant t \leqslant 4\pi,$$

como ya se señaló en el p. 16.1, son curvas diferentes aunque coinciden como conjuntos de puntos del plano: estos conjuntos representan la misma circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. En el primer caso esta circunferencia "se recorre" una vez, en el segundo, dos veces.

Las representaciones

$$x = \cos t,\quad y = \operatorname{sen} t,\quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

y

$$x = \sqrt{\tau(2-\tau)},\quad y = \tau - 1,\quad 0 \leqslant \tau \leqslant 2,$$

definen la misma curva. Efectivamente, la función $\tau = 1 + \operatorname{sen} t$ es continua, crece monótonamente sobre el segmento $[-\pi/2, \pi/2]$ y transforma una representación en otra. El conjunto de todos los puntos de la curva forman en este caso la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1, x \geqslant 0$.

En la representación dada $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, para cierta curva continua y un valor fijo del parámetro $t$, por $r(t)$ se denota naturalmente el punto de la curva continua analizada, en el cual se transforma el punto $t \in [a, b]$ según la representación dada.

Definamos ahora qué se llama punto de una curva dada paramétricamente, es decir, de una curva definida como una clase de aplicaciones de segmentos, continuas y equivalentes.

**Definición 4.** *Sean* $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, *y* $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, *dos representaciones de la curva* $\Gamma$ *dada paramétricamente,* $\varphi$, *la aplicación realizadora de su equivalencia (véase la definición 3) y sea* $t = \varphi(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, $a \leqslant t \leqslant b$ *(el valor* $\tau$ *y por tanto* *el valor $t$ están fijos) y por consiguiente $r(t) = \rho(\tau)$. Denotemos este punto del espacio por $P$, es decir, $P = r(t) = \rho(\tau)$. Los pares $(P, t)$ y $(P, \tau)$ se llaman equivalentes.*

La equivalencia de los pares $(P, t)$ y $(P, \tau)$ la denotaremos con el símbolo $(P, t) \sim (P, \tau)$.

Es fácil comprobar que

1) $(P, t) \sim (P, t)$;

2) si $(P, t) \sim (P, \tau)$, entonces $(P, \tau) \sim (P, t)$;

3) si $(P, t_1) \sim (P, t_2)$ y $(P, t_2) \sim (P, t_3)$, entonces $(P, t_1) \sim (P, t_3)$.

**Definición 5.** *Para la curva $\Gamma$ dada paramétricamente, el conjunto $\{(P, t)\}$ de todos los pares equivalentes ($P$ está fijo) se llama punto de esta curva y el punto $P$ del espacio, su portador.*

Cada punto $\{(P, t)\}$ de la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ dada paramétricamente se determina unívocamente por cada par $(P, t)$ y por cuanto en este par $P = r(t)$, entonces cada punto de la curva $\Gamma$ se determina unívocamente por el valor del parámetro $t \in [a, b]$ en cada representación. Por esto, para mayor brevedad, los puntos de las curvas dadas paramétricamente los denotaremos no con el símbolo $\{(P, t)\}$ sino simplemente $r(t)$. Por lo dicho, esta notación tiene un sentido unívoco.

**Definición 6.** *El conjunto de los portadores de todos los puntos de una curva $\Gamma$ dada paramétricamente se llama portador de esta curva.*

El punto $P$ del portador de la curva $\Gamma$, la cual es portador de por lo menos dos puntos diferentes de la curva, se llama *punto múltiple* del portador de la curva $\Gamma$.

Como ya vimos en los ejemplos del p. 16.1 (véase (16.1) y (16.2)), curvas diferentes pueden tener un mismo portador. Observemos además que si $r(t) \neq r(a) = r(b)$, $a < t < b$, en una representación de la curva, entonces esta condición se cumple en cualquier otra representación. Por consiguiente el concepto de contorno cerrado (véase la definición 1 en el p. 16.1) no depende de la elección de la representación de la curva.

Pasemos ahora a la definición de curvas de otras clases. El concepto de equivalencia de aplicaciones de un segmento en el espacio se puede introducir no sólo para las aplicaciones continuas, sino para otras aplicaciones. Esto da la posibilidad de definir clases especiales de curvas dadas paramétricamente: curvas dadas paramétricamente $n$ veces diferenciables y $n$ veces continuamente diferenciables, $n = 1, 2, \ldots$ .

Definamos, por ejemplo, el concepto de equivalencia para las aplicaciones de segmentos continuamente diferenciables y la curva continuamente diferenciable dada paramétricamente.

**Definición 7.** *Dos aplicaciones de segmentos en el espacio continuamente diferenciables se llaman continuamente diferenciables y equivalentes si existe una función $\varphi$ realizadora de su equivalencia en el sentido de la definición 2, la cual tanto ella misma como su inversa son continuamente diferenciables.*

**Definición 8.** *Cualquier conjunto $\Gamma$ de aplicaciones continuamente diferenciables y continuamente diferenciables equivalentes de segmentos en el espacio se llama curva continuamente diferenciable dada paramétricamente.*

En general una curva dada paramétricamente de una clase se define como el conjunto de las aplicaciones de segmentos en el espacio (llamadas sus representaciones) equivalentes en algún sentido, y además la equivalencia satisface las condiciones de reflexividad, simetría y transitividad. Las aplicaciones de un segmento sobre otro que realizan esta equivalencia se llaman en este caso transformaciones admisibles del parámetro.

Cada curva dada paramétricamente de cierta clase se define unívocamente por cualquiera de sus representaciones y para ella, por el mismo esquema dado anteriormente se define el concepto de punto, portador del punto y portador de la curva. En el futuro, para simplificar, allí donde no puede llevarnos a confusiones, las curvas dadas paramétricamente y sus portadores (curvas continuas en el sentido del p. 16.1) se llamarán por un mismo término "curvas".

## 16.3. ORIENTACIÓN DE UNA CURVA. ARCO DE CURVA. SUMA DE CURVAS. REPRESENTACIÓN IMPLÍCITA DE CURVAS

El orden de los números (por magnitud) sobre el segmento $[a, b]$ con ayuda de una representación $r(t)$ de la curva dada $\Gamma = \{r(t);\, a \leqslant t \leqslant b\}$, naturalmente engendra el orden correspondiente de los puntos sobre la curva. El punto $r(t') \in \Gamma$ se considera anterior al punto $r(t'') \in \Gamma$ o lo que es lo mismo, el punto $r(t'')$ se considera posterior al punto $r(t')$ si $a \leqslant t' < t'' \leqslant b$. Si este mismo orden de los puntos se desea conservar en otras representaciones de la curva, entonces es necesario reducir la clase de transformaciones admisibles del parámetro, admitiendo sólo las transformaciones estrictamente crecientes del parámetro.

**Definición 9.** *La curva $\Gamma$ definida por la clase de aplicaciones de segmentos en el espacio, continuas y equivalentes, para las cuales las transformaciones admisibles del parámetro son sólo funciones continuas estrictamente crecientes, se llama curva orientada.*

De esta forma, las funciones $\varphi$ realizadoras de la equivalencia de dos representaciones de la curva orientada dada satisfacen las condiciones de la definición 2 y además son estrictamente crecientes.

En lugar de la expresión "está dada una curva orientada" a veces se dice "en la curva está dada una orientación" (es decir, un orden de los puntos).

**Definición 10.** *Sea $\Gamma = \{r(t);\, a \leqslant t \leqslant b\}$ una curva orientada y sea $t = t(\tau)$ una función continua sobre el segmento $[\alpha, \beta]$, estrictamente decreciente y $t(\alpha) = b$, $t(\beta) = a$. La curva definida por la representación $r = r(t(\tau))$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, se llama curva orientada en sentido opuesto a la curva $\Gamma$ y se denota por $-\Gamma$.*

De forma semejante se definen las curvas orientadas y orientadas en sentido opuesto de otras clases (diferenciables, continuamente diferenciables, etc.).

Si $t = t(\tau)$ es la aplicación del segmento $[\alpha, \beta]$ sobre el segmento $[a, b]$, indicada en la definición 10, $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$ y $t_0 = t(\tau_0)$, entonces los puntos $r(t_0)$ y $r(t(\tau_0))$ de la curva $\Gamma$ y la curva orientada en sentido opuesto $-\Gamma$, respectivamente, se llaman correspondientes uno a otro. Un punto de la curva $\Gamma$ antecede a otro punto de esta curva si y sólo si el punto de la curva $-\Gamma$ correspondiente al primer punto es posterior al punto correspondiente al segundo. Con esto se justifica el término de "curva orientada en sentido opuesto".

Si $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es una representaicón de la curva $\Gamma$, entonces $r(a + b - \tau)$, $a \leqslant \tau \leqslant b$ es una representaicón de la curva orientada en sentido opuesto $-\Gamma$ ya que la función $t = a + b - \tau$, $a \leqslant \tau \leqslant b$, decrece estrictamente y aplica el segmento $[a, b]$ sobre si mismo.

Como conclusión enunciemos algunas definiciones más, útiles para el futuro.

Supongamos que está dada la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$.

**Definición 11.** *Si* $[a', b'] \subset [a, b]$, *entonces la curva* $\Gamma' = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b'\}$ *se llama parte de la curva* $\Gamma$ *(o su arco) y se escribe* $\Gamma' \subset \Gamma$.

**Definición 12.** *Si* $t_0 \in (a, b)$, $\Gamma_1 = \{r(t), a \leqslant t \leqslant t_0\}$, $\Gamma_2 = \{r(t), t_0 \leqslant t \leqslant b\}$, *entonces la curva* $\Gamma$ *se llama suma de las curvas* $\Gamma_1$ *y* $\Gamma_2$ *y se escribe* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Análogamente se define la suma de un número finito de curvas.

**Definición 13.** *La suma de un número finito de curvas continuamente diferenciables se llama curva continuamente diferenciable a trozos.*

**Definición 14.** *Sea* $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ *una curva plana situada sobre el plano* $x, y$. *Si existe una función* $F(x, y)$ *tal que las coordenadas de los puntos* $(x, y)$ *de la curva* $\Gamma$ *satisfacen la condición*

$$F(x, y) = 0, \tag{16.4}$$

*entonces se dice que la ecuación (16.4) es la representación implícita de la curva* $\Gamma$.

Es necesario, no obstante, tener en cuenta que en general el conjunto de todos los puntos que satisfacen una ecuación del tipo (16.4) no es una curva en el sentido definido anteriormente incluso para las funciones $F(x, y)$ suficientemente "buenas". Por ejemplo, el conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$ representa en sí la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y el punto $(0; 0)$. Se puede mostrar que este conjunto no es la imagen continua de un segmento.

En el caso del espacio se pueden dar las curvas de forma implícita, pero ya con ayuda de un sistema de dos ecuaciones:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Más detalladamente nos ocuparemos de este problema en el p. 41.3.

Finalmente señalemos que una curva siempre es acotada, es decir, está en cierta esfera. Esto se deduce de que las funciones de la representación coordenada de la curva según el teorema de Bolzano — Weierstrass son acotadas en virtud de su continuidad. Junto con esto, ya en la matemática elemental se encuentran curvas no acotadas. A tales curvas pertenecen por ejemplo, la recta, la parábola, la hipérbola, el sinusoide, la gráfica de tg $x$, etc. Para abarcar tales "curvas" se puede definir la clase de las así llamadas *curvas abiertas* por el esquema desarrollado anteriormente en el cual como base se toma una aplicación continua de un intervalo y no de un segmento, como esto fue hecho antes. Las curvas abiertas, en particular, pueden ser no acotadas. El enunciado, detallado y exacto de todos estos conceptos se le deja hacer al lector a medida de sus necesidades.

### 16.4. TANGENTE A LA CURVA. SENTIDO GEOMÉTRICO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Supongamos que está dada la curva $\Gamma = \{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ que la función vectorial $r(t)$ es diferenciable en el punto $t_0 \in [a, b]$ y $r'(t_0) \neq 0$. Por cuanto en virtud

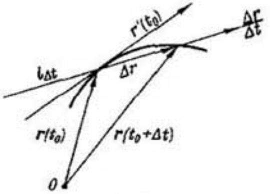



FIG. 73

de la definición de diferenciabilidad

$$\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0) = r'(t_0)\Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0,$$

entonces para todos los $\Delta t \neq 0$ suficientemente pequeños tiene lugar la desigualdad

$$r(t_0 + \Delta t) \neq r(t_0).$$

Efectivamente, en las suposiciones hechas $r'(t_0)\Delta t \neq 0$, por esto para todos los $\Delta t \neq 0$ suficientemente pequeños tendremos

$$r'(t_0)\Delta t + o(\Delta t) \neq 0.$$

La recta trazada por los puntos $r(t_0)$ y $r(t_0 + \Delta t)$ se llama *secante* para la curva $\Gamma$. Denotémosla por $l_{\Delta t}$ (fig. 73). Para todos los $\Delta t \neq 0$ suficientemente pequeños, en virtud de la condición $r(t_0) \neq r(t_0 + \Delta t)$ la secante $l_{\Delta t}$ está definida unívocamente. Por cuanto el vector $\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)$ es paralelo a esta secante, entonces el vector $\frac{\Delta r}{\Delta t}$, $\Delta t \neq 0$, que se diferencia del vector $\Delta r$ sólo en el factor escalar $1/\Delta t$ también es paralelo a ella.

Por condición, en el punto $t_0$ existe la derivada, es decir, el límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = r'(t_0). \tag{16.5}$$

Ya que todas las secantes pasan por un mismo punto $r(t_0)$ entonces la fórmula (16.5) geométricamente significa que las secantes $l_{\Delta t}$, cuando $\Delta t$ tiende a cero, tienden a cierta posición límite, es decir, a una recta que pasa por este mismo punto $r(t_0)$ en el sentido del vector $r'(t_0)$. Esta recta, en virtud de la condición $r'(t_0) \neq 0$, está definida unívocamente. Ella se llama *tangente a la curva* $\Gamma$ en el punto $r(t_0)$.

De esta forma, en virtud de la propia definición de tangente a la curva $\Gamma$ en el punto $r(t_0)$, la derivada $r'(t_0)$ de la función vectorial $r(t)$ en el caso cuando $r'(t_0) \neq 0$, es un vector paralelo a la tangente en el punto $r(t_0)$. Si el origen del vector $r'(t_0)$ lo trasladamos a este punto, como se hace usualmente, entonces estará dirigido por la tangente.

En el caso analizado la diferencial $dr(t_0) = r'(t_0)dt$ también está orientada por la tangente a la curva, ya que se diferencia de la derivada sólo en el factor escalar $dt$. El vector $t = r'/|r'|$, $r' \neq 0$ es el vector unidad orientado por la tangente. El vector $\Delta r$ para $\Delta t > 0$ está orientado desde el punto de la curva con el menor valor del parámetro al punto con mayor valor del parámetro, por lo que se puede decir que el vector $\Delta r$ para $\Delta t > 0$ muestra el sentido en el cual el parámetro crece sobre la curva, es decir, como se dice, el sentido positivo sobre la curva. El vector $\dfrac{\Delta r}{\Delta t}$ para $\Delta t > 0$ tiene el mismo sentido que el vector $\Delta r$. Por cuanto $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta r}{\Delta t} = r'(t)$, entonces es natural decir que el vector $r'(t)$ y por tanto el vector $t$, el cual se diferencia del vector $r'(t)$, podría ser en un factor numérico positivo $1/|r'(t)|$, también está orientado en el sentido de crecimiento del parámetro y que su orientación (sentido) corresponde a la orientación de la curva. El sentido del vector $t$ (o lo que es lo mismo, del vector $r'$) se llama *sentido positivo de la tangente*.

La ecuación de la tangente a la curva $\Gamma$ en el punto $r(t_0)$ para la cual $r'(t_0) \neq 0$ en escritura vectorial tiene la forma

$$r = r(t_0) + r'(t_0)\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty,$$

donde $r$ es el radio vector corriente de la tangente. En escritura por coordenadas la ecuación de la tangente en este caso tiene la forma

$$\begin{aligned} x &= x(t_0) + x'(t_0)\tau, \\ y &= y(t_0) + y'(t_0)\tau, \\ z &= z(t_0) + z'(t_0)\tau, \\ -\infty &< \tau < +\infty. \end{aligned}$$

Eliminando la variable $\tau$ obtenemos

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

**Definición 15.** *Sea $\Gamma$ una curva diferenciable y $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, su representación vectorial. El punto de la curva $\Gamma$ en el cual $r' \neq 0$ se llama punto no singular y el punto en el cual $r' = 0$, singular.*

Si $r = (x(t), y(t), z(t))$, entonces de la igualdad $|r'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ (véase el p. 15.2) tenemos: *el punto $(x(t), y(t), z(t))$ de la curva $\Gamma$ no es singular si y sólo si en él $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$, es decir, al menos una de las derivadas $x'$, $y'$ y $z'$ no se convierte en cero.*

De acuerdo con lo demostrado anteriormente *en cualquier punto no singular de la curva $\Gamma$ existe la tangente.*

En la definición 15 sería formalmente más correcto hablar de un punto singular y no singular de la curva en una representación dada. Esto no fue hecho por cuanto el concepto de punto singular no depende de la elección de la representación de la curva. Esclarezcamos y demostremos esto.

Las transformaciones admisibles del parámetro para las curvas diferenciables son las funciones $t = t(\tau)$, que tanto ellas como sus inversas son funciones diferenciables estrictamente monótonas. Por esto, en virtud del teorema 3 del p. 9.6 sobre la derivada de la función inversa tenemos $t'_\tau \tau'_t = 1$. De aquí se deduce que para cada transformación admisible $t = t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, del parámetro de una curva diferenciable, siempre $t'(\tau) \neq 0$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$. Por cuanto

$$x_\tau'^2 + y_\tau'^2 + z_\tau'^2 = (x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2)t_\tau'^2,$$

entonces un punto no singular en una representación de la curva diferenciable será al mismo tiempo no singular en cualquier otra representación.

**Definición 16.** *Una curva continuamente diferenciable sin puntos singulares se llama curva suave.*

*Una curva representable como suma de un número finito de curvas suaves se llama suave a trozos.*

Señalemos que si una curva plana tiene una representación explícita $y = y(x)$ ó $x = x(y)$, entonces para ella el vector $(x'(t), y'(t))$ es siempre no nulo: en el primer caso es $(1, y')$ y en el segundo $(x', 1)$.

De forma análoga se define la tangente como la posición límite de la secante y de la curva $\Gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ en el punto $r(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$ en el caso cuando $r'(t_0) = 0$, pero existe cierto número natural $n > 1$ para el cual $r^{(n)}(t_0) \neq 0$.

Si todos los $r^{(k)}(t_0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, y $r^{(n)}(t_0) \neq 0$, entonces desarrollando $\Delta r$ por la fórmula de Taylor obtendremos

$$\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0) = \frac{1}{n!} r^{(n)}(t_0)\Delta t^n + o(\Delta t^n), \quad \Delta t \to 0.$$

El vector $\dfrac{\Delta r}{\Delta t^n}$ está orientado paralelamente a la secante $l_{\Delta t}$ que pasa por los puntos $r(t_0)$ y $r(t_0 + \Delta t)$. De la igualdad escrita se deriva evidentemente que existe el límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t^n} = \frac{1}{n!} r^{(n)}(t_0) \neq 0.$$

Por esto en este caso la posición límite de la secante $l_{\Delta t}$, es decir, la tangente en el punto $r(t_0)$ es la recta que pasa por el punto $r(t_0)$ paralelamente al vector $r^{(n)}(t_0)$.

## 16.5. LONGITUD DEL ARCO DE UNA CURVA

Antes de definir el concepto de longitud del arco de una curva introduzcamos el concepto de partición de un segmento, un concepto que repetidas veces se encontrará en el futuro.

**Definición 17.** *Para cualquier segmento $[a, b]$, al sistema de sus puntos $t_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ tales que*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b,$$

*lo llamaremos su partición y lo denotaremos por $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$.*

Supongamos que se da la curva $\Gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ y sea $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ alguna partición del segmento $[a, b]$. Pongamos

$$\sigma_\tau \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |r(t_i) - r(t_{i-1})|.$$

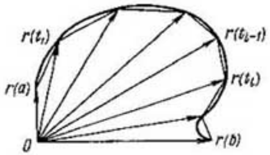



FIG. 74

Evidentemente (fig. 74) $\sigma_\tau$ es la longitud de la quebrada con vértices $r(a), r(t_1), \ldots$ $\ldots, r(t_{n-1}), r(b)$, es decir, como se dice habitualmente, de la *quebrada inscrita en la curva* $\Gamma$.

Cualquier quebrada, en particular la inscrita en la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$, se puede analizar como una curva en el sentido de la definición dada anteriormente si damos su representación. Sea $\lambda$ una quebrada, es decir, el conjunto de puntos compuesto por un número finito de segmentos con vértices en los puntos $M_0, M_1, \ldots, M_n$ (estos segmentos se llaman eslabones de la quebrada). Tomemos algún segmento $[a, b]$ y cualquier partición de éste en $n$ segmentos: $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$. Para mayor simplicidad siempre consideraremos que la representaicón de la quebrada es una aplicación continau $\rho(t)$ que transforma linealmente cada segmento $[t_{i-1}, t_i]$ sobre el segmento $M_{i-1}M_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; de tal forma, si denotamos por $\rho_i$ el radio vector del punto $M_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, entonces la representaicón vectorial de la quebrada tendrá la forma

$$\rho(t) = \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) + \rho_{i-1}, \quad t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Si $M_{i-1} \neq M_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces la quebrada se llama *no degenerada*.

**Definición 18.** *La magnitud*

$$S_\Gamma = \sup_\tau \tau_\tau$$

*donde la cota superior se toma por todas las particiones $\tau$ posibles del segmento $[a, b]$ se llama longitud de la curva $\Gamma$.*

*Si $S_\Gamma < +\infty$, entonces la curva $\Gamma$ se llama curva rectificable.*

Por esta definición la rectificabilidad de una curva y su longitud no dependen de la elección de la representación de la curva y siempre

$$0 \leqslant S_\Gamma \leqslant +\infty.$$

Ejercicio 1. Demuéstrese que una curva que sea una parte de una curva rectificable es también rectificable.

**Lema 2.** *Sea $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$, entonces*

$$S_\Gamma = S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}. \tag{16.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $a < c < b$ y

$$\Gamma = \{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}, \quad \Gamma_a = \{r(t), a \leqslant t \leqslant c\},$$
$$\Gamma_b = \{r(t), c \leqslant t \leqslant b\}.$$

Sea $\tau$ una partición del segmento $[a, b]$ y $\tau^*$ una partición de este mismo segmento que coincide con $\tau$ si el punto $c$ entra en la partición $\tau$ y que se obtiene de $\tau$ agregándole el punto $c$ si este punto no entra en la partición $\tau$. La partición $\tau^*$ es la unión de las dos particiones de los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$ que denotaremos respectivamente $\tau_a$ y $\tau_b$, es decir, $\tau^* = \tau_a \cup \tau_b$. Evidentemente para las longitudes de las quebradas correspondientes a las particiones $\tau^*$, $\tau_a$ y $\tau_b$ es válida la igualdad $\sigma_{\tau^*} = \sigma_{\tau_a} + \sigma_{\tau_b}$. Pero $\sup\limits_{\tau_a} \sigma_{\tau_a} = S_{\Gamma_a}$, $\sup\limits_{\tau_b} \sigma_{\tau_b} = S_{\Gamma_b}$ por consiguiente

$$\sigma_{\tau^*} \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}.$$

En el paso de la partición $\tau$ a la partición $\tau^*$ puede ocurrir que sólo un eslabón $r(t_{i-1})r(t_i)$ se cambia por dos $r(t_{i-1})r(c)$ y $r(c)r(t_i)$ y por cuanto $|r(t_{i-1})r(t_i)| \leqslant$ $\leqslant |r(t_{i-1})r(c)| + |r(c)r(t_i)|$, entonces $\sigma_\tau \leqslant \sigma_{\tau^*}$ y por consiguiente

$$\sigma_\tau \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}.$$

Pero $S_\Gamma = \sup\limits_\tau \sigma_\tau$ por lo que

$$S_\Gamma \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}. \tag{16.7}$$

Demostremos ahora la desigualdad opuesta. Para particiones arbitrarias $\tau_a$ y $\tau_b$ de los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente, y la partición $\tau^* = \tau_a \cup \tau_b$ del segmento $[a, b]$ tenemos $\sigma_{\tau_a} + \sigma_{\tau_b} = \sigma_{\tau^*} \leqslant S_\Gamma$. De aquí, $\sigma_{\tau_a} \leqslant S_\Gamma - \sigma_{\tau_b}$, fijando la partición $\tau_b$ y pasando a la cota superior $\sigma_{\tau_a}$ para todos los $\tau_a$ posibles obtenemos la desigualdad $S_{\Gamma_a} \leqslant S_\Gamma - \sigma_{\tau_b}$ y luego

$$S_{\Gamma_a} + \sigma_{\tau_b} \leqslant S_\Gamma.$$

Tomando la cota superior del conjunto de números $\sigma_{\tau_b}$ que se obtiene en todas las posibles particiones $\tau_b$ tendremos:

$$S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b} \leqslant S_\Gamma. \ \square$$

Señalemos que en el lema 2 no se supone que las curvas analizadas son rectificables.

**Problema 12.** Constrúyase un ejemplo de curva no rectificable.

**Teorema 1.** *Si la curva $\Gamma = \{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ es continuamente diferenciable, entonces es rectificable y su longitud $S_\Gamma$ satisface la desigualdad*

$$|r(b) - r(a)| \leqslant S_\Gamma \leqslant M(b - a), \tag{16.9}$$

*donde*

$$M = \max_{[a, b]} |r'(t)|. \tag{16.10}$$

Señalemos que en virtud de la continuidad de la derivada $r'(t)$ su valor absoluto $|r'(t)|$ también es continuo y por esto alcanza su valor máximo $M$ sobre el segmento $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos cualquier partición $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ del segmento $[a, b]$. Entonces aplicando la desigualdad (15.11) obtendremos

$$|r(b) - r(a)| = |\sum_{i=1}^{n} r(t_i) - r(t_{i-1})| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |r(t_i) - r(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |r'(\xi_i)|(t_i - t_{i-1}), \qquad (16.11)$$

donde $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, $t = 1, 2, \ldots, n$.

Por cuanto

$$\sum_{i=1}^{n} |r(t_i) - r(t_{i-1})| = \sigma_\tau$$

es la longitud de la quebrada inscrita en la curva $\Gamma$ correspondiente a la partición $\tau$ y para todos los $i = 1, 2, \ldots, n$ en virtud de (16.10) tiene lugar la desigualdad $|r'(\xi_i)| \leqslant M$, entonces de la desigualdad (16.11) para cualquier partición $\tau$ tendremos

$$|r(b) - r(a)| \leqslant \sigma_\tau \leqslant M \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = M(b - a). \qquad (16.12)$$

Pasando en esta desigualdad a la cota superior por $\tau$ obtendremos la afirmación del teorema. □

**Teorema 2.** *Sea la curva $\Gamma = \{r(t) = (x(t), y(t), z(t));\ a \leqslant t \leqslant b\}$ continuamente diferenciable. Entonces la longitud variable del arco $s$, calculada desde el origen $r(a)$ de la curva $\Gamma$ o respectivamente desde su extremo $r(b)$, es una función continuamente diferenciable del parámetro $t$ y creciente, respectivamente decreciente, y además*

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \left|\frac{dr}{dt}\right|, \qquad (16.13)$$

*respecitvamente*

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = -\left|\frac{dr}{dt}\right|. \qquad (16.14)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $s = s(t)$ la longitud del arco de la curva $\Gamma$ desde el punto $r(a)$ hasta el punto $r(t)$. Supongamos que $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t \in [a, b]$ y $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t)$. Es evidente que la función $s \twoheadrightarrow s(t)$ crece sobre el segmento $[a, b]$, es decir, si $\Delta t > 0$, entonces $\Delta s \geqslant 0$; si $\Delta t < 0$, entonces $\Delta s \leqslant 0$. Por esto siempre $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} \geqslant 0$.

Aplicando la desigualdad (16.9) a la parte de la curva $\Gamma$ correspondiente al segmento $[t_0, t_0 + \Delta t]$ para $\Delta t > 0$ (respectivamente al segmento $[t_0 + \Delta t, t_0]$ para $\Delta t < 0$) obtendremos

$$|r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)| \leqslant |\Delta s| \leqslant M|\Delta t|;$$

de donde
$$\left|\frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}\right| \leqslant \frac{\Delta s}{\Delta t} \leqslant M, \tag{16.15}$$

donde $M$ es el valor máximo del $|r'(t)|$ sobre el segmento $[t_0, t_0+\Delta t]$ para $\Delta t > 0$ o sobre el segmento $[t_0+\Delta t, t_0]$ para $\Delta t < 0$.

En virtud de la continuidad de la derivada $r'(t)$ su valor absoluto $|r'(t)|$ también es continuo y por esto su valor máximo existe, es decir, se alcanza en cierto punto $\xi = t_0 + \theta\Delta t$, $0 < \theta < 1$, del segmento indicado. Por esto la desigualdad (16.15) se puede escribir en la forma

$$\left|\frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}\right| \leqslant \frac{\Delta s}{\Delta t} \leqslant |r'(t_0+\theta\Delta t)|, \quad 0<\theta<1.$$

Pasando aquí al límite cuando $\Delta t \to 0$ en el primer miembro de la desigualdad según la definición de derivada y en el segundo según la continuidad de la derivada $r'(t)$ en el punto $t = t_0$ obtenemos $|r'(t_0)|$. Por consiguiente el límite $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ existe y también es igual a $|r'(t_0)|$, es decir, existe la derivada $s'(t_0)$ y $s'(t_0) = |r'(t_0)|$.

Si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ y por esto
$$s'(t) = |r'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}.$$

Si ahora $\sigma = \sigma(t)$ es la longitud variable del arco calculada desde el extremo $r(b)$ de la curva $\Gamma$ entonces, evidentemente $\sigma = S_\Gamma - s$ de donde diferenciando esta igualdad por $t$ tendremos

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{ds}{dt} = -\left|\frac{dr}{dt}\right|. \ \square$$

**Corolario 1.** *Si el parámetro de una curva continuamente diferenciable es la longitud variable del arco $s$, entonces*
$$\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1. \tag{16.16}$$

Esto se deduce directamente de la fórmula $\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}$ cuando $t = s$.

OBSERVACIÓN. La fórmula (16.16) tiene un sentido geométrico simple. Esclarezcámoslo. Supongamos que el parámetro de la curva continuamente diferenciable $\Gamma$ es la longitud variable de arco $s$: $\Gamma = \{r(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma\}$. La magnitud $|\Delta r| = |r(s+\Delta s) - r(s)|$ es igual a la longitud del segmento que une a los puntos $r(s)$ y $r(s+\Delta s)$. Este segmento se llama comúnmente cuerda que comprende el arco de la curva $\Gamma$ con origen en el punto $r(s)$ y extremo en el punto $r(s+\Delta s)$. La longitud del arco indicado evidentemente es igual a $|\Delta s|$ (fig. 75). Por cuanto $\left|\frac{dr}{ds}\right| = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta r}{\Delta s}\right|$, entonces de la igualdad (16.16) se deduce que

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta r|}{|\Delta s|} = 1.$$

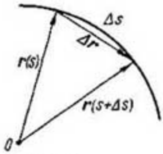



FIG. 75

Esto significa que el límite de la relación de la longitud del arco a la longitud de la cuerda que la abarca es igual a uno cuando el arco se reduce al punto. En esto consiste el sentido geométrico de la fórmula (16.16).

**Corolario 2.** *Para cualquier curva $\Gamma$ continuamente diferenciable sin puntos singulares, es decir, para cualquier curva suave existe la representación $r = r(s)$ en la cual por el parámetro $s$ está tomada la longitud variable del arco de la curva $\Gamma$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la curva $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ continuamente diferenciable no tiene puntos singulares, es decir, $r'(t) \neq 0$ para todos los $t \in [a, b]$. En este caso la longitud variable del arco $s = s(t)$ es una función estrictamente creciente y continuamente diferenciable ya que $\dfrac{ds}{dt} = |r'| > 0$ en todos los puntos de $[a, b]$. Por esto existe la función inversa $t = t(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma$ la cual también crece estrictamente y tiene derivada continua que no se anula sobre el segmento $[0, S_\Gamma]$, es decir, la función $t = t(s)$ es una transformación admisible del parámetro para las curvas continuamente diferenciables sin puntos singulares y la representación $r = r(t(s))$ es la representación buscada en la cual el papel de parámetro lo juega la longitud variable del arco. □

Esclarezcamos ahora el sentido geométrico de las coordenadas del vector $\dfrac{dr}{ds}$. Denotemos por $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ los ángulos formados por el vector $\dfrac{dr}{ds}$ o lo que es lo mismo, por la tangente a la curva $\Gamma = \{r(s)\}$ con los ejes $Ox$, $Oy$, y $Oz$, respectivamente. Entonces de la igualdad $\left|\dfrac{dr}{ds}\right| = 1$, evidentemente, se deduce que las proyecciones del vector $\dfrac{dr}{ds}$ sobre los ejes coordenados son iguales a los cosenos directores del vector $\dfrac{dr}{ds}$: $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, respectivamente, es decir,

$$\frac{dr}{ds} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{16.17}$$

Conjuntamente con esto para la función vectorial $r(s) = (x(s), y(s), z(s))$ como para cualquier función vectorial (véase el p. 15.2) tenemos

$$\frac{dr}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right). \tag{16.18}$$

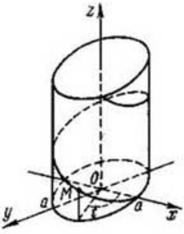



FIG. 76

Comparando (16.17) y (16.18) obtenemos

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma. \tag{16.19}$$

En calidad de ejemplo analicemos la curva llamada ***hélice***. Esta curva está dada por la representación

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = bt, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Es evidente que la hélice es una curva diferenciable infinitas veces y ya que

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2 \neq 0,$$

entonces no tiene puntos singulares (fig. 76). Por consiguiente la longitud variable de su arco se puede tomar como parámetro.
Hallemos la representación correspondiente. De acuerdo con la fórmula (16.13) tenemos

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

De aquí $\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ y ya que $t(0) = 0$, entonces $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Por esto la representación buscada tiene la forma

$$x(s) = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y(s) = a \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$
$$z(s) = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad 0 \leqslant s \leqslant T\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ejercicio 2. Demuéstrese que para una curva rectificable sin puntos múltiples, la longitud variable del arco es una *función del parámetro continua y estrictamente monótona.*

## 16.6. CURVAS PLANAS

Sea $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ una curva plana continuamente diferenciable que está en el plano $xOy$,

$$r(t) = (x(t), y(t))$$

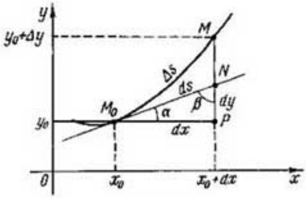



FIG. 77

y sea $s = s(t)$ la longitud variable del arco de la curva $\Gamma$. Para su derivada, de las fórmulas (16.13) y (16.14) obtenemos

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \tag{16.20}$$

aquí el signo "+" se toma si la longitud del arco $s(t)$ se calcula desde el punto de origen de la curva $r(a)$ y el signo "−" si se calçula desde el punto extremo $r(b)$. De la fórmula (16.20) para la diferencial del arco obtenemos la expresión

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{16.21}$$

Sea $(x(t_0), y(t_0))$ un punto no singular, es decir, $x'^2(t_0) + y'^2(t_0) > 0$, por ejemplo, $x'(t_0) \neq 0$. Sea para mayor precisión $x'(t_0) > 0$, entonces en cierto entorno del punto $t_0$ también $x'(t) > 0$ y quiere decir que la función $x(t)$ crece estrictamente en este entorno, por lo que existe la función inversa $t = t(x)$ continuamente diferenciable. Sustituyéndola en la representación de la curva $\Gamma$ hallamos

$$y = y(t(x)) = f(x),$$

es decir, en cierto entorno de un punto no singular una curva continuamente diferenciable es la gráfica de una función $f$ continuamente diferenciable; más exactamente, existe un entorno del punto $t_0$ y una función $f$ continuamente diferenciable definida sobre cierto intervalo que contiene el punto $x_0 = x(t_0)$ tales que la parte de la curva correspondiente a los valores del parámetro que pertenecen al entorno del punto $t_0$ indicado, es la gráfica de la función $f$.

En el caso cuando la curva $\Gamma$ es la gráfica de una función $y = f(x)$ continuamente diferenciable, la fórmula (16.20) se convierte en la fórmula

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1 + y'^2} \text{ y por consiguiente } ds = \pm\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Vemos el sentido geométrico de la fórmula (16.21) en el caso cuando $\Gamma$ es la gráfica de una función $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, continuamente diferenciable y la longitud del arco de la curva se calcula desde el punto de origen de la curva (fig. 77). Sea

$$x_0 \in [a, b],\ x_0 + dx \in [a, b],\ y_0 = f(x_0),$$

$$M_0 = (x_0, y_0),\ y_0 + \Delta y = f(x_0 + dx),\ M = (x_0 + dx, y_0 + \Delta y),$$

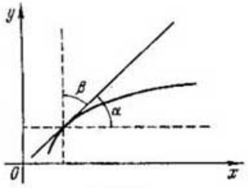



FIG. 78

$M_0N$ es la tangente en el punto $M_0$, $PM = \Delta y$ es el incremento de la función en el punto $x_0 + dx$, $PN = dy$ es el incremento de la ordenada de la tangente en el punto $x_0 + dx$. El triángulo $M_0NP$ es rectángulo; por cuanto $M_0P = dx$, $PN = dy$ entonces

$$M_0N^2 = M_0P^2 + PN^2 = dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

es decir, la longitud del segmento de tangente $M_0N$ es igual a $ds$. Dicho de otro modo, el incremento de la longitud de la tangente $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ es igual a la parte principal $ds$ del incremento de la longitud del arco $\Delta s$.

Si ahora sobre la curva $\Gamma$ en calidad de parámetro es tomada la longitud variable del arco $s$: $\Gamma = \{r(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma\}$, entonces por (16.19)

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \frac{dy}{ds} = \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha, \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \tag{16.22}$$

donde (fig. 78) $\alpha$ es el ángulo formado por la tangente con el eje $Ox$, y $\beta$ con el eje $Oy$.

Señalemos que estas fórmulas pueden ser obtenidas con la aplicación al "triángulo curvo $M_0MP$ (véase la fig. 77) de las fórmulas que expresan el seno y el coseno de los ángulos de un triángulo rectángulo común a través de sus catetos y su hipotenusa, considerando los lados del "triángulo" indicado $M_0$MP iguales a $dx$, $dy$, $ds$, respectivamente. Semejante situación tiene lugar para las fórmulas espaciales (16.19). Tal método de obtención de las fórmulas (16.19) y (16.22) naturalmente no está fundamentado y no tiene fuerza de demostración, no obstante facilita la memorización de estas fórmulas.

## 16.7. SENTIDO FÍSICO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Supongamos que ahora la hodógrafa $\Gamma$ de la función vectorial $r(t)$ continuamente diferenciable es la trayectoria de un punto material que se mueve y el parámetro $t$, el tiempo de movimiento. Denotemos la longitud variable del arco medida desde cierto punto inicial $r(t_0)$ por $s = s(t)$. Sea $t > t_0$; haciendo $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ por (16.13) obtendremos

$$\left|\frac{dr}{\mathrm{dt}}\right| = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

es decir, la longitud del vector $\frac{dr}{dt}$ coincide con la magnitud de la velocidad en el punto analizado (véase el p. 9.4), y el propio vector $\frac{dr}{dt}$, como sabemos (véase el p. 16.2), está orientado por la tangente. El vector $\frac{dr}{dt}$ se llama en este caso *velocidad del movimiento* en el punto dado y se denota por $v$:

$$v = \frac{dr}{dt}.$$

# § 17. CURVATURA DE UNA CURVA

## 17.1. DOS LEMAS. COMPONENTES RADIAL Y TRANSVERSAL DE LA VELOCIDAD

Demostremos dos lemas sobre las derivadas de una función vectorial muy útiles para el futuro.

**Lema 1.** *Supongamos que la función vectorial $r(t)$ tiene derivada en el punto $t_0$. Si la longitud del vector $r(t)$ en un entorno del punto $t_0$ es constante, entonces el vector $r'(t_0)$ es ortogonal al vector $r(t_0)$, es decir,*

$$r'(t_0)r(t) = 0. \tag{17.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Según la condición existe un entorno del punto $t_0$ en el cual la longitud del vector $r(t)$ es constante: $|r(t)| = c$, donde $c$ es una constante. Por esto, para todos los puntos del entorno indicado tenemos $|r(t)|^2 = c^2$ y por consiguiente $r^2(t) = c^2$. Diferenciando ambos miembros de la igualdad en el punto $t_0$ obtendremos (véase el p. 15.2) $2r(t_0)r'(t_0) = 0$ de donde se deduce (17.1). □

La interpretación física de este lema consiste en que un punto material que se mueve de forma tal que todo el tiempo se encuentra sobre la superficie de una esfera, tiene una velocidad orientada por la tangente a esta esfera y por consiguiente perpendicular al radio vector.

Supongamos que la función $r(t)$ está definida en cierto entorno $U(t_0)$ del punto $t_0$ y supongamos que en este entorno $r(t) \neq 0$ (si la función vectorial $r(t)$ es continua en el punto $t_0$, entonces la desigualdad a cero del radio vector $r(t)$ en un entorno del punto $t_0$ suficientemente pequeño siempre se puede obtener moviendo el origen de coordenadas). Sea $t = t_0 + \Delta t \in U(t_0)$ y sea $\varphi = \varphi(t)$ el ángulo (representado en radianes) entre los vectores $r(t_0)$ y $r(t)$, $|\varphi| \leqslant \pi$ y además consideraremos que $\varphi(t) \geqslant 0$ para $\Delta t \geqslant 0$ y $\varphi \leqslant 0$ para $\Delta t < 0$. En el punto $t_0$ para el incremento $\Delta\varphi$ de la función $\varphi$ tenemos

$$\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t),$$

ya que $\varphi(t_0) = 0$; por lo que siempre $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \geqslant 0$.

**Definición 1.** *La derivada $\frac{d\varphi(t_0)}{dt}$ se llama velocidad de rotación de la función vectorial $r(t)$ en el punto $t_0$ y se denota por $\omega = \omega(t_0; r(t))$:*

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{17.2}$$

Observemos que si se escoge el sentido opuesto de medición de los ángulos, es decir, definimos el ángulo entre los vectores $r(t_0)$ y $r(t)$ como el ángulo $\psi = -\varphi$, entonces, evidentemente,

$$\frac{d\psi}{dt} \leqslant 0 \quad \text{y} \quad \omega(t_0; r) = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt} = \left|\frac{d\psi}{dt}\right|.$$

De esta forma, tanto en una como en la otra medición de los ángulos $\varphi$ entre los vectores $r(t_0)$ y $r(t)$ siempre

$$\omega(t_0; r) = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|.$$

**Lema 2.** *Supongamos que la función vectorial $r(t)$ está definida en cierto entorno del punto $t_0$ y $r(t_0) \neq 0$. Si en el punto $t_0$ existe la derivada $r'(t_0)$, entonces en este punto existe también la velocidad de rotación $\omega = \omega(t_0; r(t))$ y además*

$$\omega = \frac{1}{r^2(t_0)} |r(t_0) \times r'(t_0)|. \tag{17.3}$$

**Corolario.** *Si como complemento a las condiciones del lema, la longitud del vector $r(t)$ es constante: $|r(t)| = r$, $r$ es una constante, entonces*

$$\omega = |r'(t)|/r. \tag{17.4}$$

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la existencia de la derivada $r'(t_0)$ la función $r(t)$ es continua en el punto $t_0$. De aquí y de la condición $r(t_0) \neq 0$ se deduce que para todos los $\Delta t$ suficientemente pequeños se cumple la desigualdad $r(t_0 + \Delta t) \neq 0$ y por consiguiente está definido el ángulo $\Delta\varphi$ entre los vectores $r(t_0)$ y $r(t_0 + \Delta t)$. De la continuidad de la función vectorial $r(t)$ en el punto $t_0$ se deduce también [*] la continuidad en el punto $t_0$ de la función $\varphi(t)$, es decir,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\varphi = 0$$

(como siempre $\Delta t = t - t_0$, $\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t)$, ya que $\varphi(t_0) = 0$).

Para el cálculo de la derivada (17.2) sustituyamos el infinitésimo $\Delta\varphi$ por el infinitésimo equivalente a él cuando $\Delta t \to 0$, sen $\Delta\varphi$ (véase el lema en el p. 8.2) el cual se puede hallar de la fórmula

$$|r(t_0) \times r(t_0 + \Delta t)| = |r_0(t_0)|\,|r(t_0 + \Delta t)|\,|\operatorname{sen} \Delta\varphi|.$$

Por el teorema 2 del p. 8.3 sobre la sustitución de los infinitésimos por sus equivalentes en el cálculo de los límites tenemos:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\operatorname{sen} \Delta\varphi}{\Delta t}\right| =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|r(t_0) \times r(t_0 + \Delta t)|}{|r(t_0)|\,|r(t_0 + \Delta t)|\,|\Delta t|} = \frac{1}{r^2(t_0)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|r(t_0) \times r(t_0 + \Delta t)|}{|\Delta t|}. \tag{17.5}$$

---

[*] Esto se deduce, por ejemplo, de la igualdad $\cos\varphi = \dfrac{r(t_0) r(t)}{|r(t_0)|\,|r(t)|}$.

Aquí de nuevo fue utilizada la continuidad de la función vectorial $r(t)$ en el punto $t_0$: $\lim\limits_{\Delta t \to \infty} r(t_0 + \Delta t) = r(t_0)$.

Más adelante, por cuanto la función $r(t)$ es diferenciable en el punto $t_0$, entonces

$$r(t_0 + \Delta t) = r(t_0) + r'(t_0)\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t,$$

donde $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$. Sustituyendo esta expresión para $r(t_0 + \Delta t)$ en (17.5) y observando que $|r(t_0) \times r(t_0)| = 0$ y $\lim\limits_{\Delta t \to 0} |r(t_0) \times \varepsilon(\Delta t)| = 0$ obtendremos:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{|r(t_0) \times r'(t_0)|}{r^2(t_0)}. \ \square$$

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Si $|r(t)| = r$ es constante, entonces según el lema 1, $r(t_0)r'(t_0) = 0$, es decir, $|r(t_0)||r'(t_0)| \cos \widehat{rr'} = 0$. Por cuanto $|r(t_0)| \neq 0$, entonces o bien $|r'(t_0)| = 0$ o bien el ángulo $\widehat{rr'}$ entre los vectores $r(t_0)$ y $r'(t_0)$ es igual a $\pm\pi/2$ y por consiguiente $|\operatorname{sen} \widehat{rr'}| = 1$. En ambos casos

$$|r(t_0) \times r'(t_0| = |r(t_0)||r'(t_0)||\operatorname{sen} \widehat{rr'}| = r|r'(t_0)|.$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (17.3) obtendremos (17.4). $\square$

Los lemas 1 y 2 continúan siendo válidos en el caso cuando en ellos por entornos se entienden entornos unilaterales.

Para el esclarecimiento del sentido básico de las fórmulas (17.3) y (17.4) interpretaremos de nuevo la curva descrita por el extremo del radio vector $r(t)$ como la trayectoria del movimiento de un punto material y el parámetro $t$ como el tiempo. Supongamos que la longitud del vector $r(t)$ es constante: $|r(t)| = r$, es decir, el punto se mueve por una esfera de radio $r$. Analicemos el movimiento del punto en cada momento como la rotación alrededor del tal llamado eje instantáneo, es decir, del eje que pasa por el origen de coordenadas perpendicularmente al plano del movimiento $\left(\text{así se llama el plano que pasa por el radio vector } r(t) \text{ paralelamente a la velocidad } v = \frac{dr(t)}{dt}\right)$. Entonces el vector $\omega = (r \times r')/r^2$ denota físicamente el vector de la velocidad angular y las fórmulas (17.3) y (17.4) expresan la relación entre la velocidad angular $\omega$ y la velocidad lineal $v$. En particular la fórmula (17.4) en esta rotación toma la forma

$$|\omega| = |v|/r.$$

OBSERVACIÓN. Utilizando el lema 1 se puede obtener fácilmente el desarrollo de la derivada de una función vectorial en dos componentes perpendiculares: en el sentido del vector $r(t)$ (*la componente radial*) y en el sentido perpendicular (*la componente transversal*).

Supongamos que la función vectorial $r(t)$ está definida en cierto entorno del punto $t_0$, $r(t) \neq 0$ y existe la derivada $r'(t_0)$. Hagamos $r_0(t) = \dfrac{r(t)}{|r(t)|}$; evidentemente $|r_0(t)| \equiv 1$. En el punto $t_0$ existe la derivada

$$\frac{d|r|}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{r^2} = \frac{rr'}{|r|} = r_0 r'.$$

por consiguiente, en el punto $t_0$ existe la derivada $\frac{dr_0}{dt}$ la cual por el lema 1 es ortogonal al vector $r_0(t_0)$ y por esto al vector $r(t_0)$.

Diferenciando la igualdad $r(t) = |r(t)| r_0(t)$ en el punto $t_0$ obtendremos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d|r|}{dt} r_0 + |r| \frac{dr_0}{dt} = (r_0 r')r_0 + |r| \frac{dr_0}{dt}. \tag{17.6}$$

Este es el desarrollo buscado.

En el caso cuando la hodógrafa de la función vectorial $r(t)$ es la trayectoria del movimiento de un punto material, entonces la fórmula (17.6) da el desarrollo de su velocidad en la componente del movimiento de traslación (la componente radial) y en la componente del movimiento de rotación (la componente transversal).

## 17.2. DEFINICIÓN DE CURVATURA DE UNA CURVA Y SU CÁLCULO

Sea $\Gamma = \{r(s); 0 \leqslant s \leqslant S\}$ una curva continuamente diferenciable y por consiguiente rectificable, $s$ la longitud variable del arco $0 \leqslant s_0 \leqslant S$, $\Delta s = s - s_0$, y $\alpha = \alpha(s)$, el ángulo entre las tangentes a la curva $\Gamma$ en los puntos $r(s_0)$ y $r(s_0 + \Delta s)$ y además consideraremos que $\alpha(s) \geqslant 0$ para $\Delta s \geqslant 0$ y $\alpha(s) \leqslant 0$ para $\Delta s < 0$. Evidentemente $\Delta\alpha = \alpha(s) - \alpha(s_0) = \alpha(s)$ ya que $\alpha(s_0) = 0$.

Sea ahora $t(s) = \frac{dr(s)}{ds}$. Como fue mostrado $t(s)$ es un vector unitario (véase (16.16)) paralelo a la tangente a la curva en el punto correspondiente (véase el p. 16.4) por lo que el ángulo $\Delta\alpha$ es el ángulo entre los vectores $t(s_0)$ y $t(s_0 + \Delta s)$.

**Definición 2.** *La velocidad angular de rotación del vector unitario* $t = \frac{dr}{ds}$ *en un punto dado de la curva se llama curvatura* $k(s_0)$ *de la curva en este punto,* $k(s_0) = \omega(s_0; t) = \frac{d\alpha(s_0)}{ds}$.

Eliminando para mayor brevedad el valor del argumento obtenemos

$$k = \frac{d\alpha}{ds}. \tag{17.7}$$

Por cuanto $|t| = 1$ entonces en virtud del corolario del lema 2 del p. 17.1 tenemos

$$k = \left|\frac{dt}{ds}\right| \tag{17.8}$$

(si, por supuesto, la derivada $\frac{dt}{ds}$ existe).

**Definición 3.** *La magnitud inversa a la curvatura se llama radio de la curvatura en el punto dado y se denota por* $R$, *es decir,* $R = 1/k$.

Sea $\Gamma$ una circunferencia de radio $R$. En este caso el ángulo $\Delta\alpha$ entre las tangentes es igual al ángulo formado por los radios de los puntos de tangencia (fig. 79) y

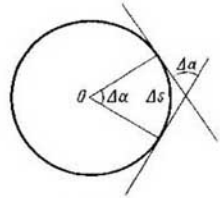



FIG. 79

para la longitud del arco $\Delta s$ entre estos puntos se tiene la fórmula $\Delta s = R\Delta\alpha$. Por esto $\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \dfrac{1}{R}$. Según la definición de curvatura para la circunferencia tenemos

$$k = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}.$$

De esta forma, en el caso de una circunferencia, su curvatura $k$ es constante (no depende del punto) y es igual a la magnitud inversa al radio; el radio de la curvatura de una circunferencia es igual a su radio. De aquí partió el término "radio de la curvatura".

Las condiciones suficientes de la existencia de la curvatura en un punto dado y el método de su cálculo se dan mediante el siguiente teorema.

**Teorema 1.** *Sea $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ una curva dos veces diferenciable sin puntos singulares. Entonces en cada punto existe la curvatura y*

$$k = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}. \tag{17.9}$$

Aquí y en el futuro con la virgulilla se denotan las derivadas por un parámetro arbitrario $t$. Las derivadas por la longitud del arco $s$ las denotaremos con el símbolo $\dfrac{d}{ds}$.

DEMOSTRACIÓN. En las suposiciones del teorema la longitud variable del arco $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $o \leqslant s \leqslant S$ de la curva $\Gamma$ puede ser tomada en esta curva como parámetro (véase el corolario 2 del teorema 2 en el punto 16.5). Además el vector unitario tangencial $t = \dfrac{dr}{ds}$ es una función vectorial continuamente diferenciable y por esto para él, para cada valor $s_0 \in [0, S]$ está definida la velocidad de rotación $\omega(s_0; t)$, es decir, en cada punto de la curva $\Gamma$ está definida la curvatura

$$k(s_0) = \omega(s_0; t) = \frac{d\alpha}{ds}, \tag{17.10}$$

donde $\alpha = \alpha(s)$ es el ángulo entre los vectores $\dfrac{dr(s_0)}{ds}$ y $\dfrac{dr(s)}{ds}$, escogido como se indicó al principio de este punto. En particular, esto significa que para todos los $s \in [0, S]$ se cumple la desigualdad $\dfrac{d\alpha(s)}{ds} \geqslant 0$.

De la fórmula
$$\frac{dr(s)}{ds} = r'(t)\frac{dt}{ds} = \frac{r'(t)}{s'}$$

se deduce que los vectores $\frac{dr(s)}{ds}$ y $r'(t)$ para $s = s(t)$ siempre son colineales y por cuanto la función $s'(t)$ no cambia de signo, entonces los valores indicados o bien siempre tienen un sentido (si $s'(t) > 0$) o bien siempre tienen sentido opuesto (si $s'(t) < 0$).

Además en el primer caso, a los incrementos $\Delta t$ suficientemente pequeños les corresponden los incrementos $\Delta s$ del mismo signo, y en el segundo, de signo opuesto. Por lo dicho, si $s_0 = s(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$ y si $\beta = \beta(t)$ es el ángulo entre los vectores $r'(t_0)$ y $r'(t)$, entonces o bien para todos los $t \in [a, b]$ será $\beta = \alpha$ o bien para todos los $t \in [a, b]$ será $\beta = -\alpha$, por lo que (véase el p. 17.1)
$$\omega(t_0, r') = \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| \tag{17.11}$$

Ahora utilizando las fórmulas (17.10), (17.11) y el lema 2 obtendremos
$$k(s_0) = \frac{d\alpha}{ds} = \left|\frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \omega(t_0; r')\frac{1}{|s'|} = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$$

(utilizamos también la fórmula (16.3)). □

De la fórmula (17.9) es fácil pasar a la expresión de la curvatura en la escritura por coordenada. En realidad, observando que $r' = (x', y', z')$, $r'' = (x'', y'', z'')$ y que
$$r' \times r'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

(donde $i, j, k$ son los vectores unitarios en los sentidos de los ejes $Ox$, $Oy$, $Oz$ respectivamente) obtenemos
$$|r' \times r''| = \sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}, \tag{17.12}$$

por otro lado
$$|r'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \tag{17.13}$$

Sustituyendo (17.12) y (17.13) en (17.9) hallamos la expresión buscada.

## 17.3. NORMAL PRINCIPAL. PLANO OSCULADOR

Analicemos la curva $\Gamma$ dos veces diferenciable sin puntos signulares. Para tal curva existe la representación $r = r(s)$ dos veces diferenciable, donde $s$ es la longitud variable del arco, $0 \leqslant s \leqslant S$.

Denotemos por $n$ el vector unitario en el sentido del vector $\frac{dt}{ds}$ donde $t = \frac{dr}{ds}$ es el vector unitario tangente a la curva analizada. De la fórmula (17.8) se deduce que

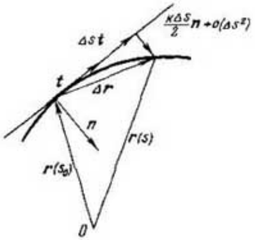



FIG. 80

el vector $n$ está definido sólo para aquellos puntos en los cuales la curvatura $k \neq 0$ y que en estos puntos

$$\frac{dt}{ds} = kn. \tag{17.14}$$

El vector $t$ es unitario, por lo que el vector $n$ es perpendicular (véase el p. 17.1) al vector $t$. La fórmula (17.14) se llama *fórmula de Frenet* *).

El vector $\frac{d^2r}{ds^2}$ y por tanto el vector $n = \frac{1}{k}\frac{d^2r}{ds^2}$ no dependen de la elección de la orientación de la curva. Efectivamente si $\sigma$ es la longitud variable del arco de la curva, calculada en el sentido contrario a $s$ y por consiguiente si $\sigma = S - s$, entonces observando que $\frac{d\sigma}{ds} = -1$, obtendremos

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2r}{d\sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \frac{d^2r}{d\sigma^2}.$$

**Definición 4.** *Cualquier recta que pasa por un punto de la curva y es perpendicular a la tangente en este punto se llama normal a la curva en el punto dado. La normal a la curva, paralela al vector* $n$, *se llama normal principal.*

El vector de la normal principal $n$ salvo infinitésimos de orden superior que $\Delta s^2$ indica el sentido en el cual la curva en un entorno del punto dado se inclina de su tangente (fig. 80). Efectivamente, escogiendo sobre la curva en calidad de parámetro a la longitud variable del arco $s$, según la fórmula de Taylor para una función vectorial (véase el p. 15.2), tendremos

$$\Delta r = r(s_0 + \Delta s) - r(s_0) = \frac{dr(s_0)}{ds}\Delta s + \frac{1}{2}\frac{d^2r(s_0)}{ds^2}\Delta s^2 + o(\Delta s^2),$$

u observando que (véase 17.14)

*) J. F. Frenet (1801—1880), matemático francés.

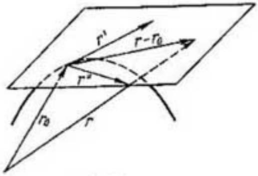



FIG. 81

$$\frac{dr}{ds} = t, \quad \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{dt}{ds} = kn, \tag{17.15}$$

obtendremos

$$\Delta r = \Delta s t + \frac{1}{2} k \Delta s^2 n + o(\Delta s^2);$$

por cuanto $\frac{1}{2} k\Delta s^2 > 0$, entonces esta fórmula demuestra la validez de nuestra afirmación.

**Definición 5.** *El plano que pasa por la tangente y la normal principal en un punto dado de una curva se llama plano osculador.*

Por esta definición el plano osculador está definido para los puntos en los cuales $k \neq 0$. Hallemos la ecuación de este plano para una curva dada por la representación $r = r(t)$ con un parámetro arbitrario $t$. Como antes, las derivadas por el parámetro $t$ se denotarán con una virgulilla y las derivadas por la longitud del arco $s$, por el símbolo $\frac{d}{ds}$. Diferenciando $r = r(t)$ como una función compuesta $r = r(s)$, $s = s(t)$ obtenemos (véase (17.15))

$$r' = \frac{dr}{ds} s' = s't, \quad r'' = s'^2 \frac{dt}{ds} + s''t = s'^2 kn + s''t. \tag{17.16}$$

De aquí se deduce que los vectores $r'$ y $r''$ también son paralelos al plano osculador. En virtud de la condición $k \neq 0$ se cumple la desigualdad $r' \times r'' \neq 0$ (véase (17.9)) y por lo tanto $r'$ y $r''$ no son colineales. Denotemos ahora por $r_0$, $r'_0$ y $r''_0$ a los vectores $r$, $r'$ y $r''$ en algún punto fijo de la curva $\Gamma$ dada y por $r$ denotaremos al vector variable del plano osculador, entonces el producto mixto de los vectores $r - r_0$, $r'_0$ y $r''_0$ debe ser igual a cero ya que todos son paralelos al plano osculador (fig. 81):

$$(r - r_0, r'_0, r''_0) = 0.$$

Esta es la ecuación del plano indicado en la forma vectorial. En la forma coordenada se escribe de la siguiente manera.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0,$$

donde $r'_0 = (x'_0, y'_0, z'_0)$, $r'' = (x''_0, y''_0, z''_0)$.

En el caso cuando en el punto dado $k = 0$, entonces cualquier plano que pase por la tangente en este punto se llama *osculador.*

### 17.4. CENTRO DE CURVATURA Y EVOLUTA DE LA CURVA

**Definición 6.** *El punto del espacio que está sobre la normal principal a la curva en un punto dado y que se encuentra a una distancia R de este punto en la dirección del vector n se llama centro de la curvatura de la curva en el punto indicado.*

De esta forma, si $\rho$ es el radio vector del centro de curvatura y $r$, como es común, es el radio vector del punto dado de la curva, entonces

$$\rho = r + Rn$$

o lo que es lo mismo (véase (17.15))

$$\rho = r + \frac{1}{k^2}\frac{d^2r}{ds^2}. \tag{17.17}$$

Hallemos la expresión de $\rho$ por las derivadas de la función vectorial respecto a un parámetro $t$ arbitrario. Según la regla de diferenciación de una función compuesta

$$\frac{dr}{ds} = r'\,\frac{dt}{ds} = \frac{r'}{s'},$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{r'}{s'}\right) = \left(\frac{r'}{s'}\right)'\frac{1}{s'} = \frac{r''s' - r's''}{s'^3}. \tag{17.18}$$

Estas fórmulas, en virtud de las fórmulas (17.15), evidentemente son la transformación de las fórmulas (17.16).

Sustituyendo (17.18) en (17.17) obtendremos

$$\rho = r + \frac{1}{k^2}\frac{s'r'' - s''r''}{s'^3}, \tag{17.19}$$

donde (considerando para mayor simplicidad que cuanto $t$ crece la longitud del arco $s(t)$ también crece) $s' = |r'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, de donde

$$s'' = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Las fórmulas (17.17) y (17.19) se pueden analizar como representaciones de cierta curva, los puntos de la cual son los centros de curvatura de la curva dada. Esta curva se llama *evoluta* de la curva dada.

### 17.5. FÓRMULAS PARA LA CURVATURA Y LA EVOLUTA DE UNA CURVA PLANA

Todo lo dicho en el punto anterior, en particular es válido para las curvas planas. Observemos sólo que si la curva $\Gamma = \{r(t)\}$ está en cierto plano, entonces todas las derivadas de la función vectorial $r(t)$ también están en este plano. En realidad en él está el incremento de la función vectorial $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$ y por lo tanto

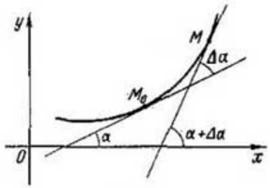



FIG. 82

la relación $\dfrac{\Delta r}{\Delta t}$. De aquí fácilmente se deduce que el límite de estas relaciones $r' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta r}{\Delta t}$ está en el plano indicado, aplicando el mismo razonamiento a $r'$ demostraremos que $r''$ está en ese mismo plano, etc.

De lo dicho se deduce que si la curva está en algún plano, entonces el vector tangente $r$ y si su curvatura $k \neq 0$, entonces también el vector $n$ de la normal principal, están en ese mismo plano. Por esto, este plano es el plano osculador para la curva analizada.

Señalemos también que si en el caso de la curva $\Gamma = \{r(s)\}$ que está en el plano $xOy$ a diferencia de 17.2 mediante $\alpha(s)$ denotamos el ángulo formado por la tangente en el punto $r(s)$ con el eje $Ox$ (fig. 82) entonces $\Delta\alpha = \alpha(s_0 + \Delta s) - \alpha(s_0)$ será el ángulo entre las tangentes en los puntos $r(s_0)$ y $r(s_0 + \Delta s)$. Si el ángulo $\alpha$ crece junto con $s$, es decir, si $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s} \geqslant 0$ para $\Delta s > 0$, entonces $k = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \dfrac{d\alpha}{ds}$, si $\alpha$ decrece con el crecimiento de $s$, entonces

$$k = -\lim_{\Delta s \to \infty} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = -\frac{d\alpha}{ds}.$$

Escribamos algunas de las fórmulas obtenidas en el punto anterior, considerando que la curva $\Gamma = [r(t); a \leqslant t \leqslant b]$ está en el plano $xOy$: $r(t) = (x(t), y(t))$. De las fórmulas (17.9), (17.12) y (17.13) tenemos

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \tag{17.20}$$

Denotando por $(\xi, \eta)$ el centro de curvatura de la curva $\Gamma$, de las fórmulas (17.17) obtendremos las fórmulas que expresan las coordenadas $\xi$ y $\eta$ mediante las derivadas por $s$:

$$\xi = x + R^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta = y + R^2 \frac{d^2y}{ds^2},$$

y de las fórmulas (17.19) y (17.20) se deducen las fórmulas que expresan las coordenadas del centro de curvatura mediante las derivadas por un parámetro $t$ arbitrario:

$$\xi = x + \frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x'y'' - x''y')^2} \frac{x''\sqrt{x'^2 + y'^2} - x'\dfrac{x'x'' + y'y''}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} =$$

$$= x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}; \qquad (17.21)$$

análogamente

$$\eta = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \qquad (17.22)$$

Ejercicio 1. Sea $\Gamma$ una curva plana dos veces diferenciable sin puntos singulares, sea $\alpha$ el ángulo de inclinación de su tangente con el eje $Ox$ y sea $k^* = \dfrac{d\alpha}{ds}$ (por consiguiente $|k^*| = k$) y $R^* = \dfrac{1}{k^*}$. Muéstrese que $\xi = x - R^* \operatorname{sen}\alpha$, $\eta = y + R^* \cos\alpha$ y también que $\xi = x - \dfrac{dy}{d\alpha}$, $\eta = y + \dfrac{dx}{d\alpha}$.

En el caso cuando la curva es la gráfica de la función $y = f(x)$ las fórmulas (17.20), (17.21) y (17.22) toman la forma

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \qquad (17.23)$$

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''}y', \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \qquad (17.24)$$

Ejemplos 1. Hallemos la curvatura y la evoluta de la parábola $y = ax^2, a > 0$. Observando que $y' = 2ax$, $y'' = 2a$ por la fórmula (17.23) tenemos $k = \dfrac{2a}{(1 + 4a^2x^2)^{3/2}}$. Para hallar la ecuación de la evoluta nos serviremos de las fórmulas (17.24):

$$\xi = x - \frac{1 + 4a^2x^2}{2a}2ax = -4a^2x^3,$$

$$\eta = ax^2 + \frac{1 + 4a^2x^2}{2a} = \frac{6a^2x^2 + 1}{2a}.$$

Se obtuvo la representación paramétrica de la evoluta de la parábola con el parámetro $x$. Se puede obtener su representación explícita eliminando este parámetro $x$. Para esto, de la primera igualdad hallamos $x^3 = -\xi/4a^2$ y de la segunda $x^2 = (2a\eta - 1)/6a^2$. Al elevar la primera igualdad obtenida al cuadrado y la segunda al cubo e igualar los segundos miembros tendremos

$$\left(\frac{\xi}{4a^2}\right)^2 = \left(\frac{2a\eta - 1}{6a^2}\right)^3, \text{ de donde } \xi = \pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\left(\eta - \frac{1}{2a}\right)^{3/2}.$$

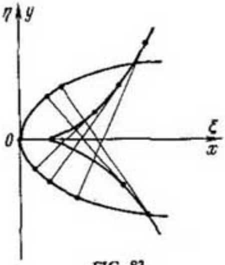



FIG. 83

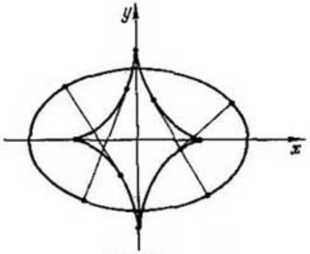



FIG. 84

Esta curva representada en la fig. 83 es, como ya sabemos (véase el ejercicio 2 en el p. 14.3), una parábola *semicúbica*.

2. Hallemos el radio de la curvatura y la evoluta de la elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, $a \geqslant b > 0$.

Observando que $x' = -a \operatorname{sen} t$, $y' = b \cos t$, $x'' = -a \cos t$, $y'' = -b \operatorname{sen} t$, por la fórmula (17.20) obtendremos

$$R = \frac{1}{k} = \frac{(a^2 \operatorname{sen}^2 \;\; + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab \operatorname{sen}^2 t + ab \cos^2 t} = \frac{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

Por esto, de las fórmulas (17.21) y (17.22) se deduce que

$$\xi = a \cos t - b \cos t \, \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t,$$

$$\eta = b \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} t \, \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} = \frac{b^2 - a^2}{b} \operatorname{sen}^3 t.$$

Esta es la representación paramétrica de la evoluta buscada. El parámetro $t$ se puede eliminar elevando las igualdades obtenidas al exponente 2/3 y sumándolas:

$$(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

Esta curva se llama *astroide* (fig. 84).

A veces para la representación de la curva es cómodo utilizar las así llamadas coordenadas polares $(\rho, \varphi)$, $\rho \geqslant 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, donde $\rho$ es la longitud del radio vector del punto $M$ dado y $\varphi$,el ángulo formado por este radio vector con el eje $Ox$. De esta forma, a cada punto del plano, menos el origen de coordenadas, unívocamente le corresponde un par ordenado $(\rho, \varphi)$; y además para el origen de coordenadas tenemos $\rho = 0$ y el ángulo $\varphi$ no está definido (fig. 85).

Si $M = (x, y)$ donde, como es común, $x$ e $y$ son las coordenadas cartesianas del punto $M$, entonces

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi. \tag{17.25}$$

La relación inversa se expresa por las fórmulas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi,$$

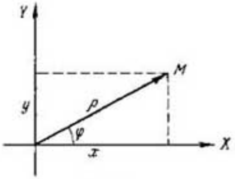



FIG. 85

donde $k = 0$, si $x \geqslant 0$, $k = 1$, si $x < 0, y > 0$ y $k = -1$ si $y < 0$; además, como es común, para $x = 0$, $y \neq 0$ se considera $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y$.

A veces al ángulo $\varphi$ no se le pone la limitación $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ y se denota por $\varphi$ cualquier ángulo para el cual $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$. En este caso la correspondencia entre los pares ordenados $(\rho, \varphi)$, $\rho \neq 0$, y los puntos del plano diferentes del origen de coordenadas, evidentemente ya no es biunívoca.

Si se da la función continua

$$\rho = \rho(\varphi), \quad a \leqslant \varphi \leqslant \beta \tag{17.26}$$

entonces sustituyéndola en (17.25) obtenemos

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \quad y = \rho(\varphi) \operatorname{sen} \varphi, \tag{17.27}$$

es decir, la representación paramétrica de cierta curva $\Gamma$. En este sentido se puede decir que la ecuación (17.26) define la curva $\Gamma$ en coordenadas polares. Para el cálculo de la curvatura, el radio de curvatura y la evoluta de la curva $\Gamma$ dada con la ecuación (17.26) es necesario pasar a su representación paramétrica (17.27) y servirnos de las fórmulas deducidas anteriormente.

Ejercicios 2. Supongamos que está dada la curva $\rho = \rho(\varphi)$ en coordenadas polares, sea $\alpha$ el ángulo de inclinación de su tangente con el eje $Ox$ y $\omega$ el ángulo que forma esta tangente con la continuación del radio vector del punto de tangencia. Demuéstrese que $\alpha = \omega + \varphi$ y $\operatorname{tg} \omega = \rho/\rho'$.

3. Hállese la evoluta de la curva $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ llamada *cardioide*.

*Indicación*. Es útil servirse de los resultados de los ejercicios 1 y 2.

**Problema 13.** Sea $\Gamma$ la curva dos veces diferenciable y sin puntos singulares $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant\ \leqslant b\}$ y supongamos que $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t_1 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t_2 \in [a, b]$. Tracemos por los puntos $r(t_0)$, $r(t_0 + \Delta t_1)$ y $r(t_0 + \Delta t_2)$ un plano; demuéstrese que si en el punto $r(t_0)$ la curvatura $k \neq 0$ entonces para $\Delta t_1 \to 0$ y $\Delta t_2 \to 0$ este plano tiende (defínese este concepto) al plano osculador en el punto $r(t_0)$.

**Problema 14.** Utilizando las hipótesis del porblema anterior tracemos por esos mismos tres puntos $r(t_0)$, $r(t_0 + \Delta t_1)$ y $r(t_0 + \Delta t_2)$ una circunferencia. Demuéstrese que esta circunferencia cuando $\Delta t_1 \to 0$ y $\Delta t_2 \to 0$ tiende a la circunferencia (defínese este concepto) que está en el plano osculador con centro en el centro de curvatura de la curva y radio igual al radio de curvatura en el punto $r(t_0)$.

Esta circunferencia límite se llama *circunferencia osculadora* en el punto dado de la curva.

CAPÍTULO SEGUNDO

# CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

## § 18. CONJUNTOS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

### 18.1. ENTORNOS DE LOS PUNTOS. LÍMITES DE LAS SUCESIONES DE PUNTOS

Antes de pasar al estudio de las funciones de varias variables, estudiemos algunas de las propiedades de los conjuntos sobre los cuales serán definidas estas funciones. Supongamos que en el plano analizado por nosotros, o en el espacio, está siempre definido cierto sistema rectangular de coordenadas cartesianas. En la mayoría de los casos, vamos a designar los puntos por las letras $a$, $b$, . . ., $x$, $y$, $z$, . . . *), y sus coordenadas serán designadas por esas mismas letras con índices, es decir, para el plano escribiremos $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, y para el espacio $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. La distancia entre dos puntos $x$ e $y$ será designada por $\rho(x, y)$. Como es sabido, la fórmula para la distancia entre los puntos $x$ e $y$ en el caso del plano tiene la forma

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

y para el espacio

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

En lo adelante tendremos que estudiar no sólo funciones de dos o tres variables sino también funciones de una gran cantidad de variables, por eso es útil introducir el concepto de espacio $n$-dimensional para cualquier $n = 1, 2, 3, \ldots$.

**Definición 1.** *Se llama punto $x$ de un espacio $n$-dimensional el conjunto ordenado de $n$ números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$.*

*El número $x_i$ se llama coordenada $i$ del punto $x$; $i = 1, 2, \ldots, n$.*

*La distancia* entre dos puntos $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ se define por la fórmula

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}. \tag{18.1}$$

*El conjunto de todos los puntos de un espacio $n$-dimensional, para los cuales ha sido definida la distancia por la fórmula* (18.1) *se llama espacio euclídeo*

*) En algunas ocasiones los puntos se designan por letras mayúsculas, por ejemplo $M$, $N$, $P$, y sus coordenadas por las letras $x$, $y$, $z$.

*$n$-dimensional (o, de una forma más completa, un espacio euclídeo aritmético $n$-dimensional) y se designa por $R^n$ o por $R^n_x$.*

Para mayor brevedad, en lugar de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ escribiremos a veces $x = (x_i)$.

En el caso de $n = 1$, el espacio $R^n$ coincide con la recta, en el caso de $n = 2$, con el plano, y en el caso de $n = 3$, con el espacio estudiado en la geometría elemental y en la geometría analítica. Para el caso de un $n > 3$ arbitrario, no se debe buscar en nuestra definición sentido físico o geométrico alguno. Nuestro objetivo es solamente la construcción de cierto aparato matemático, cómodo para el estudio de las funciones de varias variables; las definiciones y la terminología las tomaremos de la geometría elemental, ya que esto nos permite incluir la recta, el plano y el espacio tridimensional en un esquema más general.

La distancia entre dos puntos en un espacio euclídeo $n$-dimensional $R^n$ tiene las propiedades siguientes:

1°) $\rho(x, y) \geqslant 0$, además, $\rho(x, y) = 0$, si y sólo si $x = y$;

2°) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ para cualesquiera dos puntos $x$ e $y$ de $R^n$;

3°) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ para cualesquiera tres puntos $x$, $y$ y $z$ de $R^n$.

Las propiedades 1° y 2° se deducen directamente de la fórmula (18.1), la tercera, usualmente llamada *"desigualdad triangular"* y bien conocida para un espacio tridimensional corriente, en el caso general (para un $n$ arbitrario) exige demostración.

Demostremos previamente un lema.

**Lema 1 (de Cauchy — Schwarz *)).** *Para cualesquiera números reales $a_k$ y $b_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, se cumple la desigualdad*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{18.2}$$

**Corolario.**

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{18.3}$$

DEMOSTRACIÓN. Si todos los $a_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces la desigualdad es evidente, ambos miembros de la desigualdad se convierten en cero. Si $a_1^2 + \ldots + a_n^2 > 0$ analicemos la función cuadrática

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2. \tag{18.4}$$

Es evidente que

$$F(t) \geqslant 0. \tag{18.5}$$

*) H. Schwarz (1843 — 1921), matemático alemán.

De la condición (18.5) se deduce que el trinomio de segundo grado (18.4), tiene o bien raíces reales coincidentes, o bien raíces esencialmente complejas, y por eso su discriminante es no positivo:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0.$$

Trasladando el segundo sumando en el segundo miembro, y hallando la raíz cuadrada, obtenemos (18.2). □

Para la demostración de la desigualdad (18.3), estimemos la suma $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2$, utilizando la desigualdad (18.2):

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2.$$

Hallando en ambos miembros la raíz cuadrada, obtenemos (18.3). □

Retornemos ahora a la propiedad 3 de la distancia entre puntos en el espacio $R^n$.

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Hagamos $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$, y por tanto, $a_i + b_i = x_i - z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, la desigualdad (18.3) se transcribe de la siguiente forma:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2},$$

o, por (18.1), $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$. □

En lo adelante en este párrafo consideraremos que el espacio $R^n$ está fijado (es decir, consideraremos fijado el número $n$).

**Definición 2.** *Se llama i-ésima coordenada del eje* ($i = 1, 2, \ldots, n$) *del espacio euclídeo n-dimensional* $R^n$, *el conjunto de puntos* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *de este espacio, tales que* $x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = x_n = 0$. *El punto* $O = (0, 0, \ldots, 0)$ *es llamado origen de coordenadas.*

Es evidente, que en el caso de $n = 2$ y $n = 3$ nuestra definición nos da los ejes de coordenadas usuales.

OBSERVACIÓN. Sean dados en el plano dos sistemas rectangulares de coordenadas, el punto $M$ en uno de los sistemas tiene las coordenadas $(x, y)$, y en el otro $(\xi, \eta)$, es decir, $M = (x, y) = (\xi, \eta)$. Poniendo en correspondencia al par ordenado de números $(x, y)$ el par ordenado $(\xi, \eta)$, obtenemos una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los pares ordenados $(x, y)$ y el conjunto de todos los pares ordenados $(\xi, \eta)$. En este caso, si

$$M' = (x', y') = (\xi', \eta'), \quad M'' = (x'', y'') = (\xi'', \eta''),$$

entonces

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} = \sqrt{(\xi'' - \xi')^2 + (\eta'' - \eta')^2}.$$

Este ejemplo hace natural la siguiente definición.

Supongamos que a cada punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ está puesto en correspondencia un complejo ordenado de $n$ números reales $\xi(x) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, de tal forma que para cualesquiera dos puntos $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ y $x'' = (x_1'', \ldots, x_n'')$ y para sus complejos correspondientes $\xi(x') = (\xi_1', \ldots, \xi_n')$ y $\xi(x'') = (\xi_1'', \ldots, \xi_n'')$ se cumple la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i'' - x_i')^2 = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i'' - \xi_i')^2,$$

entonces los números, que forman parte del conjunto $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ también se llaman *coordenadas del punto* $x$ ("en otro sistema de coordenadas"). Definiendo así las coordenadas, la distancia entre dos puntos dados no cambia cuando varía el sistema de coordenadas, es decir, cuando se sustituye un sistema de coordenadas por otro. En lo adelante, si no se dice lo contrario, el sistema de coordenadas se considera fijo.

Si el punto $x$ está dado por las coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, entonces a veces, para mayor claridad, el espacio $R_x^n$, designará a $R_{x_1, \ldots, x_n}^n$.

**Definición 3.** *Sea $x \in R^n$ y $\varepsilon > 0$. El conjunto de todos los puntos $y$ del espacio $R^n$, tales que $\rho(x, y) < \varepsilon$, se llama bola n-dimensional con centro en el punto $x$ y radio $\varepsilon$ o un* $\varepsilon$-entorno *(a veces esférico o más correctamente, un entorno de bola) del punto $x$ en el espacio $R^n$ y se designa por $U(x; \varepsilon)$; de esta forma*

$$U(x; \varepsilon) = \{y : y \in R^n, \rho(x, y) < \varepsilon\}. \tag{18.6}$$

En la notación con coordenadas esta definición tendrá la forma siguiente:

$$U(x; \varepsilon) = \{y = (y_1, \ldots, y_n) : \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 < \varepsilon^2\},$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n), \varepsilon > 0.$$

En el caso de una recta, es decir, para $n = 1$ (fig. 86) $x = x_1, y = y_1$, y por esto

$$U(x, \varepsilon) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}.$$

De esta forma, $U(x; \varepsilon)$ es un intervalo de longitud $2\varepsilon$ con centro en el punto $x$, es decir, con el entorno del punto $x$ en el sentido analizado anteriormente (véase el p. 3.2).

En el caso del plano, es decir, para $n = 2$ (fig. 87) $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ y

$$U(x; \varepsilon) = \{y = (y_1, y_2) : (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2 < \varepsilon^2\}, \varepsilon > 0,$$


FIG. 86

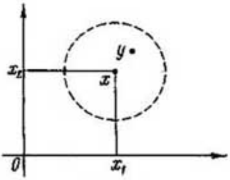



FIG. 87

es decir, $U(x; \varepsilon)$ es un círculo de radio $\varepsilon$ con centro en el punto $x = (x_1, x_2)$, y en el caso del espacio, es decir para $n = 3$ el entorno del punto $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$U(x, \varepsilon) = \{y = (y_1, y_2, y_3): (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 < \varepsilon^2\}, \quad \varepsilon > 0$$

es una bola de radio $\varepsilon$ con centro en el punto $(x_1, x_2, x_3)$.

De esta forma, el concepto de entorno está generalizado para el caso del espacio euclídeo $n$-dimensional $R^n$. Sin embargo, conjuntamente con la generalización señalada, resulta de utilidad otra generalización de este concepto, precisamente el concepto del así llamado entorno rectangular.

**Definición 4.** *Sea* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *El conjunto*

$$P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n) = \{y = (y_1, \ldots, y_n): x_i - \delta_i < \\ < y_i < x_i + \delta_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n\} \tag{18.7}$$

*se llama paralelepípedo n-dimensional y el punto x es su centro.*

**Definición 5.** *Si* $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = \delta$, *entonces* $P(x, \delta, \delta, \ldots, \delta)$ *se llama cubo n-dimensional con centro en el punto x y se designa por* $P(x; \delta)$.

Si $n = 1$, entonces el conjunto $P(x; \delta)$ es el intervalo con centro en el punto $x$ de longitud $2\delta$; si $n = 2$, entonces el conjunto $P(x; \delta_1, \delta_2)$ es un rectángulo con lados, paralelos a los ejes de coordenadas (sus longitudes son iguales respectivamente a $2\delta_1$ y $2\delta_2$); para $n = 3$, el conjunto $P(x; \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ representa un paralelepípedo rectangular con aristas paralelas a los ejes de coordenadas (sus longitudes son respectivamente iguales a $2\delta_1$, $2\delta_2$ y $2\delta_3$).

Por paralelepípedo $n$-dimensional, cubo $n$-dimensional respectivamente, entenderemos también el conjunto, definido por las condiciones señaladas anteriormente al menos en un sistema de coordenadas (y no obligatoriamente en el dado, como esto fue hecho anteriormente). En lo adelante, paralelepípedo $n$-dimensional y cubo $n$-dimensional se entenderán sólo en el sentido restringido, es decir, en el sentido de la definición dada anteriormente para un sistema de coordenadas fijo.

**Definición 6.** *Cualquier paralelepípedo n-dimensional* $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ *se denomina entorno rectangular del punto x.*

Si el entorno rectangular del punto x es un cubo $n$-dimensional, entonces también se denomina *entorno cúbico* de este punto.

**Lema 2.** *Cualquiera que sea el* $\varepsilon$-entorno $U(x; \varepsilon)$ *del punto* $x \in R^n$, *existe su entorno rectangular* $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ *tal que*

$$P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n) \subset U(x; \varepsilon), \tag{18.8}$$

*y vicerersa, cualquiera que sea el entorno rectangular* $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ *del punto* $x \in R^n$, *existe su* $\varepsilon$*-entorno* $U(x; \varepsilon)$ *tal que*

$$U(x; \varepsilon) \subset P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n). \tag{18.9}$$

Estas afirmaciones son geométricamente evidentes, para $n = 1$, 2 y 3. Efectivamente, para $n = 1$ los conceptos de entornos esféricos y rectangulares coinciden. Para $n = 2$ el lema significa que en todo rectángulo se puede inscribir un círculo con centro en el centro del rectángulo, y en todo círculo se puede inscribir un rectángulo con centro en el centro del círculo. Por último, para $n = 3$ el lema significa que en cada paralelepípedo rectangular se puede incluir una bola con centro en el centro de este paralelepípedo y en toda bola se puede inscribir un paralelepípedo rectangular con centro en el centro de la bola analizada. No es difícil enunciar y demostrar estas afirmaciones en su forma analítica, utilizando la notación de las coordenadas. Este método, como se mostrará en seguida se generaliza fácilmente para el caso de un espacio $n$-dimensional arbitrario.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Para cualesquiera puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $a = (a_1, \ldots, a_n)$ del espacio $R^n$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumplen las desigualdades

$$|x_i - a_i| \leqslant \rho(x, a) \leqslant |x_1 - a_1| + \ldots + |x_n - a_n|. \tag{18.10}$$

La desigualdad izquierda se obtiene, si en la expresión $\rho(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$ todos los sumandos en la raíz, excepto el $i$-ésimo, son sustituidos por cero, como resultado el valor de $\rho(x, a)$ puede sólo disminuir.

La desigualdad derecha (18.10) se deduce de la desigualdad

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2} \leqslant |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|, \tag{18.11}$$

que se cumple para cualesquiera números reales $\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, y comprobable directamente, elevando al cuadrado. Suponiendo en (18.11) $\alpha_i = x_i - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos la desigualdad, que se encuentra en la parte derecha de (18.10).

Sea dado el entorno de bola $U(a; \varepsilon)$ del punto $a$. Analicemos el entorno rectangular $P(a; \varepsilon/n)$, es decir, el cubo $n$-dimensional con centro en el punto $a$ y arista de longitud $2\varepsilon/n$ (el caso de $n = 2$ se muestra en la fig. 88). Si $x \in P(a; \varepsilon/n)$ y, por tanto, por la definición (18.7) se cumplen las desigualdades $|x_i - a_i| < \dfrac{\varepsilon}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces de (18.10) se deriva la validez de la desigualdad

$$\rho(x, \mathrm{a}) \leqslant |x_1 - a_1| + \ldots + |x_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{n} + \ldots + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Esto significa que $x \in U(a; \varepsilon)$. Ya que por $x$ se sobreentendía un punto arbitrario del cubo $P(a; \varepsilon/n)$, entonces $P(a; \varepsilon/n) \subset U(a; \varepsilon)$; de esta forma, se demuestra (18.8).

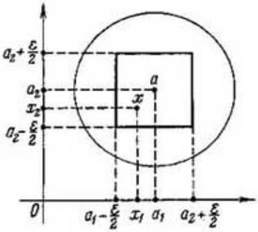



FIG. 88

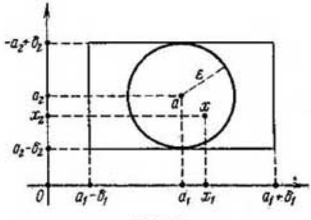



FIG. 89

Sea ahora dado un entorno rectangular $P(a; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ del punto $a$. Hagamos $\varepsilon = \min\limits_{i=1,2,\ldots,n} \delta_i$ y analicemos el entorno de bola $U(a; \varepsilon)$ de este punto (véase fig. 89). Si $x \in U(a; \varepsilon)$, entonces para cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$ en virtud de (18.10), obtenemos las desigualdades

$$|x_i - a_i| \leqslant \rho(x, a) < \varepsilon \leqslant \delta_i,$$

es decir, según la definición (18.7), $x \in P(a; \delta_1, \ldots, \delta_n)$. Ya que $x$ es un punto arbitrario de la bola $U(a; \varepsilon)$, entonces $U(a; \varepsilon) \subset P(a; \delta_1, \ldots, \delta_n)$. □

En el ejemplo de la demostración de este lema se ve bien, cómo, utilizando para mayor claridad un dibujo plano, se puede realizar la demostración en un espacio $n$-dimensional. El ejemplo contenido en el ejercicio que se propone a continuación nos previene de la utilización apresurada de las analogías, no sustentadas por demostraciones matemáticas.

Ejercicio 1. Demuéstrese que para $n = 1, 2, 3, 4$ el cubo $n$-dimensional con aristas, cuyas longitudes son iguales a la unidad, se encuentra en la bola de radio unitario y con centro en el centro del cubo, y que para $n \geqslant 5$ la afirmación análoga no se cumple.

**Definición 7.** *Supongamos que a cada número natural $m$ se le ha puesto en correspondencia cierto punto $x^{(m)} \in R^n$ (no obligatoriamente distintos puntos para distintos $m$). Entonces, el conjunto $\{x^{(m)}: m = 1, 2, \ldots\}$, compuesto por los puntos del especio $R^n$ con distintos números se denomina sucesión de puntos de este espacio y se designa por*

$$x^{(m)}, m = 1, 2, \ldots, \text{ ó } \{x^{(m)}\}.$$

*La sucesión $\{y^{(k)}\}$ se llama subsucesión de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ y se designa por*

$$x^{(m_k)}, k = 1, 2, \ldots, \text{ ó } \{x^{(m_k)}\},$$

*si para todo $k$ existe un $m_k$ tal que $y^{(k)} = x^{(m_k)}$, además si $k' < k''$, entonces $m_{k'} < m_{k''}$.*

**Definición 8.** *El punto $x \in R^n$ se denomina límite de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ y se escribe*

$$x = \lim_{m\to\infty} x^{(m)}, \quad \text{si} \quad \lim_{m\to\infty} \rho(x^{(m)}, x) = 0.$$

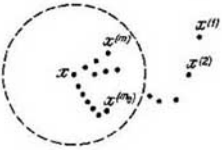



FIG. 90

*Si $x = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)}$, entonces se dice que la sucesión $\{x^{(m)}\}$ converge hacia el punto $x$. La sucesión que converge hacia cierto punto se denomina convergente.*

Utilizando el concepto de entorno, es fácil establecer que $x = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)}$ si, y sólo si, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $m_\varepsilon$ tal que para todos los $m \geqslant m_\varepsilon$ se cumple la inclusión $x^{(m)} \in U(x; \varepsilon)$. Por el lema 2, obtenemos también $x = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)}$ si, y sólo si, para cualquier entorno rectangular $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ existe un número $m_0$ (dependiente de este entorno) tal que para todos los $m \geqslant m_0$

$$x^{(m)} \in P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n). \tag{18.12}$$

Durante la definición del límite, naturalmente podemos limitarnos sólo a los entornos cúbicos.

En el caso de $n = 1$ la definición 8 se convierte en la definición habitual del límite de una sucesión numérica.

Para $n = 2$ la convergencia de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ de puntos del plano $R^2$ hacia el punto $x \in R^2$ significa, que cualquiera que sea el círculo con centro en el punto $x$, a partir de cierto número, dependiente del radio de este círculo, todos los términos de la sucesión dada se encuentran en este círculo (fig. 90). En el caso de $n = 3$ la convergencia de la sucesión de puntos $\{x^{(m)}\}$ del espacio, hacia el punto $x \in R^3$, significa, que cualquiera que sea la bola tridimensional habitual, con centro en el punto $x$, a partir de cierto número, dependiente del radio de la bola, todos los términos de la sucesión se encuentran en esta bola.

Al igual que en el caso de las sucesiones numéricas, se puede decir que $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$, $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, si cualquier $\varepsilon$-entorno del punto $x$ contiene casi todos los puntos de la sucesión dada, es decir, todos, excepto, puede ser, de un número finito de éstos.

El concepto de límite de una sucesión $\{x^{(m)}\}$ de puntos del espacio $R^n$ puede ser reducido al concepto de límite de las sucesiones numéricas, precisamente las sucesiones de las coordenadas de puntos $x^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$.

**Teorema 1.** *Para que la sucesión $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}) \in R^n, m = 1, 2, \ldots$, converja hacia el punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, es necesario y suficiente que*

$$\lim_{m \to \infty} x_i^{(m)} = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.13}$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos la necesidad de la condición (18.13). Sea $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$. Fijemos $\varepsilon > 0$ arbitrario; entonces, por (18.12) existe $m_\varepsilon$ tal que para todos los $m \geqslant m_\varepsilon$ se cumple la inclusión

$$x^{(m)} \in P(x; \varepsilon),$$

es decir, para cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$ y para $m \geqslant m_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|x_i^{(m)} - x_i| < \varepsilon,$$

y esto significa, que

$$\lim_{m \to \infty} x_i^{(m)} = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demostremos la suficiencia de la condición (18.13). Sea $\lim\limits_{m \to \infty} x_i^{(m)} = x_i, i = 1, 2, \ldots, n$, y $P(x; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ un entorno rectangular dado del punto $x$. Entonces, para cada $\varepsilon_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ existe un número $m_i = m_i(\varepsilon_i)$, tal que para todos $m \geqslant m_i$ se cumple la desigualdad

$$|x_i^{(m)} - x_i| < \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.14}$$

Designemos por $m_0$ el mayor de los números $m_1, \ldots, m_n$:

$$m_0 = \text{máx } \{m_1, \ldots, m_n\};$$

entonces para $m \geqslant m_0$ y todos los $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumplirán simultáneamente las condiciones (18.14) y por lo tanto (véase (18.7)), para $m \geqslant m_0$ tendremos la inclusión

$$x^{(m)} \in P(x; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

lo que significa, por (18.12), que

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x. \ \square$$

Del teorema 1 y de las propiedades de los límites de las sucesiones numéricas, se deduce que si una sucesión de puntos tiene límite, entonces éste es único y que toda subsucesión de una sucesión convergente, converge al mismo límite que toda la sucesión.

Ejercicio 2. Enúnciese y demuéstrese la condición necesaria y suficiente de la convergencia de la sucesión de puntos del espacio $R^n$, análoga al criterio de Cauchy para las sucesiones numéricas.

**Definición 9.** *El conjunto $E \subset R^n$ se denomina acotado, si existe un cubo n-dimensional $P(O; a)$ con centro en el origen de los ejes de coordenadas $O$, tal que $E \subset P(O; a)$.*

De forma análoga al lema 2 se demuestra que cualquiera que sea la bola $U(x; \varepsilon)$, existe un cubo $P(x; \delta)$ tal que $P(x; \delta) \supset U(x; \varepsilon)$, y viceversa, cualquiera que sea el cubo $P(x; \delta)$, existe una bola $U(x; \varepsilon)$ tal que $U(x; \varepsilon) \supset P(x; \delta)$. De aquí se deduce que se puede dar una definición de conjunto acotado equivalente a la anterior.

**Definición 9'.** *El conjunto $E \subset R^n$ se llama acotado si existe una bola n-dimensional $U(O; \varepsilon)$ tal que $E \subset U(O; \varepsilon)$.*

**Definición 10.** *La sucesión de puntos $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, se llama acotada, si el conjunto de sus valores, es decir, $\{x^{(m)}: m = 1, 2, \ldots\}$, está acotado en el espacio $R^n$.*

Si la sucesión $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}, m = 1, 2, \ldots$, es convergente, entonces está acotada, ya que cada una de las sucesiones coordenadas $x_i^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, $i$ es fijo ($i = 1, 2, \ldots, n$) en este caso, también converge y por lo tanto está acotada.

**Teorema 2.** *De cualquier sucesión acotada de puntos del espacio $R^n$ se puede extraer una subsucesión convergente.*

Este teorema, al igual que en el caso unidimensional, comúnmente se denomina *teorema de Bolzano — Weierstrass.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dada una sucesión acotada de puntos $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$, $m = 1, 2, \ldots$, del espacio $R^n$. Es evidente que cada una de las $n$ sucesiones $\{x_i^{(m)}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, también está acotada. Por esto, según el teorema de Bolzano — Weirstrass (véase el p. 3.6), la sucesión $\{x_1^{(m)}\}$ contiene una subsucesión convergente; sea ésta la sucesión $x_1^{(m_{k_1})}$, $k_1 = 1, 2, \ldots$. La sucesión $\{x_2^{(m_{k_1})}\}$ como subsucesión de la sucesión $\{x_2^{(m)}\}$ también es acotada y por lo tanto, contiene una subsucesión convergente. Sea ésta la sucesión $x_2^{(m_{k_2})}$, $k_2 = 1, 2, \ldots$. La sucesión $\{x_1^{(m_{k_2})}\}$ como subsucesión de la sucesión convergente $\{x_1^{(m_{k_1})}\}$ evidentemente también será convergente. Continuando este razonamiento, al cabo de $n$ pasos obtendremos $n$ sucesiones convergentes $\{x_i^{(m_{k_n})}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, cada una de las cuales es la subsucesión correspondiente de la sucesión $\{x_i^{(m)}\}$. Entonces, por el teorema 1, la sucesión $\{x^{(m_{k_n})}\}$ de puntos del espacio $R^n$ también será convergente. □

De forma análoga al caso unidimensional, el límite de una subsucesión de una sucesión de puntos del espacio $n$-dimensional se llama límite parcial. El teorema 2 muestra que el conjunto de los límites parciales de una sucesión de puntos de $R^n$ acotada, siempre es no vacío.

A veces resulta cómodo analizar una sucesión de puntos que tiende al infinito.

**Definición 11.** *La sucesión de puntos $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, se llama tendiente al infinito, si la distancia desde sus términos al origen de coordenadas $O = (0, 0, \ldots, 0)$ tiende al infinito, es decir, si*

$$\lim_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, O) = +\infty. \tag{18.15}$$

*En este caso se escribe*

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty.$$

Ya que para cualquier punto $a \in R^n$ en virtud de la desigualdad triangular

$$\rho(x^{(m)}, O) \leqslant \rho(x^{(m)}, a) + \rho(a, O)$$

se cumple la desigualdad

$$\rho(x^{(m)}, a) \geqslant \rho(x^{(m)}, O) - \rho(a, O)$$

entonces, cuando se cumple la condición (18.15) tenemos: $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(x^m, a) = +\infty$, es decir, si $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, entonces la distancia desde los puntos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ hasta cualquier punto dado $a \in R^n$ tiende al infinito.

Señalemos que si $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, entonces para los puntos $x^{(m)}$ existe al menos una coordenada que también tiende al infinito cuando $m \to \infty$. Efectivamente si

$\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, entonces, por ejemplo, para cada $p = 1, 2, \ldots$ existe un número $m_p$, tal que para todo $m \geqslant m_p$, se cumple la desigualdad

$$\rho(x^{(m)}, O) = \sqrt{x_1^{(m)2} + \ldots + x_n^{(m)2}} > p,$$

de donde, por (18.11) se deduce que

$$|x_1^{(m)}| + \ldots + |x_n^{(m)}| > p. \tag{18.16}$$

Por esto, para un $p$ dado se encuentra una $i$-ésima coordenada, $i = 1, 2, \ldots, n$, tal que para ella tendremos

$$|x_i^{(m)}| \geqslant \frac{p}{n}.$$

En caso contrario, es decir, si para todos los $i = 1, 2, \ldots, n$ tuviera lugar la desigualdad

$$|x_i^{(m)}| < \frac{p}{n},$$

entonces, no se cumpliría la desigualdad (18.16). El número de las coordenadas es finito, y por esto, uno de ellos, designémoslo por $i_0$, para $p = 1, 2, \ldots$ se repetirá infinitas veces, es decir, se encuentra una subsucesión $p_k$ de números naturales, tal que para todos los $m \geqslant p_k$, $k = 1, 2, \ldots$, tendremos: $|x_{i_0}^{(m)}| \geqslant p_k/n$. Ya que $\lim\limits_{k \to \infty} (p_k/n) = +\infty$, entonces para el $i_0$ señalado obtenemos

$$\lim_{m \to \infty} x_{i_0}^{(m)} = \infty.$$

Ejercicio 3. La sucesión $x^{(m)} \in R^n$ se llame no acotada si el conjunto de sus valores es no acotado. Demuéstrese que cualquier sucesión no acotada de puntos del espacio $n$-dimensional contiene una subsucesión que tiende al infinito.

## 18.2. DISTINTOS TIPOS DE CONJUNTOS

En el presente punto se analizan cuestiones, auxiliares para el estudio ulterior del análisis matemático y relacionadas con la geometría del espacio $n$-dimensional.

**Definición 12.** *Sea $X$ cierto conjunto de puntos del espacio euclídeo $R^n$. El punto $x \in X$ se denomina punto interior de este conjunto* (con respecto al espacio $R^n$), *si existe un $\varepsilon$-entorno de este punto, contenido en el conjunto $X$, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $U(x; \varepsilon) \subset X$.*

Ejercicio 4. Si la intersección $A \cap B$, $A \subset R^n$, $B \subset R^n$ contiene al menos un punto interior del conjunto $A$ como del conjunto $B$, entonces el conjunto de los puntos interiores de la intersección $A \cap B$ es no vacío.

**Definición 13.** *El conjunto cada punto del cual es un punto interior* (con respecto al espacio analizado $R^n$), *se denomina conjunto abierto.*

Se debe tener en cuenta que un mismo punto de un mismo conjunto puede ser punto interior de este conjunto respecto a un espacio, que contenga este conjunto y

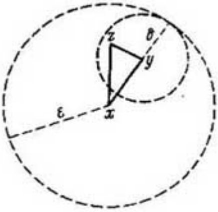



FIG. 91

no ser punto interior del conjunto analizado respecto a otro espacio que también contenga este conjunto. Analicemos, por ejemplo, el espacio $R^2_{xy}$, es decir, el plano con un cierto sistema de coordenadas cartesianas dado, las que vamos a designar por $x$ e $y$. El eje de las $x$ de este plano, como todo eje numérico, es un espacio euclídeo $R^1_x$. Cada punto de cualquier intervalo $(a, b)$ de este eje, es decir, el conjunto de puntos

$$\{(x, y): a < x < b, y = 0\}$$

del plano $R^2_{xy}$, es un punto interior de este intervalo con respecto al espacio señalado $R^1_x$ (eje de los $x$) y no es punto interior de este intervalo con respecto a todo el plano $R^2_{xy}$. De esta forma, el intervalo $(a, b)$ es un conjunto del espacio $R^1_x$ y no es conjunto abierto del espacio $R^2_{xy}$.

Una clase importante de conjuntos abiertos se establece por el siguiente lema.

**Lema 3.** *Cualquier ε-entorno $U(x; \varepsilon)$ de cualquier punto $x \in R^n$ es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado un entorno $U(x; \varepsilon)$ y sea $y \in U(x; \varepsilon)$. Hagamos

$$\delta = \varepsilon - \rho(y, x) \tag{18.17}$$

y mostremos que $U(y; \delta) \subset U(x; \varepsilon)$ (fig. 91).

Si $z \in U(y; \delta)$ y por lo tanto $\rho(z; y) < \delta$, entonces, aplicando la desigualdad triangular y (18.17), obtenemos

$$\rho(z, x) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, x) < \delta + \rho(y, x) = \varepsilon,$$

es decir, $z \in U(x; \varepsilon)$. Ya que $z$ es un punto arbitrario del conjunto $U(y; \delta)$, esto significa que $U(y; \delta) \subset U(x; \varepsilon)$. □

Los conjuntos abiertos del espacio $R^n$ serán designados en su mayoría por la letra $G$.

Ejercicio 5. Demuéstrese que el conjunto de los puntos interiores de cualquier conjunto es un conjunto abierto.

**Lema 4.** *La intersección de un número finito, al igual que la unión de cualquier colección de conjuntos abiertos, es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $G_1, G_2, \ldots, G_k$ conjuntos abiertos del espacio $R^n$. Si su intersección $\bigcap_{j=1}^{k} G_j$ es un conjunto vacío, entonces, es abierto ya que su conjunto de puntos interiores es vacío y por lo tanto coincide con la propia intersección. Si la intersección señalada no es vacía y $x \in \bigcap_{j=1}^{k} G_j$, entonces, ya que los conjuntos $G_j$ son abiertos, para cada $j = 1, 2, \ldots, k$ existe $\varepsilon_j > 0$ tal que $U(x; \varepsilon_j) \subset G_j$. Suponiendo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$, obtenemos que para cada $j$ es válida la inclusión $U(x, \varepsilon) \subset G_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Por lo tanto, $U(x; \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{k} G_j$, es decir, el punto $x$ es un punto interior de la intersección $\bigcap_{j=1}^{k} G_j$. Ya que $x$ es un punto arbitrario de esta intersección, éste es un conjunto abierto.

Sea dado ahora un sistema arbitrario de conjuntos abiertos $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, donde $\mathfrak{A}$ es un cierto conjunto de índices y $G = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha$. Demostremos que $G$ es un conjunto abierto. Efectivamente, cualquiera que sea el punto $x \in G$, existe un índice $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, tal que $x \in G_{\alpha_0}$. Ya que $G_{\alpha_0}$ es un conjunto abierto, entonces se encuentra un $\varepsilon > 0$, tal que $U(x; \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}$. Pero entonces, $U(x; \varepsilon) \subset \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha = G$, es decir, $x$ es un punto interior del conjunto $G$ y por lo tanto este conjunto es abierto. □

Resulta muy cómoda la siguiente definición.

**Definición 14.** *Cualquier conjunto abierto que contenga un punto se denomina su entorno.*

El entorno del punto $x$ será designado habitualmente por $U = U(x)$, tal vez con uno u otro índice, a veces, como en el caso unidimensional, por otras letras, por ejemplo, $V$, $W$.

OBSERVACIÓN. En cualquier entorno $U(x)$ del punto $x$, evidentemente se contiene tanto un entorno de bola como un entorno rectangular de este punto. Más aún, entendiendo entorno de un punto en el sentido de la definición 14 se conserva también el análogo de la propiedad (18, 12), es decir, el punto $x$ es límite de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ si y sólo si para cada uno de sus entornos $U(x)$ existe un número $m_0$, tal que para todos los $m \geqslant m_0$ se cumple la inclusión $x^{(m)} \in U(x)$.

**Definición 15.** *El punto $x \in R^n$ se denomina punto de adherencia del conjunto $E \subset R^n$, si cualquier entorno de este punto contiene al menos un punto del conjunto $X$.*

Es evidente que cada punto del conjunto $X$ es adherente de este conjunto, ya que cualquier entorno del punto $x \in X$ contiene el propio punto $x$. Al mismo tiempo pueden existir, naturalmente, puntos adherentes del conjunto dado, que no pertenezcan a éste (por ejemplo, los extremos del intervalo en la recta son sus puntos adherentes).

Ejercicio 6. Demuéstrese que para que el punto $x \in R^n$ sea un punto adherente del conjunto $X \subset R^n$, es necesario y suficiente que exista la sucesión de puntos $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, tal que $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$.

**Definición 16.** *Si para el punto $x \in X$ existe un entorno que no contenga otros puntos del conjunto $X$, excepto el propio punto $x$, entonces este punto se denomina punto aislado del conjunto $X$.*

**Definición 17.** *El punto $x \in R^n$ se denomina punto de acumulación del conjunto $X$, si cualquier entorno del punto $x$ contiene al menos un punto del conjunto $X$ diferente de $x$.*

Es evidente que un punto de acumulación es un punto adherente.

Ya nos encontramos con los conceptos de puntos de adherencia, de acumulación y aislados en el caso unidimensional (véanse el p. 5.4 y el p. 5.5). Recordemos algunos de sus propiedades.

Para cualquier punto adherente $x_0$ del conjunto $X$ o bien existe un entorno, que contiene sólo un punto de $X$ (en este caso este punto es el propio punto $x_0$), o bien este entorno no existe, es decir, en cada entorno del punto $x_0$ se tienen al menos dos puntos del conjunto $X$ (por lo tanto, al menos uno de estos puntos es diferente de $x_0$). Por esto, cualquier punto adherente del conjunto $X$ es o bien un punto aislado o bien un punto de acumulación de este conjunto (en el último caso, este punto puede pertenecer o no al propio conjunto).

Si $x^{(0)}$ es un punto de acumulación del conjunto $X \subset R^n$, entonces existe una sucesión de puntos $x^{(m)} \in X$ tales que $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x^{(0)}$, $x^{(m')} \neq x^{(m)} \neq x^{(0)}$, $m \in N$, $m' \in N$, $m \neq m'$, es decir, la sucesión $\{x^{(m)}\}$ está compuesta por diferentes puntos del conjunto $X$, distintos del punto $x^{(0)}$, y converge a este punto. En realidad, por cuanto $x^{(0)}$ es un punto de acumulación del conjunto $X$, entonces, para el entorno $U(x^{(0)}, 1)$ existe un punto, denotémoslo por $x^{(1)}$, tal que $x^{(1)} \in U(x^{(0)}, 1) \cap X$ y $x^{(1)} \neq x^{(0)}$. Sea $\delta_1 = \min\{1/2, \rho(x^{(0)}, x^{(1)})\}$. Para el entorno $U(x^0, \delta_1)$ se encuentra un punto, denotémoslo por $x^{(2)}$, tal que $x^2 \in U(x^{(0)}, \delta_1) \cap X$, $x^{(2)} \neq x^{(0)}$ y $x^{(2)} \neq x^{(1)}$. Continuando este proceso, obtendremos la sucesión buscada.

De lo demostrado se deduce que cualquier entorno de un punto de acumulación de un conjunto contiene una cantidad infinita de puntos de este conjunto (por ejemplo, son puntos de la sucesión construida anteriormente).

Ejemplos. Sean $n = 1$, $X = (0, 1)$ un intervalo. Cada punto del segmento $[0, 1]$ es un punto adherente y un punto de acumulación del conjunto $X$, al mismo tiempo que los puntos 0 y 1 no pertenecen al propio conjunto $X$. Si $X = [0, 1]$ es un segmento, entonces el conjunto de puntos adherentes del conjunto $X$ coincide con el propio conjunto. Por último, si el conjunto $X$ está compuesto por el intervalo $(0, 1)$ y por el punto 2, es decir, $X = (0, 1) \cup \{2\}$, entonces, el punto 2 es un punto aislado de este conjunto, y el conjunto de puntos adherentes de éste será $[0, 1] \cup \{2\}$.

**Definición 18.** *La colección de todos los puntos adherentes del conjunto $X \subset R^n$ se denomina clausura del conjunto $X$ y se designa por $\bar{X}$*

Como ya se ha señalado, cada punto del conjunto $X$ es un punto adherente de éste, por esto

$$X \subset \bar{X} \tag{18.18}$$

**Definición 19.** *El conjunto $X$ se llama cerrado si $\bar{X} = X$, es decir, si contiene todos sus puntos adherentes.*

Por ejemplo, para $n = 1$ el intervalo $(0, 1)$ no es un conjunto cerrado, y el segmento $[0, 1]$ es un conjunto cerrado.

Todo el espacio y el conjunto vacío son al mismo tiempo conjuntos cerrados y abiertos en $R^n$ (verifíquese). Se puede mostrar que en el espacio $R^n$ no existen otros cerrados y abiertos al mismo tiempo.

Ya que cualquier punto adherente de un conjunto es o bien un punto de acumulación de éste, o bien un punto aislado, y un punto aislado, como se deduce de su definición, pertenece al conjunto, entonces, la exigencia de pertenencia de cada punto adherente al conjunto es equivalente a exigir la pertenencia a este conjunto de cada uno de sus puntos de acumulación. Dicho de otra forma, *un conjunto es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.*

*Ejercicio 7.* Sea $X \subset R^k \subset R^n$. Demuéstrese que $x \in R^n$ es un punto adherente del conjunto $X$ en el espacio $R^n$ si y sólo si pertenece al espacio $R^k$ y es en él un punto adherente del conjunto $X$.

De aquí se deduce que el conjunto $X$ es un conjunto cerrado del espacio $R^k$ si y sólo si es un conjunto cerrado del espacio $R^n$. De esta forma, la propiedad de un conjunto de ser cerrado en un cierto espacio $R^n$ es una propiedad "interna" de éste, es decir, una propiedad que no depende de la elección del espacio $R^n$, en el cual se encuentra el conjunto analizado. Como se ha señalado anteriormente, la propiedad de un conjunto de ser abierto no es una propiedad "interna" en el sentido señalado, un mismo conjunto puede ser abierto en un espacio $R^n$ y no ser abierto en otro.

Señalemos la siguiente propiedad evidente de los conjuntos abiertos.

*Si $A$ es un conjunto cerrado, y $\{x^{(m)}\}$ es una sucesión convergente, todos los términos de la cual pertenecen al conjunto $A$: $x^{(m)} \in A$, $m = 1, 2, \ldots$, entonces, su límite también pertenece al conjunto $A$.*

En efecto, si $x^{(0)} = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)}$, entonces de la definición de límite de una sucesión de puntos se deduce que en cualquier entorno del punto $x^{(0)}$ se tienen puntos de la sucesión dada (y más aún, allí se encuentran casi todos los puntos de la sucesión, es decir, todos a excepción de un número finito de ellos), que son, según nuestra suposición, puntos del conjunto $A$. De esta forma, el punto $x^{(0)}$ es un punto adherente del conjunto $A$ y ya que $A$ es cerrado, entonces $x^{(0)} \in A$.

**Lema 5.** *Un punto adherente de la clausura de un conjunto es también punto adherente del propio conjunto.*

**Corolario.** *La clausura de cualquier conjunto es un conjunto cerrado.*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Sean $X \subset R^n$, $\bar{X}$ la clausura del conjunto $X$ y $x$ un punto adherente del conjunto $\bar{X}$, es decir, $x \in \bar{\bar{X}}$. Demostremos que $x \in \bar{X}$.

De la condición $x \in \bar{\bar{X}}$ se deduce que a cualquier entorno $U = U(x)$ del punto $x$ pertenece, al menos, un punto y del conjunto $\bar{X}$: $y \in U \cap \bar{X}$. Ya que $U$, como cualquier entorno, es un conjunto abierto, entonces es también un entorno que contiene el punto $y$. Pero $y \in \bar{X}$, por lo tanto, en cualquier entorno del punto $y$, en particular, en $U$, se tiene un punto $z$ del conjunto $X$: $z \in U \cap X$.

De esta forma, en cualquier entorno $U$ del punto $x \in \bar{\bar{X}}$ se tiene un punto de $X$. Esto significa que $x$ es un punto adherente del conjunto $X$: $x \in \bar{X}$. □

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. En el lema 5 se demostró que

$$\bar{\bar{X}} \subset \bar{X},$$

y ya que por (18.18), $\bar{X} \subset \bar{\bar{X}}$, entonces

$$\bar{\bar{X}} = \bar{X}. \tag{18.19}$$

Ejemplos 1. Toda bola $n$-dimensional

$$Q^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n): \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < r^2\} \tag{18.20}$$

es un conjunto abierto (véase el lema 1), por esto, con frecuencia se llama también *bola n-dimensional abierta.* El conjunto

$$\bar{Q}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n): \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \leqslant r^2\} \tag{18.21}$$

es cerrado, ya que las desigualdades no estrictas se conservan durante el paso al límite. El es la clausura de la bola abierta $Q^n$ y se llama *bola n-dimensional cerrada.* En el caso cuando $n = 2$: $Q^2$ es un círculo abierto, $\bar{Q}^2$ es círculo cerrado; en el caso cuando $n = 1$: $Q^1$ es un intervalo, $\bar{Q}^1$ es un segmento.

2. La bola cerrada $\bar{Q}^n$ se obtiene de la bola abierta $Q^n$ al añadirle el conjunto

$$\{x = (x_1, \ldots, x_n): \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2\},$$

que se llama *esfera* $(n - 1)$*-dimensional de radio r con centro en el punto* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y que se designa por $S^{n-1}$. En el caso cuando $n = 2$: $S^1$ es una circunferencia, en el caso cuando $n = 1$: $S^0$ es un par de puntos.

La esfera

$$S^{n-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_n): \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2\} \tag{18.22}$$

también es un ejemplo de conjunto cerrado (¿por que?).

Señalemos también, que la bola $n$-dimensional de radio 1 con centro en el origen de coordenadas, habitualmente se denomina *bola n-dimensional unitaria* (abierta o cerrada), y la esfera $(n - 1)$-dimensional de radio 1 con centro en el origen de coordenadas, esfera $(n - 1)$-dimensional unitaria.

**Definición 20.** *Para cualquier conjunto* $X \subset R^n$, *el conjunto* $R^n \setminus X$ *se llama su complemento en el espacio* $R^n$ (véase el p. 1.1).

**Lema 6.** *Para que un conjunto sea abierto, es necesario y suficiente que su complemento sea cerrado.*

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea $G$ un conjunto abierto. Entonces, ningún punto $x \in G$ es punto adherente de su complemento $F = R^n \setminus G$, ya que el conjunto $G$, siendo avierto, es un entorno del punto $x$ y no contiene puntos del conjunto $F$. Por lo tanto, todos los puntos adherentes del conjunto $F$ se encuentran en $F$, lo que significa que el conjunto $F$ es cerrado.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea $F$ un conjunto cerrado y sea $x \in G = R^n \setminus F$. Ya que $F$ es cerrado, el punto $x$ no es su punto adherente, por esto, existe un entorno de él $U(x)$, que no se interseca con el conjunto $F$ y por lo tanto tal que $U(x) \subset G$. De esta forma, cualquier punto del conjunto $G$ es interno, es decir, $G$ es abierto. □

**Corolario 1.** *Un conjunto es cerrado si y sólo si su complemento es abierto.*

Esto se deduce inmediatamente del lema 6, ya que si el conjunto $B$ es el complemento del conjunto $A$ en $R^n$, es decir, $B = R^n \setminus A$, entonces también viceversa, el conjunto $A$ es el complemento de $B$ en $R^n$: $A = R^n \setminus B$.

**Corolario 2.** *La intersección de cualquier colección y la unión de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

En efecto, sea $F_\alpha$ conjuntos cerrados, entonces, por el lema 6, los conjuntos $G_\alpha = R^n \setminus F_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, son abiertos. Por la fórmula (1.1) tenemos:

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcap_\alpha (R^n \setminus G_\alpha) = R^n \setminus \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

El conjunto $\bigcup_\alpha G_\alpha$, por el lema 4, es abierto, como unión de conjuntos abiertos. Por lo tanto, su complemento $\bigcap_\alpha F_\alpha = R^n \setminus \bigcup_\alpha G_\alpha$, por el lema 6 es cerrado.

De forma análoga, con ayuda de la fórmula (1.2), se demuestra que es cerrada la unión de un número finito de conjuntos cerrados. □

Ejercicio 8. Demuéstrese que si $G$ es un conjunto abierto y $F$ es cerrado, $G \subset R^n$, $F \subset R^n$, entonces $G \setminus F$ es un conjunto abierto.

**Lema 7.** *Sean $A$ y $B$ conjuntos cerrados disjuntos de $R^n$ y el conjunto $A$ acotado; entonces, existe un número $d > 0$, tal que para dos puntos cualesquiera $x \in A$ e $y \in B$ se cumple la desigualdad $\rho(x, y) \geqslant d$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que tal número $d$ no existe. Entonces, para cualquier $m = 1, 2, \ldots$ existe un par de puntos $x^{(m)} \in A$ e $y^{(m)} \in B$ tales que $\rho(x^{(m)}, y^{(m)}) < \frac{1}{m}$. Por cuanto $A$ es un conjunto acotado, entonces de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ se puede extraer una subsucesión convergente $\{x^{(m_k)}\}$. Sea $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$. Ya que el conjunto $A$ es cerrado, tenemos $x^{(0)} \in A$. De la desigualdad

$$\rho(x^{(0)}, y^{(m_k)}) \leqslant \rho(x^{(0)}, x^{(m_k)}) + \rho(x^{(m_k)}, y^{(m_k)}) < \rho(x^{(0)}, x^{(m_k)}) + \frac{1}{m}$$

se deduce que $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(x^{(0)}, y^{(m_k)}) = 0$. Por esto, el punto $x^{(0)}$ es un punto adherente del conjunto $B$ y ya que es cerrado, $x^{(0)} \in B$. De esta forma, $x^{(0)} \in A$ y $x^{(0)} \in B$, y esto contradice la condición de que $A$ y $B$ son disjuntos. □

**Definición 21.** *Para dos conjuntos $X_1$ y $X_2$ la magnitud*

$$\rho(X_1, X_2) = \inf_{\substack{x \in X_1 \\ y \in X_2}} \rho(x, y)$$

*se llama distancia entre $X_1$ y $X_2$.*

*En particular, si $X_1$ está compuesto por un punto x, entonces $\rho(X_1, X_2) = \rho(x, X_2)$ se denomina la distancia desde el punto x hasta el conjunto $X_2$.*

Utilizando este término, el lema 7 puede ser enunciado de la siguiente forma. *Si dos conjuntos cerrados son disjuntos y al menos uno de ellos es acotado, entonces la distancia entre ellos es positiva.*

Ejercicio 9. Cítese un ejemplo de dos conjuntos cerrados disjuntos, para los cuales la distancia entre ellos es igual a cero.

**Lema 8.** *Si A es un conjunto cerrado, $A \subset R^n$, $x \in R^n$ y $\rho(x, A) = d$, entonces existe un punto $y \in A$ tal que $\rho(x, y) = d$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \rho(x, y) = d$, entonces para cualquier $m = 1, 2, \ldots$ se encuentra un punto $y^{(m)} \in A$, tal que $\rho(x, y^{(m)}) < d + \frac{1}{m}$. Es evidente, que para cada $m$ es válida la inclusión $y^{(m)} \in U(x, d + 1)$, y por esto, la sucesión $\{y^{(m)}\}$ está acotada y, por consiguiente, de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\{y^{(m_k)}\}$. Sea $\lim\limits_{k \to \infty} y^{(m_k)} = y^{(0)}$. Ya que el conjunto $A$ es cerrado, tenemos $y^{(0)} \in A$; más aún,

$$\rho(x, y^{(0)}) \leqslant \rho(x, y^{(m_k)}) + \rho(y^{(m_k)}, y^{(0)}) < d + \frac{1}{m_k} + \rho(y^{(m_k)}, y^{(0)}).$$

Pasando al límite aquí, cuando $k \to \infty$, obtenemos $\rho(x, y^{(0)}) \leqslant d$. Por otra parte $\rho(x, y^{(0)}) \geqslant \rho(x, A) = d$, por lo tanto $\rho(x, y^{(0)}) = d$. □

**Definición 22.** *El punto $x \in R^n$ se llama punto frontera del conjunto $x \subset R^n$, si en cualquiera de sus entornos existen puntos que pertenecen al conjunto X y puntos que no pertenecen a ésta. El conjunto de todos los puntos frontera del conjunto X se llama su frontera y se designa por $\partial X$.*

Es evidente, que $\partial X \subset \overline{X}$. Cada uno de los puntos adherentes del conjunto $X$ o bien es un punto frontera de éste o bien es un punto interno de éste, otras posibilidades no hay, por esto $\overline{X} = X \cup \partial X$.

Si $G$ es un conjunto abierto, entonces, en la unión $\overline{G} = G \cup \partial G$ $G$ y $\partial G$ no se intersecan.

En efecto, ya que $G$ es un conjunto abierto, todo punto de éste es interno y de esta forma no pertenece a su frontera.

Ejemplos. Sea $n = 2$, $Q^2 = \{(x_1, x_2): x_2^1 + x_2^2 < 1\}$ un círculo abierto. Si $X = Q^2$, entonces cualquier punto de la circunferencia $S^1 = \{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ es un punto frontera del conjunto $X$ y no hay otros puntos frontera, es decir, $S^1 = \partial X$. En este caso, la frontera del conjunto $X$ no pertenece a él.

Sea $X = \overline{Q}^2$ un círculo cerrado, y en este caso, la circunferencia $S^1$ es también forntera para $X$, además, ahora $\partial X \subset X$.

Por último, si $X = S^1$ es una circunferencia, entonces cada punto del conjunto $X$ es su punto frontera y no tiene otros puntos frontera, es decir, $X = \partial X$.

En general, la esfera $(n - 1)$-dimensional (18.22) es frontera tanto de la bola abierta $n$-dimensional (18.20), como de la cerrada (18.21), así como también coincide con su propia frontera (¿por que?).

Ejercicios. 10. Demuéstrese que para que el conjunto $A \subset R^n$ sea cerrado es necesario y suficiente que $\partial A \subset A$.

11. Demuéstrese que $\overline{\partial X} = \partial X$.

En el futuro nos hará falta el concepto de curva en el espacio $n$-dimensional. Para este objetivo vamos a generalizar la definición dada anteriormente, de curva en el espacio tridimensional, sin tocar la cuestión de la transformación de los parámetros.

**Definición 23.** *El conjunto de puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ del espacio $R^n$, cuyas coordenadas están dadas como funciones continuas $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, definidas sobre cierto segmento $[a, b]$, se llama curva continua en el espacio $R^n$. El argumento $t$ se llama parámetro de la curva. El punto $x(a) = (x_1(a), \ldots, x_n(a)$ se llama origen y el punto $x(b) = (x_1(b), \ldots, x_n(b))$ se llama extremo de la curva dada.*

Todo lo dicho en los p. 16.1 y 16.2 sobre una curva en el espacio tridimensional puede ser trasladado de una forma natural para el caso general $n$-dimensional, pero no vamos a detenernos en esto. Es importante para el futuro el concepto de recta en el espacio $n$-dimensional.

**Definición 24.** *Sean $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in R^n$* y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algunos números dados $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$. *El conjunto de los puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$* del espacio $R^n$, *cuyas coordenadas son representables en la forma*

$$x_i = x_i^{(0)} + \alpha_i t, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad -\infty < t < +\infty,$$

*se llama recta en el espacio $R^n$, que pasa por el punto $x^{(0)}$.*

La parte de la recta, que corresponde a la variación del parámetro $t$ en cierto segmento $[a, b]$, se llama *segmento rectilíneo* (recto), y su parte que corresponde a la variación del parámetro en el intervalo infinito $t \geqslant a$, se llama *rayo*. Es evidente, que en el caso cuando $n = 3$, se obtiene una recta, correspondientemente un segmento o un rayo, en el espacio tridimensional habitual, y $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ es el vector director de esta recta. Si son dados dos puntos distintos $(x'_1, \ldots, x'_n)$ y $(x''_1, \ldots$ $\ldots, x''_n)$, entonces la ecuación de la recta que pasa por estos puntos tiene la forma

$$x_i = x_i' + (x_i'' - x_i')t; \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad -\infty < t < +\infty.$$

**Definición 25.** *El conjunto $X \subset R^n$, dos puntos cualesquiera del cual pueden ser unidos por una curva continua que pertenezca completamente a este conjunto se llama linealmente conexo* *).

Dicho de otra forma, el conjunto $X$ se llama linealmente conexo si cualesquiera que sean los puntos $x^{(1)} \in X$ y $x^{(2)} \in X$, existe una curva continua $x(t) = \{x_i(t); \alpha \leqslant t \leqslant b\}$ tal que su origen es el punto $x^{(1)}$, es decir $x(a) = x^{(1)}$, y su extremo el punto $x^{(2)}$, es decir, $x(b) = x^{(2)}$, y todos los puntos de esta curva pertenecen al conjunto $X$, es decir, $x(t) \in X$ para todos los $t \in [a, b]$.

*) Además del concepto de conexión lineal en matemática existe el concepto de conexión del conjunto, el cual no se analiza en nuestro curso.

FIG. 92

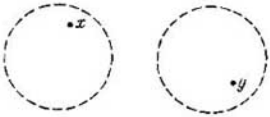


FIG. 93

Ejemplos de conjuntos linealmente conexos son el punto, el segmento y ejemplo de conjunto linealmente no conexo: un par de puntos diferentes.

**Lema 9.** *Si un conjunto linealmente conexo se interseca con un cierto conjunto y con su complemento en $R^n$, entonces también se interseca con la frontera de este conjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A$ un conjunto linealmente conexo, $A \subset R^n$, $B$ un cierto conjunto, $B \subset R^n$, y sean las intersecciones $A \cap B$ y $A \cap (R^n \setminus B)$ no vacías. Sean $x^{(1)} \in A \cap B$ y $x^2 \in A \cap (R^n \setminus B)$. Ya que $A$ es un conjunto linealmente conexo, entonces existe una curva continua $x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ tal que $x(a) = x^{(1)}$, $x(b) = x^{(2)}$ y $x(t) \in A$ para todos los $t \in [a; b]$. Designemos por $\tau$ la cota superior de aquellos $t \in [a, b]$, para los cuales $x(t) \in B$. Es evidente que $a \leqslant \tau \leqslant b$. En cualquier entorno del punto $x(\tau)$ se contienen tanto puntos que pertenecen a $B$ como puntos que no pertenecen a $B$ (¿por que?). Por lo tanto, $x(\tau) \in \partial B$. Ya que $x(\tau) \in A$, la intersección $\partial B \cap A$ no es vacía. □

**Definición 26.** *Un conjunto abierto linealmente conexo se llama región.* [*)]

Ejemplos. En el caso de $n = 1$ cualquier intervalo es una región, y el conjunto compuesto por dos o más intervalos disjuntos (fig. 92) aunque representa un conjunto abierto no es una región.

En el caso cuando $n = 2$ todo círculo abierto es una región, y el conjunto compuesto por dos o más círculos abiertos disjuntos (fig 93), aunque también es abierto no es una región ya que dos puntos $x$ e $y$, que pertenecen a distintos círculos, no pueden ser unidos con una curva continua que pertenezca completamente al interior del conjunto analizado.

Toda bola abierta $n$-dimensional es una región.

**Definición 27.** *La región, dos puntos cualesquiera de la cual pueden ser unidos por un segmento que pertenezca completamente a ella se llama región convexa.*

Toda bola abierta $n$-dimensional es una región convexa.

**Definición 28.** *El conjunto, que pertenece al espacio $R^n$ y que es la clausura de cierta región, se llama región cerrada.*

La bola cerrada $n$-dimensional es una región cerrada.

Ejercicios. 12. Demuéstrese que la bola $n$-dimensional y un paralelepípedo $n$-dimensional son conjuntos convexos.

13. Constrúyase un ejemplo de región no convexa.

---

[*)] No se debe mezclar el concepto de dominio de definición de una función y el concepto de región en el sentido de esta definición.

**Problema 15 (teorema de Jordan [*])**. Demuéstrese que cualquier contorno sencillo (véase el p. 16.1) en el plano divide el plano en dos regiones (acotada y no acotada): esto significa, en primer lugar, que es frontera de cada una de estas regiones, en segundo lugar, que ningunos dos puntos pertenecientes a cada una de las regiones señaladas puedan ser unidos por una curva que no interseque el contorno dado.

## 18.3. COMPACTOS

En este punto serán analizadas ciertas propiedades de los conjuntos, que se llaman compactos y que juegan un papel importante en el análisis.

**Definición 29.** *El conjunto $A \subset R^n$ se llama compacto si de cualquier sucesión de puntos de conjunto se puede extraer una subsucesión convergente cuyo límite pertenece al conjunto $A$.*

Una propiedad importante, que caracteriza a los compactos en $R^n$, es establece por el siguiente teorema.

**Teorema 3.** *Para que el conjunto $X \subset R^n$ sea compacto, es necesario y suficiente que éste sea acotado y cerrado.*

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea $A \subset R^n$ y $A$ compacto. Si el conjunto $A$ fuese no acotado, entonces, para cualquier número natural $m$ se encontraría un punto $x^{(m)} \in A$, tal que $\rho(O, x^{(m)}) > m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Aquí, como siempre, $O = (0, 0, \ldots, 0)$. Es evidente, que $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$. Por esto, cualquier subsucesión de la sucesión $x^{(m)}$ también tiene como límite, y por lo tanto, de $x^{(m)}$ no se puede elegir una subsucesión convergente, lo que contradice el hecho de que $A$ es compacto. De esta forma $A$ es un conjunto acotado.

Si el conjunto $A$ no fuese cerrado, entonces existiría un punto adherente $x$ que no pertenecería a él, $x \notin A$. Para este punto se encontraría una sucesión $x^{(m)} \subset A$, $m = 1, 2, \ldots$, tal que $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$. Por esto, cualquier subsucesión de esta sucesión también tendría como límite un punto $x \notin A$, es decir, el conjunto $A$ otra vez no sería compacto. Por lo tanto, $A$ es un conjunto cerrado.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea $X$ un conjunto cerrado acotado y $\{x^{(m)}\}$ una subsucesión cualquiera de puntos de este espacio: $x^{(m)} \in X$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Ya que el conjunto $X$ es acotado, esta sucesión también es acotada. Por lo tanto, según el teorema 2 del p. 18.1, de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\{x^{(m_k)}\}$. Designemos su límite por $x$: $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x$. Es evidente que $x$ es un punto adherente del conjunto $X$, o sea, $x^{(m_k)} \in X$, y ya que $X$ es un conjunto cerrado, entonces, $x \in X$, es decir, $X$ efectivamente es compacto. □

El teorema demostrado permite establecer fácilmente la compacticidad de muchos conjuntos que se encuentran con frecuencia, por ejemplo, los segmentos, las bolas cerradas y los paralelepípedos, las esferas en los espacios $R^n$ de cualquier dimensión, todos los conjuntos enumerados al ser acotados y cerrados son compactos. Con la misma facilidad, con ayuda del teorema 3 se establece también la no compacticidad de muchos conjuntos. Por ejemplo, los intervalos finitos, al no ser cerrados, y los infinitos al no ser conjuntos acotados, no son compactos.

---

[*] C. Jordan (1838—1892), matemático francés.

Señalemos que también según el teorema 3, el lema 7 del p. 18.2 puede ser enunciado de la forma siguiente: *si dos conjuntos cerrados no se intersecan y si al menos uno de ellos es compacto, entonces la distancia entre ellos es mayor que cero.*

Antes de pasar a otras propiedades características de los compactos, introduciremos una serie de definiciones y demostraremos una afirmación complementaria.

La sucesión de cubos $n$-dimensionales $\{Q_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, se llama *sucesión de cubos encajados* si

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_k \supset Q_{k+1} \supset \ldots$$

**Lema 10.** *Para la sucesión de cubos cerrados y encajados $\{Q_k\}$, cuyas longitudes de las aristas tienden a cero, cuando $k \to \infty$, existe un punto, y sólo uno, que pertenece a todos los cubos de la sucesión analizada.*

DEMOSTRACIÓN. Sean los cubos

$$Q_k = \{x = (x_i): a_i^{(k)} \leqslant x_i \leqslant a_i^{(k)} + d^{(k)};\ i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{18.23}$$

con aristas de longitud $d^{(k)}$, que forman una sucesión de cubos encajados *) y sea $\lim\limits_{k\to\infty} d^{(k)} = 0$. Entonces, los segmentos $[a_i^k, a_i^k + d_i^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, forman un sistema de segmentos encajados, cuyas longitudes $d_i^{(k)}$ tienden a cero cuando $k \to \infty$. Por esto, existen y además son únicos, los números $\xi_i$ tales que para un $i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) dado y para cualquier $k = 1, 2, \ldots$, tiene lugar la inclusión $\xi_i \in [a_i^k, a_i^k + d^{(k)}]$. De aquí se deduce que el punto $\xi = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$ pertenece a todos los cubos de la sucesión analizada $\xi \in Q_k$, $k = 1, 2, \ldots$ y este punto es único.

**Definición 30.** Sea $X \subset R^n$. El sistema

$$\Omega = \{X_\alpha\}, \alpha \in \mathfrak{A} \tag{18.24}$$

de conjuntos $X_\alpha \subset R^n$ ( $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ es un conjunto de índices $\alpha$) se llama *recubrimiento del conjunto $X$*, si

$$X \subset \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} X.$$

De esta forma, el sistema (18.24) se llama recubrimiento del conjunto $X$, si cada uno de los puntos de este conjunto pertenece al menos a uno de los conjuntos $X_\alpha$ del sistema $\Omega$.

El recubrimiento (18.24) del conjunto $X$, compuesto por un número finito de conjuntos $X_\alpha$, se llama *recubrimiento finito de este conjunto*.

En el caso, cuando todos los conjuntos del sistema $\Omega$ son abiertos, el recubrimiento $\Omega$ se llama *recubrimiento abierto del conjunto $X$*.

**Teorema 4.** *Para que el conjunto $X \subset R^n$ sea compacto, es necesario y suficiente que de cualquiera de sus recubrimientos abiertos se pueda extraer un recubrimiento finito.*

---

*) Recordemos que acordamos (véase el p. 18.1) entender siempre por cubo sólo los cubos que estuvieran dados por desigualdades de la forma (18.23) para un sistema de coordenadas dado.

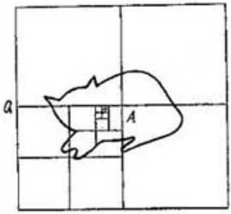



FIG. 94

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea $A$ compacto y sea el sistema

$$\Omega = \{G_\alpha\}, \quad \alpha \in \mathfrak{A} \tag{18.25}$$

un recubrimiento abierto de $A$. Supongamos que de este recubrimiento no se puede extraer un recubrimiento finito del compacto $A$. Según el teorema 3 del hecho de que el conjunto $A$ es compacto se deduce que es acotado. Por esto, existe un cubo cerrado $Q$, que contiene el conjunto $A$.

Sea

$$Q = \{x = (x_i): a_i \leqslant x_i \leqslant a_i + d, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Dividamos el cubo $Q$ en $2^n$ cubos cerrados iguales $Q_j$, definidos por el juego de las $n$ desigualdades de la forma

$$a_i + \frac{d}{2} \leqslant x_i \leqslant a_i + d \qquad \text{o} \qquad a_i \leqslant x_i \leqslant a_i + \frac{d}{2}$$

(en la fig. 94 se muestra el caso cuando $n = 2$), entonces

$$Q = \bigcup_{j=1}^{2^n} Q_j. \tag{18.26}$$

El sistema (18.25) forma un recubrimiento abierto de cada uno de los conjuntos $A \cap Q_j$ ($j = 1, 2, \ldots, 2^n$). Entre estos conjuntos existe un conjunto no vacío — designémoslo por $A \cap Q_{j_1}$ — tal que del recubrimiento (18.25) no se puede extraer un recubrimiento finito de este conjunto, en el caso contrario, del sistema (18.25) se podría, en virtud de la igualdad (18.26), extraer también un recubrimiento finito de todo el conjunto $A$, lo que estaría en contradicción con la suposición hecha.

Dividamos otra vez el cubo $Q_{j_1}$ en $2^n$ cubos cerrados iguales $Q_{j_1 j}$ ($j = 1, 2, \ldots, 2^n$). Designemos por $Q_{j_1 j_2}$ aquel de los cubos $Q_{j_1 j}$, cuya intersección con el compacto $A$ no pueda ser recubierta con un número finito de conjuntos del sistema $\Omega$, etc. Como resultado, obtenemos una sucesión de cubos cerrados encajados

$$Q_{j_1} \supset Q_{j_1 j_2} \supset \ldots \supset Q_{j_1 j_2 \ldots j_k} \supset \ldots, \tag{18.27}$$

las longitudes de los cuales son respectivamente iguales a $d/2, d/4, \ldots, d/2^k, \ldots$, y por lo tanto, tienden a cero, cuando $k \to \infty$.

Cada uno de los cubos $Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ de la sucesión (18.27) tiene la propiedad de que del sistema (18.25) no se puede extraer un recubrimiento finito del conjunto no vacío

$$A \cap Q_{j_1 j_2 \ldots j_k},$$

$j_\nu$ toma uno de los valores $1, 2, 3, \ldots, 2^n$;
$\nu = 1, 2, \ldots, k$; $k = 1, 2, \ldots$. Por el lema 10 existe, y además es único, un punto, que pertenece a todos los cubos del sistema (18.27). Ya que las aristas de los cubos de este sistema tienden a cero y cada uno de los cubos tiene una intersección no vacía con el conjunto $A$, entonces en cualquier entorno del punto $\xi$ se tienen puntos del conjunto $A$. Efectivamente, señalemos que la diagonal del cubo $Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ es igual a $d\sqrt{n}/2^k$. Más adelante, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ elegimos $k_0$ tal que

$$d\sqrt{n}/2^{k_0} < \varepsilon. \tag{18.28}$$

Esto es posible, ya que $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{d\sqrt{n}}{2^k} = 0$. Ahora, observando que cualquier punto $x \in Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$ se encuentra del punto $\xi \in Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$ a una distancia, que no sobrepasa a la diagonal del cubo $Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$ tendremos

$$\rho(x, \xi) \leqslant \frac{d\sqrt{n}}{2^{k_0}} < \varepsilon.$$

Esto significa que $x$ se encuentra en un $\varepsilon$-entorno del punto $\xi$. Por lo tanto, todo el cubo $Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$, incluso sus puntos pertenecientes al conjunto $A$, está contenido en el $\varepsilon$-entorno del punto $\xi$ analizado. De esta forma, $\xi$ es un punto adherente del conjunto $A$. Por el teorema 3, el conjunto $A$, siendo compacto, es cerrado y por esto $\xi \in A$.

La sucesión auxiliar de cubos construida (18.27) permite demostrar fácilmente la imposibilidad de que se cumpla la suposición hecha de que del recubrimiento (18.25) del compacto $A$ no se puede extraer un recubrimiento finito de este compacto. En efecto, ya que el sistema (18.25) es un recubrimiento del conjunto $A$, entonces existe un índice $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, tal que $\xi \in G_{\alpha_0}$. El conjunto $G_{\alpha_0}$ es abierto, por lo tanto, se encuentra un número $\varepsilon > 0$ tal que el $\varepsilon$-entorno $U(\xi, \varepsilon)$ del punto $\xi$ estará completamente contenido en $G_{\alpha_0}$:

$$U(\xi, \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}. \tag{18.29}$$

Observemos ahora, que para cualquier $\varepsilon > 0$, en particular, para $\varepsilon$, que satisfaga la condición (18.29), se encuentra, como se ha mostrado con anterioridad, un número $k_0$ tal que se cumplirá la inclusión

$$Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}} \subset U(\xi, \varepsilon). \tag{18.30}$$

De (18.29) y (18.30) tenemos

$$A \cap Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}} \subset Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}} \subset U(\xi, \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}$$

y, por lo tanto, del sistema (18.25) se puede extraer un recubrimiento finito del conjunto $A \cap Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$, y precisamente un recubrimiento compuesto solamente por el conjunto $G_{\alpha_0}$. Esto contradice el supuesto, en correspondencia con el cuál fueron elegidos los cubos $Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}$. De esta forma, al suponer que del sistema (18.25) no se extrae un recubrimiento finito del compacto hemos llegado a una contradicción. De esta forma, está demostrada la necesidad de esta condición.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea $X \subset R^n$ y supongamos que de cualquier recubrimiento abierto del conjunto $X$ se puede extraer un recubrimiento finito. Supongamos que $X$ no es compacto. Esto, por la definición 29, significa que existe una sucesión $\{x^{(m)}\} \subset X$, $m = 1, 2, \ldots$, de la cual no se puede extraer una subsucesión que converja hacia cierto punto de $X$. Por lo tanto, cualquiera que sea el punto $x \in X$, no es un límite parcial de la sucesión $\{x^{(m)}\}$. Por esto, para cada punto $x \in X$ se encuentra un entorno — designémoslo por $G_x$ — que contiene solamente un número finito de elementos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$; en caso contrario, de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ se hubiera podido extraer una subsucesión convergente hacia $x$ (si todos los elementos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$, que se encuentran en $G_x$, son tales que $x^{(m)} \neq x$, entonces del hecho de que estos elementos son sólo un número finito, evidentemente se deduce que se puede escoger incluso tal entorno del punto $x$ que no contendrá elementos algunos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$.

En virtud de la elección del entorno $G_x$, cada punto $x$ del conjunto $X$ pertenece al correspondiente entorno: $x \in G_x$. Por esto, el conjunto $\Omega = \{G_x\}$, $x \in X$, de todos estos entornos forma un recubrimiento abierto del conjunto $X$. Según la condición del teorema, de éste se puede extraer un recubrimiento finito. Sea éste

$$\Omega_0 = \{G_{x_1}, G_{x_2}, \ldots, G_{x_k}\}.$$

Cada elemento de este recubrimiento contiene sólo un número finito de términos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$. Por lo tanto, todos los elementos del recubrimiento $\Omega_0$ también contienen sólo un número finito de términos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$. Esto sin embargo, es imposible, ya que al recubrir todo el conjunto $X$, los elementos del recubrimiento finito $\Omega_0$ deben contener todos los términos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$, cuyo número es infinito. La contradicción obtenida demuestra la suficiencia de las condiciones del teorema. ☐

OBSERVACIÓN. La necesidad de las condiciones del teorema, es decir, la afirmación que de cualquier recubrimiento abierto del compacto se puede extraer un recubrimiento finito, se llama habitualmente **lema de Heine — Borel** *).

Subrayemos que en el teorema 4 es esencial el hecho de que se analizan recubrimientos compuestos precisamente por conjuntos abiertos. Así, por ejemplo, del recubrimiento del segmento $[0, 1]$ (el que, como ya se ha señalado, siendo un conjunto cerrado y acotado, es compacto) por los segmentos $[1/(n+1), 1/n]$, $n = 1, 2, \ldots$, y por el segmento $[-1, 0]$ no se puede extraer un recubrimiento finito. Esto se explica por el hecho de que aquí el recubrimiento está compuesto no por conjuntos abiertos, sino por conjuntos cerrados.

---

*) E. Borel (1871 — 1956), matemático francés.

Ejercicio 14. Demuéstrese que para cualquier recubrimiento abierto finito $\Omega = \{G_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ del compacto $A \subset R^n$ existe un número $l > 0$, tal que cualquiera que sea el conjunto $X \subset A$, para el cual $\sup\limits_{x, y \in E} \rho(x, y) \leqslant l$, existe un elemento $G_{k_0}$ del recubrimiento $\Omega$, tal que $X \subset G_{k_0}$.

Para concluir este punto demostremos otra afirmación auxiliar. Previamente introduzcamos el siguiente símbolo: para cualquier conjunto $X \subset R^n$ designemos por $X_\eta$, donde $\eta > 0$, el conjunto de todos los puntos cuya distancia hasta $X$ no es superior al número $\eta$, es decir, hagamos

$$X_\eta \stackrel{\text{def}}{=} \{x: \rho(x, X) \leqslant \eta\}.$$

**Lema 11.** *Si $A$ es compacto, $A \subset R^n$, entonces para cualquier $\eta > 0$ el conjunto $A$ también es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Según el teorema 3, el conjunto $A$, siendo compacto, es acotado y cerrado. La acotación del conjunto $A$ significa que existe un $a > 0$ tal que $A$ está contenido en la bola $U(O, a)$.

Mostremos que $A_\eta \in U(O, a + \eta)$. Si $x \in A_\eta$, entonces por el lema 8 se encuentra un punto $y \in A$, tal que $\rho(x, y) = \rho(x, A) \leqslant \eta$. De la condición $A \subset U(O, a)$ se deduce que $\rho(O, y) < a$, por esto

$$\rho(O, x) \leqslant \rho(O, y) + \rho(y, x) < a + \eta.$$

De esta forma, $x \in U(O, a + \eta)$. El punto $x$ es un punto arbitrario del conjunto $A_\eta$. Por lo tanto, $A_\eta \subset U(O, a + \eta)$ y por esto el conjunto $A_\eta$ es acotado.

Mostremos ahora, que $A_\eta$ es un conjunto cerrado. Si $x$ es un punto adherente del conjunto $A_\eta: x \in \bar{A}_\eta$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un punto $y \in A_\eta$ tal que $\rho(x, y) < \varepsilon$. De la definición del conjunto $A_\eta$ y del lema 8 se deduce que existe un punto $z_0 \in A$ tal que $\rho(y, z_0) = \rho(y, A) \leqslant \eta$; por esto

$$\rho(x, A) = \inf_{z \in A} \rho(x, z) \leqslant \rho(x, z_0) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z_0) < \varepsilon + \eta.$$

Esta desigualdad es válida para cualquier $\varepsilon > 0$. Haciendo tender $\varepsilon$ hacia cero, obtenemos $\rho(x, A) \leqslant \eta$, es decir, $x \in A_\eta$ lo que demuestra que el conjunto $A_\eta$ es cerrado.

Así, el conjunto $A_\eta$ es acotado y cerrado, y por lo tanto, en virtud del propio teorema 3 es compacto. □

## 18.4. ESPACIOS VECTORIALES DE VARIAS DIMENSIONES

En el p. 15.1 se señaló, que para un sistema de coordenadas dado en un espacio tridimensional, la definición de un vector es equivalente a la definición de sus tres coordenadas. Durante la adición de vectores y su multiplicación por un número, se efectúan las mismas operaciones con sus coordenadas. En el caso $n$-dimensional, el vector puede ser definido con ayuda de sus coordenadas.

**Definición 31.** *El sistema ordenado de $n$ números reales*

$$(x_1, \ldots, x_n); \quad x_i \in R; \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

*se llama vector real n-dimensional* $x$, *y los números* $x_1, \ldots, x_n$ *se llaman sus coordenadas. El número n se llama dimensión del vector.*

*Se llama suma* $x + y$ *de los vectores* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *el vector* $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, *es decir,*

$$x + y \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

*y se llama producto del vector* $x$ *por el número* $\lambda \in R$ *el vector*

$$\lambda x \stackrel{\text{def}}{=} x\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

El conjunto de todos los vectores $n$-dimensionales, en el que se han introducido las operaciones de adición de vectores y multiplicacion de un vector por un número real, se llama *espacio vectorial real n-dimensional, o, de una forma más completa, espacio vectorial aritmético n-dimensional sobre el campo de los números reales.*

El vector $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ se llama *vector nulo o cero del espacio vectorial n-dimensional.*

Por definición, el vector $-x \stackrel{\text{def}}{=} (-1)x$ se llama vector opuesto al vector $x$.

Ejercicio 15. Demuéstrese que si $x, y, z$ son vectores cualesquiera, y los números $\lambda, \mu \in R$ son arbitrarios, entonces 1) $x + y = y + x$; 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$; 3) $x + \mathbf{0} = x$; 4) $1 \cdot x = x$; 5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$; 6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$; 7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

De esta forma, el espacio aritmético $n$-dimensional (véase la definición 1 en el p. 18.1) se convierte en el espacio vectorial aritmético $n$-dimensional, si en él se introducen la adición de sus elementos y la multiplicación de sus elementos por un número según la definición 31.

En el caso tridimensional, la relación entre los puntos del espacio y los vectores en él, se puede establecer (como siempre, considerando dado un sistema de coordenadas), poniendo en correspondencia a cada punto $M = (x_1, x_2, x_3)$ de este espacio su radio vector, es decir, el vector $\overline{OM} = (x_1, x_2, x_3)$. Esta correspondencia es una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio tridimensional y los vectores en este espacio.

A veces, el espacio aritmético $n$-dimensional, introducido en la definición 1 del p. 18.1, a diferencia del espacio vectorial $n$-dimensional, es llamado *espacio puntual*.

Así, tanto el espacio puntual $n$-dimensional, como el espacio vectorial $n$-dimensional están compuestos por los mismos elementos, por los conjuntos ordenados de $n$ números reales. Por esto, tanto uno como otro espacio, será designado por el mismo símbolo $R^n$. Ellos se diferencian en que en el espacio aritmético $n$-dimensional se introduce el concepto de distancia entre sus elementos (véase la definición 1 en el p. 18.1), y en el espacio vectorial $n$-dimensional se definen las operaciones de adición de vectores y multiplicación de vectores por un número real (véase la definición 31 de este punto).

Si por $e_k$ se designa un vector $n$-dimensional, todas las coordenadas del cual son iguales a cero, excepto la coordenada $k$, que es igual a la unidad, $k$ es un número natural fijo, $(k \in \{1, 2, \ldots, n\})$, entonces para cualquier vector $n$-dimensional $x = (x_1, \ldots, x_n)$, es válida la igualdad

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \tag{18.31}$$

cuyo miembro segundo se llama descomposición del vector $x$ según los vectores $e_1$, $\ldots$, $e_n$. Los coeficientes $x_1, \ldots, x_n$ de esta descomposición son únicos, es decir, están unívocamente definidos por el propio vector $x$, y, por lo tanto, en virtud de la igualdad (18.31) coinciden con sus coordenadas $x_1, \ldots, x_n$.

Los vectores $e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ se llaman vectores *coordenados* o *vectores básicos, y su conjunto* $\{e_1, \ldots, e_n\}$, se llama *base estándar* del espacio $R^n$ (la definición general de base será dada en el p. 57.2).

El subconjunto $L$ del espacio vectorial $R^n$ se llama *subespacio* del espacio $R^n$, si para vectores cualesquiera $x \in L$, $y \in L$ y números cualesquiera $\lambda \in R$, $\mu \in R$ tiene lugar la inclusión

$$\lambda x + \mu y \in L.$$

**Definición 32.** *Se llama producto escalar de los vectores* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $n > 3$, *el número designado por* $(x, y)$ *y definido por la fórmula*

$$(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n. \tag{18.32}$$

De la matemática elemental, es conocido que la fórmula (18.32) es válida también para la definición habitual del producto escalar de vectores, es decir, para $n \leqslant 3$.

Cualquier espacio $n$-dimensional, en el que se haya introducido el producto escalar se llama *euclídeo*.

El número $\sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ se llama *longitud del vector* $x$ y se designa por $|x|$:

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{18.33}$$

Es evidente que para cualquier vector $x \in R^n$ y para cualquier número $\lambda \in R$ tiene lugar la igualdad

$$|\lambda x| = |\lambda| |x| \tag{18.34}$$

y de la desigualdad (18.3) (véase el p. 18.1) se deduce, que para cualesquiera $x \in R^n$, $y \in R^n$ se cumple la desigualdad

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|, \tag{18.35}$$

llamada *desigualdad triangular*.

De (18.35) se deduce que

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|. \tag{18.36}$$

En efecto, $|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|$, por esto

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|.$$

Ya que $x$ e $y$ son equitativos, tenemos también

$$|y| - |x| \leqslant |y - x| = |x - y|.$$

De las dos últimas desigualdades se deduce (18.36). □

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, entonces $x - y = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$ y por esto

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \rho(x, y), \tag{18.37}$$

donde $x$ e $y$ son puntos del espacio puntual $n$-dimensional con las mismas coordenadas que los vectores $x$ e $y$. De esta forma, en el espacio vectorial $n$-dimensional con producto escalar está definida la distancia $|x - y|$ entre sus elementos y ésta coincide con la distancia $\rho(x, y)$ definida en el p. 18.1. Por esto, todos los conceptos introducidos en los p. 18.1 — 18.3 para los espacios puntuales tienen sentido también para los espacios vectoriales con producto escalar.

En calidad de ejemplo de la utilización de los símbolos vectoriales señalemos que la bola cerrada $Q^n(x_0, r)$ de radio $r$ con centro en el punto $x_0$ en las designaciones vectoriales se define por la igualdad

$$Q^n(x_0, r) = \{x: |x - x_0| \leqslant r\},$$

y la esfera $(n - 1)$-dimensional $S^{n-1}(x_0, r)$, que la acota, se define por la igualdad

$$S^{n-1}(x_0, r) = \{x: |x - x_0| = r\}.$$

El producto escalar tiene las siguientes propiedades, demostrables directamente.

1°. **Conmutatividad.** Para cualesquiera $x \in R^n$, $y \in R^n$: $(x, y) = (y, x)$.

2°. **Distributividad.** Para cualesquiera $x \in R^n, y \in R^n: z \in R^n$: $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

3°. **Homogeneidad.** Para cualquier $x \in R^n$ y para cualquier número $\lambda \in \boldsymbol{R}$: $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

4°. **Regularidad.** Para cualquier $x \in R^n$: $(x, x) \geqslant 0$, además,

$$(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

La distributividad y la homogeneidad del producto escalar componen conjuntamente la propiedad llamada *linealidad del producto escalar*.

Si $e_1, \ldots, e_n$ son vectores coordenados en $R^n$, entonces por (18.32)

$$(e_i, e_j) \begin{cases} 1 & \text{para} \quad i = j, \\ 0 & \text{para} \quad i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Por esto para cualquier vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en virtud de las propiedades del producto escalar obtenemos:

$$(x, e_i) = (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, e_i) = x_1(e_1, e_i) + \ldots + x_n(e_n, e_i) = \\ = x_i(e_i, e_i) = x_i, \tag{18.38}$$

es decir, la coordenada $i$ del vector $x$ es igual al producto escalar $(x, e_i)$.

Utilizando la designación del producto escalar y de la longitud de un vector, la desigualdad de Cauchy — Shwarz (véase (18.2) en el p. 18.1) para los vectores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ puede ser escrita en la forma

$$|(x, y)| \leqslant |x||y|. \tag{18.39}$$

Señalemos que la desigualdad (18.3) en términos de longitud de los vectores significa que la longitud de la suma de vectores no sobrepasa la suma de sus longitudes:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Se llama ángulo $\varphi$ entre los vectores $x \in R^n$ e $y \in R^n$, $n > 3$, el ángulo $\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, definido por la igualdad

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}. \tag{18.40}$$

En virtud de la desigualdad de Cauchy — Shwarz (18.39) esta definición es correcta, o sea, según (18.39) para $\varphi$, definido por la fórmula (18.40), tiene lugar la desigualdad $\cos |\varphi| \leqslant 1$.

Aquí, otra vez, como en el caso de la definición de producto escalar, por la definición inicial se toma la afirmación análoga a la afirmación demostrada en el espacio $R^n$, $n \leqslant 3$. Gracias a esto, las fórmulas (18.32) y (18.40) son válidas en todos los espacios $R^n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Los vectores, cuyos productos escalares son iguales a cero, se llaman *ortogonales*.

El vector de longitud unitaria de forma breve se llama *vector unitario*.

Si $a$ y $b$ son vectores unitarios, entonces para el coseno del ángulo entre ellos, de la fórmula (18.40) obtenemos

$$\cos \varphi = (a, b), \quad |a| = |b| = 1. \tag{18.41}$$

Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es un vector unitario, entonces designando por $\alpha_i$ el ángulo entre los vectores $a$ y $e_i$ según (18.38) y (18.41) tenemos:

$$a_i = (a, e_i) = \cos \alpha_i, \quad \text{es decir,} \quad a = (\cos \alpha_1, \ldots, \cos \alpha_n).$$

Los cosenos $\cos \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, se llaman *cosenos directores del vector $a$*.

Ya que $|a| = 1$, entonces por (18.33)

$$\cos^2 \alpha_1 + \ldots + \cos^2 \alpha_n = 1. \tag{18.42}$$

Si $a$ no es un vector unitario y $a \neq 0$, entonces, evidentemente, el vector $a/|a|$ ya es unitario, y sus cosenos directores se llaman también cosenos directores del vector $a$.

La ecuación de la recta en el espacio $R^n$ (vease la definición 24 en el p. 18.2) en la notación vectorial tiene la forma

$$x = x^{(0)} + ta, \; -\infty < t < +\infty,$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n),$$
$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \; a = (a_1, \ldots, a_n) \tag{18.43}$$

(al sumar las coordenadas de los vectores también se suman los propios vectores, y al multiplicar sus coordenadas por un número se multiplican ellos mismos por el mismo número). La recta (18.43) se llama *recta que pasa por* el punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ del espacio puntual en el sentido del vector $a$.

Si $a$ es un vector unitario: $|a| = 1$ y, por lo tanto, $a = (\cos \alpha_1, \ldots, \cos \alpha_n)$ ($\cos \alpha_i$ son cosenos directores del vector $a$; $i = 1, 2, \ldots, n$), entonces la recta (18.43) expresada según las coordenadas tiene la forma

$$x_i = x_i^{(0)} + t\cos\alpha_i;\quad i = 1, 2, \ldots, n;\quad -\infty < t \quad +\infty. \tag{18.44}$$

Sean dados dos puntos $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ y $x'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$ del espacio puntual; designemos por $\boldsymbol{x}'$ y $\boldsymbol{x}''$ los vectores con estas mismas coordenadas. Entonces, la ecuación de la recta, que pasa por los puntos $x'$ y $x''$ (véase el p. 18.2) en la forma vectorial será

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + (\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}')t,\quad -\infty < t < +\infty. \tag{18.45}$$

Por analogia con el § 15 se puede analizar la función vectorial $n$-dimensional

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),\quad t \in E \subset \boldsymbol{R}$$

($\boldsymbol{R}$, como siempre, es el conjunto de todos los números reales). Completamente análogo a como fue hecho en el § 15, para cualquier $n$ natural se definen los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función vectorial, $\boldsymbol{r}(t) \in \boldsymbol{R}^n$. Al igual que en el caso de $n \leqslant 3$ durante la diferenciación de una función vectorial, se diferencian sus coordenadas: $\boldsymbol{r}'(t) = (x'_1(t), \ldots x'_n(t))$, y la afirmación $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = 0$ es equivalente a $\lim\limits_{t \to t_0} |\boldsymbol{r}(t)| = 0$.

# § 19. LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

## 19.1. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En este párrafo se analizan las funciones definidas sobre los conjuntos del espacio aritmético $n$-dimensional euclídeo $\boldsymbol{R}^n$ y cuyos valores son números reales. De esta forma, todas las funciones serán funciones de puntos del espacio. Esto significa que si se tiene cualquier función $f(x_1, \ldots, x_n)$ y en el espacio $\boldsymbol{R}^n$ está dado un sistema de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$, entonces en otro sistema de coordenadas $\xi_1, \ldots, \xi_n$, relacionado con el inicial por la transformación

$$x_i = x_i(\xi_1, \ldots, \xi_n),\quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

por *la misma función se entiende no la función* $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, sino la función

$$f[x_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, x_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)].$$

Las funciones analizadas serán designadas o bien por una letra, por ejemplo $f$, o bien más detalladamente, señalando el argumento, por $f(x)$ o por $f(x_1, \ldots, x_n)$. Para $n > 1$ éstas se llaman *funciones de varias variables*. En el caso cuando $n = 2$ en lugar de $f(x_1, x_2)$ escribiremos también $f(x, y)$, en el caso cuando $n = 3$ en lugar de $f(x_1, x_2, x_3)$ escribiremos también $f(x, y, z)$.

A cada función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le corresponde su gráfica en el espacio $n$-dimensional de puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$. Definamos este concepto para el caso aquí analizado.

**Definición 1.** *Sea la función* $y = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, *definida sobre el conjunto* $X$ *del espacio euclídeo* $R^n$, *y sea* $R^{n+1}_{xy}$ *un espacio euclídeo* $(n + 1)$*-dimensional de puntos* $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$. *El conjunto de puntos*

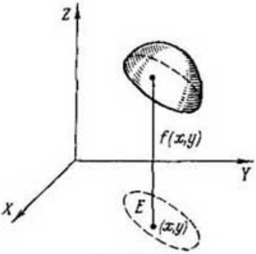



FIG. 95

*del espacio* $R_{xy}^{n+1}$ *del tipo* $(x, f(x)) = (x_1, \ldots, x_n, f(x))$, *donde* $x \in X$, *se llama gráfica de la función* $f$.

La gráfica de la función de varias variables, al igual que la gráfica de la función de una variable, es cómodo utilizarla para la interpretación geométrica de los conceptos introducidos y de las afirmaciones que se demuestran. Naturalmente, la representación de la gráfica en un dibujo, cuando el número de variables independientes es mayor que uno, es más difícil que en el caso unidimensional. En la fig. 95 se representa la forma de la gráfica de una función de dos variables $y = f(x_1, x_2)$.

El enunciado dado aquí de la definición de gráfica de una función de $n$ variables es un caso particular de la definición general de gráfica de una función enunciada en el p. 1.2*.

Sea otra vez la función $f$ definida sobre el conjunto $X \subset R^n$. El conjunto de los puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ del espacio $R^n$, que satisfacen la ecuación

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c,$$

donde $c$ es una constante, se llama *conjunto de nivel* de la función $f$, correspondiente al valor dado de $c$.

En el caso cuando $n = 2$ el conjunto de nivel se llama también *línea de nivel*; en el caso cuando $n = 3$, *superficie de nivel*, y cuando $n > 3$, *hipersuperficie de nivel*.

## 19.2. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN Y SU CONTINUIDAD

Enunciemos la definición de límite de una función de varias variables.

**Definición 2.** *Sea* $f: X \to R$, $E \subset X \subset R^n$, $x^{(0)} \in R^n$, $x^{(0)}$ *es un punto de adherencia del conjunto* $E$.

*El número* $a$ *se llama límite de la función* $f$ *por el conjunto* $E$ *en el punto* $x^{(0)}$ *o lo que es lo mismo, cuando* $x \to x^0$ *si para cualquier sucesión de puntos*

$$x^{(m)} \in E, \quad \lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x^{(0)},$$

*la sucesión numérica* $\{f(x^{(m)})\}$ *converge al número* $a$:

$$\lim_{m \to \infty} f(x^{(m)}) = a.$$

*En este caso, se escribe*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = a. \tag{19.1}$$

Por analogía con el caso unidimensional (véase el p. 5.4 y el p. 5.7) se puede dar otra definición de límite de una función en un punto dado, equivalente a la enunciada, en la cual no se utiliza el concepto de límite de una sucesión.

**Definición 3.** *Sea $f: X \to R$, $E \subset X \subset R^n$, $x^{(0)} \in R^n$, $x^{(0)}$ es un punto de adherencia del conjunto $E$.*

*El número $a$ se llama límite de la función por el conjunto $E$ en el punto $x^{(0)}$ (o cuando $x \to x^{(0)}$) si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier punto $x \in U(x^{(0)}, \delta)$ se cumple la desigualdad*

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

De forma completamente análoga al caso de una función de una variable (véase el p. 5.7) se demuestra la equivalencia de las definiciones 2 y 3.

En el caso de $E = X$, es decir, cuando el límite se toma por todo el conjunto de definición de la función, el límite (19.1) se llama simplemente límite de la función $f$ en el punto $x_0$ y se denota por

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x). \tag{19.2}$$

Al igual que para las funciones de una variable, en el caso de definición de la función de varias variables con una fórmula, por $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$ se entiende el límite de esta función en el punto $x^{(0)}$ por todo el conjunto de los valores $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, para los cuales la fórmula indicada tiene sentido y para los cuales en el proceso de realización de todos los cálculos necesarios según esta fórmula para obtener los valores de la función $f$ se obtienen sólo números reales.

Junto con la notación (19.2), para el límite de la función $f$ en el punto $x^{(0)}$ se utiliza la notación

$$\lim_{\rho(x, x^{(0)}) \to 0} f(x), \quad \lim_{|x - x^{(0)}| \to 0} f(x). \tag{19.3}$$

En esencia, el concepto de límite de una función por un conjunto, no es más general que simplemente el concepto de límite de una función, ya que en las definiciones 2 y 3 se habla del concepto de límite de una función aplicado a la restricción de la función sobre el conjunto $E$.

La existencia del límite de una función $f$ de varias variables $f: X \to R$, $X \subset R^n$ en el punto $x^{(0)} \in R^n$, y si éste existe, entonces su valor se determina completamente por los valores de la función sobre la intersección $U(x^{(0)}) \cap X$ de un entorno arbitrario $U(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$ con el conjunto de definición $X$ de la función $f$, es decir, no dependen de la elección del entorno indicado. El enunciado exacto de esta afirmación consiste en lo siguiente.

Si la función $f: X \to R$, $X \subset R^n$, tiene límite $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$, entonces, para cualquier entorno $U(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$ tiene el mismo límite por el conjunto $U(x^{(0)}) \cap X$:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in U(x^{(0)}) \cap X}} f(x). \tag{19.4}$$

Si la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$ tiene límite $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in U(x^{(0)}) \cap X}} f(x)$ al menos para un entorno $U(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$, entonces tiene límite en este punto por el conjunto $X$ (además, en virtud de la primera afirmación se cumple la igualdad (19.4)). Todo esto es totalmente fácil de comprobar y por esto, puede ser realizado por el lector.

La propiedad de una función que no depende de la elección de un entorno suficientemente pequeño que contenga el punto dado, se llama *propiedad local de la función* en este punto. Evidentemente la existencia del límite de la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ en el punto $x^{(0)}$ que es un punto de adherencia del conjunto $X$, y su valor (si, naturalmente, éste existe) son propiedades locales de la función en el punto señalado.

Ejercicios. 1. Demuéstrese la equivalencia de las definiciones 2 y 3 de límite de una función de varias variables en un punto dado.

2. Por analogía con el caso de una función de una variable enúnciese y demuéstrese el criterio de Cauchy de la existencia del límite de una función de varias variables.

A menudo es necesario analizar los límites de las funciones $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$ en los puntos $x^{(0)} \subset X$ por el conjunto $X \setminus \{x^{(0)}\}$. En este caso es cómodo servirse del concepto del así llamado entorno reducido en el espacio $n$-dimensional. Definamos este concepto por analogía con el caso unidimensional.

**Definición 4.** *Se llama entorno reducido $\overset{\circ}{U}(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)} \in \boldsymbol{R}^n$ cualquier conjunto que se obtiene eliminando el punto $x^{(0)}$ de cierto entorno $U(x^{(0)})$ de este punto:*

$$\overset{\circ}{U}(x^{(0)}) \overset{\text{def}}{=} U(x^{(0)}) \setminus \{x^{(0)}\}.$$

Es fácil ver que el análisis del límite de una función $f$ en un punto $x^{(0)}$ por el conjunto $X \setminus \{x^{(0)}\}$ es equivalente al análisis de su límite en este punto por el conjunto $\overset{\circ}{U}(x^{(0)}) \cap X$, donde $\overset{\circ}{U}(x^{(0)})$ es un entorno reducido arbitrario del punto $x^{(0)}$ (equivalente en el sendio de la existencia y magnitud del límite).

Si en la definición 2 ó 3 en calidad de conjunto $E \subset X$ se toma la intersección del conjunto $X$ con cierta recta $l$ o cualquier curva $\gamma$, que pasa por el punto $x^{(0)}$, entonces el límite $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in l \cap X}} f(x)$, respectivamente $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in \gamma \cap X}} f(x)$, se llama límite de la función $f$ en el punto $x^{(0)}$ por la recta $l$, respectivamente, por la curva $\gamma$.

Como en el caso unidimensional, si para la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, existe $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$, es decir, el límite indicado existe por todo el conjunto de definición $X$ de la función $f$, entonces existe el límite $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in E}} f(x)$ de esta función por cualquier subconjunto $E$ del conjunto $X$, para el cual $x^{(0)}$ es un punto de adherencia: $x^{(0)} \in \overline{E}$, $E \subset X$, y son iguales:

$$\lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = \lim_{x \to x^{(0)}} f(x).$$

Por ejemplo, si existe un entorno reducido $\overset{\circ}{U}(x^{(0)})$ tal que $\overset{\circ}{U}(x^{(0)}) \subset X$ y existe $\lim\limits_{x \to x} f(x)$, entonces existe el límite $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in l \cap X}} f(x)$ por cualquier recta $l$ que pase por el punto $x^{(0)}$, además

$$\lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in l \cap X}} f(x) = \lim_{x \to x^{(0)}} f(x).$$

Ejemplo. Sea $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Esta fórmula define una función en todos los puntos del plano, excepto el origen de coordenadas (0, 0). Investiguemos los límites de esta función por distintos sentidos en el punto (0, 0). La ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas (0, 0) en el sentido del vector $(\alpha, \beta)$, tiene la forma $x = \alpha t, y = \beta t, \alpha^2 + \beta^2 > 0$. Tenemos: $f(\alpha t, \beta t) = \dfrac{\alpha^2 \beta t}{\alpha^4 t^2 + \beta} \to$ $\to 0$ cuando $t \to 0$, es decir, el límite en cualquier dirección existe y es igual a cero. Si $y = x^2$, entonces $f(x, x^2) = \dfrac{1}{2}$, y por lo tanto, el límite a lo largo de la parábola $y = x^2$ también existe, pero es igual a 1/2.

De esta forma, para la función analizada existe el mismo límite por cualquier dirección, y el límite por la parábola señalada, aunque existe, es diferente del valor general de los límites por las direcciones, así que sencillamente el límite en el punto (0, 0) no existe.

Ejercicio 3. Investíguese el límite por las direcciones en el punto (0, 0) de la función $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

De forma análoga al caso de las funciones de una variable, para los límites de las funciones de varias variables por un conjunto tienen lugar los correspondientes teoremas sobre el límite de la suma, el producto y el cociente, ya que por la definición dada anteriormente, el límite de una función de $n$ variables por un conjunto, también se reduce al concepto de límite de una sucesión (véase el p. 4.7).

Junto con los límites señalados, para las funciones de varias variables se pueden también analizar límites de otros tipos, relacionados con el paso sucesivo al límite, por ejemplo, según las distintas coordenadas, es decir, los límites del tipo

$$\lim_{x_{i_1} \to x_{i_1}^{(0)}} \lim_{x_{i_2} \to x_{i_2}^{(0)}} \dots \lim_{x_{i_n} \to x_{i_n}^{(0)}} f(x_1, \dots, x_n) \tag{19.5}$$

donde $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ es cierta permutación de los números $1, 2, \dots, n$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, y la función $f$ está definida, por ejemplo, en cierto entorno reducido o en un entorno común del punto $x^{(0)}$. Aquí se habla de un paso sucesivo al límite, cada vez en una función de una variable. Así $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x_1, \dots, x_n)$ significa que para la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ están fijados todos los valores de las coordenadas $x_j, j \neq i$, de su argumento $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ y por lo mismo el límite indicado significa el límite de la función $f$ por el conjunto $\{x = (x_1, \dots, x_n)\colon x_j$ están fijos, $j \neq i\} \cap X$.

Los límites del tipo (19.5) se llaman *límites reiterados*. Estos representan lo específico de las funciones de varias variables.

Analicemos la función definida sobre todo el plano

$$f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{y} + y \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & \text{si} \quad x \neq 0 \text{ e } y \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \text{ ó } y = 0. \end{cases}$$

Investiguemos sus distintos límites en el punto (0, 0).

Es evidente que $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0$. En lo que respecta a los límites reiterados

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \left( x \operatorname{sen} \frac{1}{y} + y \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} \left( \lim_{y \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{y} + y \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right),$$

éstos no existen, ya que no existen los límites

$$\lim_{x \to 0} y \operatorname{sen} \frac{1}{x} \ (y \neq 0) \quad \text{y} \quad \lim_{y \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{y} \ (x \neq 0)$$

y

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{y} = 0, \quad y \neq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{y \to 0} y \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0, \quad x \neq 0.$$

Para la función $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, definida por esta fórmula sobre todo el plano, excepto el origen de coordenadas, ambos límites reiterados existen en el punto (0, 0), y $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = 0$. Sin embargo, el límite de la función $f$ en el punto (0, 0) no existe, ya que, como es fácil ver, el límite a lo largo de los ejes coordenados es igual a cero y a lo largo de la recta $y = x$ es igual a 1/2.

De esta forma, sólo de la existencia del límite de una función en un punto dado, no se deduce la existencia de los límites reiterados en este punto y viceversa, de la existencia de los límites reiterados no se deduce la existencia del límite en el punto correspondiente. Sin embargo, puede ser establecida una cierta relación entre estos conceptos.

**Teorema 1.** *Sea la función $f(x, y)$ definida sobre el conjunto $E$, que contiene todos los puntos de cierto entorno rectangular $P((x_0, y_0); \delta_1, \delta_2)$ del punto $(x_0, y_0)$ excepto, puede ser, los puntos de las rectas $x = x_0$ e $y = y_0$. Si existe el límite de la función $f$ en el punto $(x_0, y_0)$ por el conjunto $E$ y para cualquier $y \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$, $y \neq y_0$, existe el límite* *)

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) = g(y), \tag{19.6}$$

*entonces el límite reiterado $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$ existe y*

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \to (x_0, y_0), \\ (x, y) \in E}} f(x, y). \tag{19.7}$$

---

*) Como siempre, por límites, si no se dice otra cosa, se entenderán límites finitos.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0),\\ (x,y)\in E}} f(x,y) = A$ y sea dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Existe un entorno rectangular $P = P((x_0,y_0);\eta_1,\eta_2)$, $0 < \eta_1 < \delta_1$, $0 < \eta_2 < \delta_2$, tal que $0 < |x - x_0| < \eta_1$, $0 < |y - y_0| < \eta_2$, entonces

$$|f(x,y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19.8}$$

En virtud de la existencia del límite (19.6), para cualquier número $y$, tal que $0 < |y - y_0| < \eta_2$, de (19.8) se deduce que

$$|g(y) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

(para esto es suficiente pasar al límite cuando $x \to x^{(0)}$ en la igualdad (19.8)), y esto significa que $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = A$. □

Ejemplo. Analicemos la función $f(x, y) = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{y}$, $y \neq 0$. Esta función está definida en todo el plano, excepto los puntos del eje de las $x$. Designemos su dominio por $X$. Evidentemente existen los límites

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0),\\ x\in X}} f(x,y) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} f(x,y) = 0, \quad y \neq 0;$$

por esto, según el teorema demostrado, existe también el límite reiterado $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = 0$. Esto, naturalmente, se ve claramente. Observemos, que en este caso no existe otro límite reiterado $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$.

Al igual que en el caso de las funciones de una variable, para las funciones

$$f: X \to \boldsymbol{R}, \quad X \subset R^n,$$

de varias variables se puede definir el límite $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, es decir, el límite cuando el punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ se aleja ilimitadamente del origen de coordenadas, dicho de otra forma, cuando $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \to +\infty$ y también el límite reiterado por las variables $x_i \to \infty$ y $x_j \to \infty$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Señalemos que también en este caso tiene lugar una afirmación análoga al teorema 1.

Todas estas definiciones tienen sentido, naturalmente, sólo en el caso cuando el conjunto $X$ no está acotado. El infinito $\infty$ también en el caso del espacio $R^n$ se llama, para simplificar, punto, más exacto, punto infinitamente alejado.

Señalemos que se llama $\varepsilon$-entorno $U(\infty, \varepsilon)$ del infinito $\infty$ en el espacio $R^n$ el exterior de la esfera $n$-dimensional cerrada con centro en el origen de coordenadas y radio igual a $\varepsilon$, es decir,

$$U(\infty, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \{x: |x| > \varepsilon\}$$

y se llama simplemente entorno $U(\infty)$ en $R^n$ el complemento en $R^n$ de cualquier compacto perteneciente a este espacio.

Se puede, naturalmente, analizar también el espacio obtenido del espacio $R^n$ completándolo con su punto infinitamente alejado $\infty$, es decir, el espacio $R^n \cup \{\infty\}$, como se hizo para $n = 1$. En este espacio, naturalmente, por entorno del punto infinitamente alejado $\infty$ se entiende su entorno en el espacio $R^n$, completado con el propio punto $\infty$.

Por analogía con el caso unidimensional, para las funciones de varias variables se introducen los conceptos de diferentes límites infinitos (con signo y sin signo). No haremos todo esto, proponiéndole al lector hacerlo a medida de sus necesidades.

OBSERVACIÓN. Si el conjunto $X \subset R^2$, sobre el cual está definida la función $f$: $X \to R$, está compuesto solamente por los puntos $x$, cuyas coordenadas son números naturales: $x = (m, n)$, $m \in N$, $n \in N$, entonces la función $f$ se llama *sucesión doble* y su valor $y = f(m, n)$ se designa por $y_{mn}$, y la propia sucesión se designa por $\{y_{mn}\}$.

Para las sucesiones dobles $\{y_{mn}\}$ se puede analizar el límite $\lim\limits_{(m,n) \to \infty} y_{mn}$ y los límites reiterados

$$\lim_{m \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} y_{mn}, \quad \lim_{n \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} y_{mn}.$$

Nos encontraremos de nuevo con las sucesiones dobles en el p. 38.1.

Ejemplo. Sea $y_{mn} = \cos^m 2\pi n!x$, $m \in N$, $n \in N$, $x \in R$; entonces

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} \cos^m 2\pi n!x = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es un número racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional.} \end{cases}$$

Efectivamente, si $x = p/q$, $p \in Z$, $q \in Z$, $q > 0$, entonces cuando $n \in N$, $n \geqslant q$, tiene lugar la igualdad $\cos 2\pi n!x = 1$, y por lo tanto, $\lim\limits_{m \to +\infty} \cos^m 2\pi n!x = 1$, $n \geqslant q$, y por esto $\lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{m \to +\infty} \cos^m 2\pi n!x = 1$. Si el número $x$ es irracional, entonces para cualquier $n$ natural se cumple la desigualdad $|\cos 2\pi n!x| < 1$, de la cual se deriva que $\lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{m \to +\infty} \cos^m 2\pi n!x = 0$. □

Como resultado hemos obtenido la forma analítica de la función de Dirichlet

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} \cos^m 2\pi n!x, \quad x \in R.$$

### 19.3. FUNCIONES CONTINUAS

Como en el caso de las funciones de una variable (véase el p. 5.5), si el punto $x^{(0)}$ pertenece al dominio $X$ de la función $f$, entonces para la existencia del límite finito $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$ es necesario y suficiente que

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)}). \tag{19.9}$$

**Definición 5.** *Si para la función $f$: $X \to R$, $X \subset R^n$, en el punto $x^{(0)} \in X$ se cumple la condición* (19.9), *entonces la función $f$ se llama continua en este punto.*

De forma natural, se introduce la generalización formal del concepto de continuidad de una función $f$: $X \to R$, $X \subset R^n$, en el punto $x^{(0)}$ y precisamente el concepto de su continuidad en este punto por el subconjunto $E \subset X$, si $x^{(0)} \in E$.

**Definición 6.** *Si $f$: $X \to R$, $E \subset X \subset R^n$ y para la función $f$ en el punto $x^{(0)} \in E$ se cumple la condición*

$$\lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = f(x^{(0)}), \tag{19.10}$$

*entonces la función f se llama continua en el punto $x^{(0)}$ por el conjunto E.*

Como en el caso unidimensional (véase el lema 3 en el p. 5.5) si el punto $x^{(0)} \in X$ es un punto aislado del conjunto $X$, entonces la función $f: X \to R$ siempre es continua en él.

Si en la igualdad (19.10) se traslada $f(x^{(0)})$ al primer miembro y se pone $\Delta y = (f(x) - f(x^{(0)})$, entonces la condición (19.10) se escribe en la forma

$$\lim_{\substack{\rho(x, x^{(0)}) \to 0, \\ x \in E}} \Delta y = 0.$$

El número $\Delta y$ se llama incremento de la función en el punto $x^{(0)}$, que corresponde a la variación del argumento del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ hasta el punto $x = (x_1, \dots, x_n)$. Ya que $\rho(x, x^{(0)}) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$ donde $\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces la continuidad de $f$ en el punto $x^{(0)}$ por el conjunto $E$ significa que su incremento $\Delta y$ en este punto tiende a cero, cuando el incremento $\Delta x_i$ de todos sus argumentos simultáneamente tienden a cero, (es decir, cuando $\rho(x, x^{(0)}) \to 0$).

Naturalmente, se puede enunciar el concepto de continuidad de una función también en el lenguaje de las sucesiones.

*La función $f(x)$, definida sobre el conjunto $X$, es continua por este conjunto en el punto $x^{(0)} \in X$* si y sólo si para cualquier sucesión de los puntos $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{x \to \infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}). \tag{19.11}$$

Esto se deduce directamente de la equivalencia de las definiciones 2 y 3 del límite de una función $f: X \to R$, $X \subset R^n$, en el punto $x^{(0)} \in X$.

## 19.4. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Para los límites de las funciones de varias variables son válidas las propiedades análogas a las propiedades de las funciones de una variable enunciadas y demostradas en el p. 5.10. Por cuanto en el caso de las funciones de varias variables, los enunciados de las afirmaciones y sus demostraciones permanecen, en esencia, siendo las mismas, sólo que por el conjunto de definición (dominio) $X$ de la función analizada es necesario entender un subconjunto del espacio $n$-dimensional $R^n$; por un punto $x$, un punto de este espacio; por entorno, un entorno en este espacio, etc., entonces incluso no enunciaremos estas propiedades, esto nos llevaría casi a una transcripción al pie de la letra; es necesario, ciertamente, señalar que en el caso de $n > 1$, el argumento de una función de $n$ variables puede tender sólo al infinito $\infty$, es decir, al infinito sin signo, su tendencia a $+\infty$ ó $-\infty$ ya no tiene sentido, ya que el conjunto de los puntos del espacio $R^n$ para $n > 1$ ya no es ordenado. Todas las propiedades indicadas de los límites de las funciones de varias variables se utilizarán en el futuro sin comentarios complementarios.

Para las funciones $f(x_1, \dots, x_n)$, $n > 1$, conjuntamente con su continuidad en el sentido anteriormente definido, a la cual llaman *continuidad por el conjunto de variables* $x_1, \dots, x_n$, se puede analizar la continuidad por las variables $x_i$ sueltas.

La función $f(x_1, \dots, x_n)$, definida, por ejemplo, en cierto entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ se dice *continua en el punto* $x^{(0)}$ *por la variable* $x_i$ si la función

$$\varphi(x_i) \overset{\text{def}}{=} f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

de una variable $x_i$ es continua en el punto $x_i^{(0)}$. Es evidente que la función $\varphi$ es una restricción de la función $f$ sobre la intersección de la recta $x_j = x_j^{(0)}$, $j = 1, 2, \dots$ $\dots, i-1, i+1, \dots, n$, con el conjunto de definición de la función $f$, o sea, la continuidad de la función por una variable significa la continuidad de su restricción por el conjunto correspondiente.

Señalemos que de la continuidad de una función por todas sus variables sueltas no se deduce su continuidad por su colección. Por ejemplo, la función

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2), & \text{si} \quad x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

es continua por cada una de las variables $x$ e $y$ por separado en cada uno de los puntos del plano, pero no es continua por su conjunto en el punto $(0, 0)$, ya que en este punto incluso no tiene límite (compruébese).

## 19.5. LÍMITE Y CONTINUIDAD DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Analicemos más detalladamente la composición de funciones de varias variables, ya que en este caso se manifiesta cierta particularidad del análisis multidimensional, que no tiene análogo para las funciones de una variable, aquí se puede tomar la composición de funciones de diferentes números de variables.

Sea dado, sobre un conjunto $X \subset R^n$, un sistema de $m$ funciones $f_1 : X \to R, \dots$ $\dots, f_m : X \to R$, y sea dado, sobre un conjunto $Y \subset R^m$, la función $g(y) =$ $= g(y_1, \dots, y_m)$, $y \in Y$.

Si para cualquier punto $x \in X$ se cumple la inclusión $(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in Y$, entonces tiene sentido hablar sobre la función compuesta $g(f_1, \dots, f_m) : X \to R$, es decir, la función, que pone en correspondencia a cada punto $x \in X$ el número $g(f_1(x), \dots, f_m(x))$. La función $g(f_1, \dots, f_m)$ se llama también composición de las funciones $f_1, \dots, f_m$ y $g$.

Analizaremos los límites

$$y_k^{(0)} = \lim_{x \to x^{(0)}} f_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, m, \tag{19.12}$$

donde $x^{(0)}$ es o bien un punto de $R^n$ y entonces es un punto adherente del conjunto $X$, o bien $x^{(0)} = \infty$ y entonces $X$ es un conjunto no acotado. Para hacer más sencillo el enunciado del teorema nos limitaremos al caso, cuando todos los límites (19.12) son finitos.

**Teorema 2.** *Supongamos tiene sentido la función compuesta* $g(f_1, \dots, f_m)$. *Si existen los límites finitos* (19.12),

$$y^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) \tag{19.13}$$

*y existe el límite finito o infinito* $\lim\limits_{y \to y^{(0)}} g(y)$ *entonces existe también el límite* $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} g(f_1(x), \dots, f_m(x))$ *de la función compuesta* $g(f_1, \dots, f_m)$, *además*

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f_1(x), \dots, f_m(x)) = \lim_{y \to y^{(0)}} g(y). \tag{19.14}$$

**Corolario.** *Si tiene sentido la función compuesta* $g(f_1, \dots, f_m)$, *las funciones* $f_1, \dots, f_m$ *son continuas por el conjunto X en el punto* $x^{(0)} \in X \subset R^n$, *y la función g es continua por el conjunto Y en el punto* $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)})) \in Y \subset \subset R^m$, *entonces la función compuesta* $g(f_1, \dots f_m)$, *es continua por el conjunto X en el punto* $x^{(0)}$.

De esta forma, dicho brevemente, se puede decir, que una función continua de funciones continuas es una función continua.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Sean $z_0 = \lim\limits_{y \to y^{(0)}} g(y)$ y $U(z_0)$ un entorno, dado arbitrariamente, del punto $z_0$. Entonces, según la definición de límite de la función $g$ en el punto $y^{(0)}$, existe un entorno $U(y^{(0)})$ del punto $y^{(0)}$, tal que si

$$y \in U(y^{(0)}) \cap Y, \tag{19.15}$$

entonces

$$g(y) \in U(z_0). \tag{19.16}$$

Señalemos ahora que existe $\eta > 0$, para el cual el entorno cúbico

$$P(y^{(0)}, \eta) = \{y = (y_1, \dots, y_m) : |y_k - y_k^{(0)}| < \eta,\ k = 1, 2, \dots, m\}$$

está contenido en el entorno $U(y^{(0)})$:

$$P(y^{(0)}, \eta) \subset U(y^{(0)})$$

y por lo tanto,

$$P(y^{(0)}, \eta) \cap Y \subset U(y^{(0)}) \cap Y. \tag{19.17}$$

De acuerdo con esta inclusión, de (19.15) — (19.16) se deduce que si

$$y \in P(y^{(0)}, \eta) \cap Y \tag{19.18}$$

entonces

$$g(y) \in U(z^{(0)}). \tag{19.19}$$

Más adelante, por la existencia de los límites finitos (19.12), para cada $k = 1, 2, \dots, m$ existe un entorno $U_k(x^{(0)})$ del punto $x^0$ tal que para

$$x \in U_k(x^{(0)}) \cap X \tag{19.20}$$

se cumple la inclusión

$$f_k(x) \in U(y_k^{(0)}, \eta). \tag{19.21}$$

Hagamos

$$U(x^{(0)}) = \bigcap_{k=1}^{m} U_k(x^{(0)}). \tag{19.22}$$

Por cuanto $U_k(x^{(0)})$ es un conjunto abierto, entonces el conjunto $U(x^{(0)})$ como intersección de un número finito de conjuntos abiertos, también es abierto (véase el lema 4 en el p. 18.2). Además, cada entorno $U_k(x^{(0)})$ contiene el punto $x^{(0)}$, por lo que su intersección también lo contiene. Por consiguiente, el conjunto $U(x^{(0)})$, siendo abierto y conteniendo el punto $x^{(0)}$, es su entorno.

Si $x \in U(x^{(0)}) \cap X$, entonces, según (19.22) simultáneamente para todos los $k = 1, 2, \dots, m$ se cumplen las inclusiones (19.20) y por lo tanto, la inclusión (19.21), lo que por (19.13) significa que

$$(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in P(y^{(0)}, \eta). \tag{19.23}$$

Pero por cuanto la función compuesta $g(f_1, \dots, f_m)$ está definida sobre el conjunto $X$, entonces para todos los $x \in X$ es válida la inclusión

$$(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in Y.$$

Así pues, finalmente, si

$$x \in U(x^{(0)}) \cap X, \tag{19.24}$$

entonces

$$(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in P(y^{(0)}, \eta) \cap Y \tag{19.25}$$

y por consiguiente, por (19.18) — (19.19),

$$g(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in U(z_0),$$

y esto significa que la función compuesta $g(f_1, \dots, f_m)$ tiene límite en el punto $x^{(0)}$ igual a $z_0$:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f_1(x), \dots, f_m(x)) = z_0 = \lim_{y \to y^{(0)}} g(y). \ \square$$

El corolario se deriva directamente del teorema en virtud de la definición (19.9) de continuidad de una función. En efecto, por cuanto $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f_k(x) = f_k(x^{(0)}) = y_k^{(0)}$, $k = 1, 2, \dots, m$, y $\lim\limits_{y \to y^{(0)}} g(y) = g(y^{(0)})$, entonces, según el teorema

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f_1(x), \dots, f_m(x)) = \lim_{y \to y^{(0)}} g(y) =$$
$$= g(y^{(0)}) = g(y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) = g(f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)})),$$

es decir, la función compuesta $g(f_1, \dots, f_m)$ efectivamente es continua en el punto $x^{(0)}$.

OBSERVACIÓN. Como en el caso unidimensional, si en el conjunto de definición de la función $g$ se encuentra un entorno $U(y^{(0)})$ del punto $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$, donde $y_k^{(0)}$, $k = 1, 2, \dots, m$, se definen por las igualdades (19.12), entonces existe un entorno $U(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$ tal que para las restricciones de las funciones $f_1, \dots$ $\dots, f_m$ sobre la intersección $X \cap U(x^{(0)})$ — denotémoslas, respectivamente, $f_{1\,0}, \dots, f_{m\,0}$ — está definida la composición $g(f_{1\,0}, \dots, f_{m\,0})$.

Esto se deduce de la existencia de los límites (9.12). Para convencerse de esto es suficiente en la demostración del teorema, en calidad de entorno $U(y^{(0)})$, tomar un entorno, que se contenga en el conjunto de definición de la función $g$, entonces el entorno $U(x^{(0)})$ allí construido (véase (19.22)) será el buscado.

Con ayuda del teorema 2 se puede establecer fácilmente la continuidad de la mayor parte de las funciones, que se encuentran en la práctica, precisamente de las así llamadas funciones elementales de varias variables.

**Definición 8.** *Las funciones, que se obtienen de las variables $x_1, \ldots, x_n$ con ayuda de un número finito de composiciones de funciones elementales de una sola variable, de operaciones de adición, multiplicación y división, se llaman funciones elementales de las variables $x_1, \ldots, x_n$.*

Por ejemplo, la función $f(x, y) = xe^{y \operatorname{sen} \frac{xy}{x+y}}$ es una función elemental de dos variables $x$ e $y$. Efectivamente,

$$f(x, y) = xw, \quad w = e^v, \quad v = yz, \quad z = \operatorname{sen} t, \quad t = \alpha/\beta,$$
$$\alpha = xy, \quad \beta = x + y.$$

Del teorema 2 y de la conservación de la continuidad en los puntos correspondientes durante las operaciones aritméticas sobre las funciones continuas (véase el p. 19.3) se deduce que *cualquier función elemental de cualquier número de variables es continua en cada punto de su dominio.*

## 19.6. TEOREMAS ACERCA DE LAS FUNCIONES CONTINUAS SOBRE LOS CONJUNTOS

La función $f$ se llama *continua sobre el conjunto $X$*, si ella es continua por este conjunto en cada uno de sus puntos. A veces en este caso se dice también que la función *$f$ es continua en el conjunto $X$.*

Demostremos una serie de teoremas acerca de las funciones continuas sobre los conjuntos. Estos teoremas se demuestran de una forma análoga a los teoremas correspondientes para funciones de una sola variable. Los analizaremos partiendo de supuestos suficientemente generales, esto permitirá aclarar más profundamente, con qué están relacionadas las propiedades de las funciones continuas analizadas. Comencemos con una generalización del teorema de Weierstrass (véase el p. 6.1) para el caso de varias dimensiones. La definición de una serie de conceptos, que se analizarán a continuación, como por ejemplo, acotación de una función, cotas superior e inferior de una función, véase en el p. 5.1.

**Teorema 3.** *Toda función, continua sobre un compacto, está acotada en él y alcanza su cota superior e inferior* *).

DEMOSTRACIÓN. Sea la función $f$ continua sobre el compacto $A \subset R^n$ y sea $M = \sup_A f$. Escojamos por analogía con el caso unidimensional (véase la demostración del teorema 1 en el p. 6.1) una sucesión de números $a_m$, tales que $\lim_{m \to \infty} a_m = M$ y $a_m < M$, $m = 1, 2, \ldots$ .

---

*) Dicho de otra forma, una función continua sobre un compacto toma en él su valor máximo y su valor mínimo.

Para cada $m = 1, 2, \ldots$ existe un punto $x^m \in A$, tal que $f(x^{(m)}) > a_m$. Ya que el conjunto $A$ es un compacto, entonces de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ se puede extraer una subsucesión convergente $\{x^{(m_k)}\}$, cuyo límite $x^{(0)}$ se encuentra en $A$: $\lim\limits_{k \to \infty} (x^{(m_k)}) = x^{(0)} \in A$.

Para cualquier $k = 1, 2 \ldots$ es válida la desigualdad $a_{m_k} < f(x^{(m_k)}) \leqslant M$. Pasando al límite en ésta, cuando $k \to \infty$, obtenemos $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^{(m_k)}) = M$. En virtud de la continuidad de la función $f$ en el punto $x^{(0)}$ por el conjunto $A$ tenemos $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^{(m_k)}) = f(x^{(0)})$, y, por lo tanto, $M = f(x^{(0)})$.

De esta forma, la cota superior de la función $f$ es finita, y por esto la función $f$ está acotada superiormente; además, esta cota superior se alcanza en el punto $x^{(0)} \in A$. Análogamente se demuestra que la función $f$ está acotada inferiormente y que su cota inferior se alcanza en cierto punto del conjunto $A$. $\square$

Pasemos ahora a analizar la generalización del teorema de Cauchy sobre los valores intermedios (véase el p. 6.2) para el caso de las funciones de varias variables.

**Teorema 4.** *Sea la función $f$ definida y continua en la región $G \subset R^n$, entonces, al tomar dos valores cualesquiera en $G$, la función $f$ toma en $G$ también cualquier valor, que se encuentra entre ellos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función $f$ continua en la región $G \subset R^n$, sean $x^{(1)} \in G$, $x^{(2)} \in G$, $f(x^{(1)}) = a$, $f(x^{(2)}) = b$ y por ejemplo, $a < b$. Sea más adelante $c$ cualquier número tal que $a < c < b$. Según la definición de región (véase las definiciones 25 y 26 en el p. 18.2), existe una curva $x(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, tal que $x(\alpha) = x^{(1)}$, $x(\beta) = x^{(2)}$ y $x(t) \in G$ para todos los $t \in [\alpha, \beta]$.

Si $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, entonces, según la definición de curva, las funciones $x_i(t)$ son continuas sobre el segmento $[\alpha, \beta]$. De acuerdo con el teorema 2 sobre la superposición de las funciones continuas de varias variables, la función $f(x(t)) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ también es continua sobre el segmento $[\alpha, \beta]$. Ya que $f(x(\alpha)) = a$, $f(x(\beta)) = b$ y $a < c < b$, entonces por el teorema de Cauchy (véase el p. 6.2), existe un punto $t_0 \in (\alpha, \beta)$ tal que $f(x(t_0)) = c$. Suponiende $x^{(0)} = x(t_0)$, tenemos $x^{(0)} \in G$ y $f(x^{(0)}) = c$. $\square$

**Corolario.** *La función $f$ definida y continua en la región cerrada $\overline{G}$, al tomar dos valores cualesquiera, toma también en $G$ cualquier valor intermedio.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $G$ una región, la función $f$ definida y continua sobre su clausura $\overline{G}$, $x^{(1)} \in \overline{G}$, $x^{(2)} \in \overline{G}$, $f(x^{(1)}) = a$, $f(x^{(2)}) = b$ y sea para mayor exactitud $a < c < b$. Demostremos que existe un punto $\zeta \in G$, tal que $f(\zeta) = c$.

Tomemos el número $\varepsilon > 0$ definido por la igualdad

$$\varepsilon = \min\{c - a, b - c\}.$$

En virtud de la continuidad de la función $f$ en el punto $x^{(1)}$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que si $x \in U(x^{(1)}; \delta) \cap \overline{G}$, entonces $|f(x) - f(x^{(1)})| < \varepsilon$ y, por lo tanto, $|f(x) - a| < c - a$ y, en particular, $f(x) < c$. El punto $x^{(1)} \in \overline{G}$, es decir, el punto $x^{(1)}$ es un punto adherente del conjunto $G$, por esto en el entorno $U(x^{(1)}; \delta)$ a ciencia cierta existe un punto perteneciente a $G$; designémoslo por $y^{(1)}$. De esta forma, $y^{(1)} \in U(x^{(1)}; \delta) \cap G$, y por esto $f(y^{(1)}) < c$. Por un método análogo se demuestra la existencia del punto $y^{(2)} \in G$, tal que $f(y^{(2)}) > c$. De la existencia en la región $G$ de los puntos $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ con las propiedades señaladas, según el teorema 4, se deriva la existencia en $G$ del punto $\zeta$ tal que $f(\zeta) = c$. □

Señalemos que ni en la demostración del propio teorema 4, ni en la demostración de su corolario se ha utilizado el hecho de que el conjunto $G$ es abierto. Se ha utilizado solamente el hecho de que cualesquiera dos puntos de este conjunto pueden ser unidos por una curva perteneciente a él, es decir, que el conjunto es linealmente conexo.

Ejercicio 4. Supongamos que la función $f$ es continua y toma valores de signos distintos en un conjunto abierto. Demuéstrese que el conjunto de puntos en los cuales $f \neq 0$ es un conjunto abierto, pero no es una región.

**Problema 16.** Constrúyase un ejemplo de región $G$, en cuya clausura $\overline{G}$ no existen dos puntos tales que no puedan ser unidos por una curva continua en $\overline{G}$.

## 19.7. CONTINUIDAD UNIFORME DE LAS FUNCIONES. MÓDULO DE CONTINUIDAD

Junto con el concepto de continuidad de una función en un punto, en el análisis matemático juega un papel importante el así llamado concepto de continuidad uniforme de una función sobre un conjunto.

**Definición 9.** *La función $f(x)$, definida sobre el conjunto $X \subset R^n$, se llama uniformemente continua sobre $X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que para cualesquiera dos puntos $x \in X$, $x' \in X$, que satisfacen la condición*

$$\rho(x, x') < \delta, \tag{19.26}$$

*se cumple la desigualdad*

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{19.27}$$

Señalemos que si la función $f$ es uniformemente continua sobre el conjunto $X$, entonces ella es sencillamente continua sobre $X$, es decir, es continua en cada punto $x^{(0)} \in X$. Para convencerse de esto, es suficiente, por ejemplo, en (19.26) y (19.27) poner $x' = x^{(0)}$.

Si la función $f$ es continua en cada punto $x \in X$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe solamente un $\delta = \delta(\varepsilon; x)$ tal que, para todos los $x' \in X$, que satisfacen la condición $\rho(x, x') < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. En este caso, la elección de $\delta$ depende no solo de $\varepsilon$, sino, en general, del punto $x$.

Subrayemos que cuando la función $f$ es uniformemente continua sobre el conjunto $X$, la elección del $\delta$ correspondiente depende sólo del $\varepsilon$ y no depende de la elección de los puntos analizados del conjunto $X$.

Lo dicho se ve claramente cuando se escriben las definiciones señaladas con ayuda de los símbolos lógicos. La condición de continuidad de la función $f$ sobre el conjunto $X$ tiene la forma

$$(\forall\varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists\delta > 0)(\forall x' \in X), (\rho(x', x) < \delta) : |f(x') - f(x)| < \varepsilon,$$

y la condición de su continuidad uniforme sobre $X$, la forma

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in X,\ \forall x' \in X,\ \rho(x', x) < \delta) : |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Ejemplos. 1. La función $f(x) = x$ es uniformemente continua sobre todo el eje numérico, o sea, si es dado $\varepsilon > 0$, es suficiente tomar $\delta = \varepsilon$, en este caso si $|x - x'| < \delta$, entonces en virtud de la igualdad $f(x) = x$, $f(x') = x'$ obtenemos $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

2. La función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, no será uniformemente continua sobre su dominio, es decir, sobre el eje numérico, del cual se ha eliminado el punto $x = 0$. En efecto, si tomamos, por ejemplo, $\varepsilon = 1$, entonces para cualquier $\delta > 0$ tan pequeño como se quiera se encuentran los puntos $x$ y $x'$, por ejemplo, los puntos de la forma

$$x = 1\bigg/\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \quad \text{y} \quad x' = 1\bigg/\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right)$$

($n$ es un número natural suficientemente grande) tales que $|x - x'| < \delta$ y junto con esto $|f(x) - f(x')| > 1$.

En calidad de criterio suficiente para la continuidad uniforme de las funciones de una variable sobre un intervalo señalemos el siguiente.

**Lema 2.** *Si la función $f(x)$ está definida y tiene derivada acotada en un intervalo $(a, b)$, entonces es uniformemente continua sobre este intervalo.*

En efecto, si $|f'(x)| \leqslant c$ ($c$ es una constante) sobre $(a, b)$, entonces con ayuda de la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange (véase el p. 11.2) obtenemos $|f(x') - f(x)| = |f'(\xi)(x' - x)| \leqslant c|x' - x|$,

$$a < x < b, \quad a < x' < b, \quad a < \xi < b. \qquad (19.28)$$

Por esto, para $\varepsilon > 0$ es suficiente tomar $\delta = \varepsilon/c$; en este caso si $|x' - x| < \delta$, $a < x < b$, $a < x' < b$, entonces según (19.28) es válida la desigualdad $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ lo que significa la continuidad uniforme de la función $f$ sobre $(a, b)$. □

Un resultado análogo tiene lugar para cualquier intervalo, finito o infinito. Una generalización de este criterio para el caso de muchas dimensiones será dado en el p. 39.2.

Una significación fundamental tiene el siguiente teorema.

**Teorema 5 (de Cantor).** *Una función, continua sobre un compacto, es uniformemente continua.*

**Corolario.** *Una función, continua sobre un segmento, es uniformemente continua.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Utilicemos el método de reducción al absurdo. Supongamos que existe la función $f$ definida y continua sobre cierto compacto $X \subset R^n$, pero que no es uniformemente continua sobre éste. Entonces, existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ se encuentran los puntos $x_\delta' \in X$ y $x_\delta'' \in X$ (el índice "$\delta$" de los puntos significa que éstos dependen de la elección de $\delta$), para los cuales $\rho(x_\delta', x_\delta'') < \delta$ y junto con esto $|f(x_\delta'') - f(x_\delta')| \geqslant \varepsilon_0$. Tomemos una sucesión cualquiera de números, $\delta_m$, tal que $\lim\limits_{m \to 0} \delta_m = 0$, por ejemplo, $\delta_m = 1/m$, $m = 1, 2, \ldots$. Sea $x'^{(m)} = x'_{\delta_m}$, $x''^{(m)} = x''_{\delta_m}$ y, por lo tanto,

$$\rho(x'^{(m)}, x''^{(m)}) < \frac{1}{m}, \quad |f(x''^{(m)}) - f(x'^{(m)})| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (19.29)$$

El conjunto $X$ es un compacto, por esto de la sucesión $\{x'^{(m)}\}$ se puede extraer una subsucesión convergente $\{x'^{(m_k)}\}$, el límite $\xi$ de la cual pertenece al compacto $X$, $\lim\limits_{k\to\infty} x'^{(m_k)} = \xi \in X$. El punto $\xi$ es un punto adherente del conjunto cerrado $X$, y por esto $\xi \in X$.

Analicemos ahora la subsucesión $\{x''^{(m_k)}\}$ de la sucesión $\{x''^{(m)}\}$, correspondiente a la subsucesión $\{x'^{(m_k)}\}$. Demostremos que $\lim\limits_{k\to\infty} x''^{(m_k)} = \xi$. En efecto

$$\rho(x''^{(m_k)}, \xi) \leqslant \rho(x''^{(m_k)}, x'^{(m_k)}) + \rho(x'^{(m_k)}, \xi) < \frac{1}{m_k} + \rho(x'^{(m_k)}, \xi),$$

y ya que $\rho(x'^{(m_k)}, \xi) \to 0$ y $\dfrac{1}{m_k} \to 0$ cuando $k \to \infty$, entonces también $\rho(x''^{(m_k)}, \xi) \to 0$ cuando $k \to \infty$, y esto significa que $x''^{(m_k)} \to \xi$ cuando $k \to \infty$.

En virtud de la continuidad de la función $f$ en el punto $\xi \in X$ tenemos $f(x'^{(m_k)}) \to f(\xi)$ y $f(x''^{(m_k)}) \to f(\xi)$ cuando $k \to \infty$, y, por lo tanto

$$f(x''^{(m_k)}) - f(x'^{(m_k)}) \to 0 \quad \text{cuando} \quad k \to \infty. \tag{19.30}$$

Pero, por el método de construcción de las sucesiones $\{x'^{(m)}\}$ y $\{x''^{(m)}\}$ (véase (19.29))

$$|f(x''^{(m_k)}) - f(x'^{(m_k)})| \geqslant \varepsilon_0 \tag{19.31}$$

para todos los $k = 1, 2, \dots$ .

Es evidente, que las condiciones (19.30) y (19.31) se contradicen mutuamente. Esto demuestra el teorema 5. □

La validez del corolario se deriva del hecho de que el segmento es un compacto.

Señalemos que si se rechaza la exigencia de que el conjunto, sobre el cual la función analizada es continua, sea un compacto, ésta puede no ser uniformemente continua. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ está definida y es continua sobre el intervalo $(0, 1)$, el cual aunque es un conjunto acotado, no es cerrado; esta función no será uniformemente continua sobre el intervalo $(0, 1)$. La función $y = x^2$ está definida y es continua sobre todo el eje real, que aunque es un conjunto cerrado, no es acotado. Esta función tampoco es uniformemente continua sobre el eje real. La demostración de que las funciones $y = 1/x$ e $y = x^2$ no son uniformemente continuas sobre los conjuntos señalados será dada más adelante en este mismo punto.

Con frecuencia resulta más cómodo otro enfoque del concepto de continuidad uniforme, precisamente con ayuda del así llamado m ó d u l o  d e  c o n t i n u i d a d  d e funciones.

**Definición 10.** *Sea la función $f$ definida sobre el conjunto $X \subset R^n$. Se llama su módulo de continuidad $\omega(\delta; f; X)$ la función*

$$\omega(\delta, f, X) = \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} [f(x'') - f(x')], \quad x' \in X, \quad x'' \in X. \tag{19.32}$$

*A veces para mayor brevedad, en lugar de $\omega(\delta; f; x)$ se escribe sencillamente $\omega(\delta; f)$ o incluso $\omega(\delta)$.*

No es difícil convencerse de que

$$\sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} [f(x') - f(x'')] = \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} |f(x'') - f(x')|, \quad x' \in X, \quad x'' \in X,$$

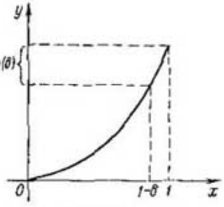



FIG. 96

es decir, en el segundo miembro de la igualdad (19.32) bajo el signo de la cota superior se puede escribir o no el signo de valor absoluto, con lo cual la magnitud de la cota superior señalada no varía.

Es evidente también que $\omega(\delta) \geqslant 0$.

Más adelante, si $0 < \delta_1 < \delta_2$, entonces

$$\{y : y = f(x'') - f(x'),\ \rho(x', x'') \leqslant \delta_1\} \subset$$
$$\subset \{y : y = f(x'') - f(x'),\ \rho(x', x'') \leqslant \delta_2\},$$

de donde

$$\sup_{\rho(x',x'') \leqslant \delta_1} [f(x'') - f(x')] \leqslant \sup_{\rho(x',x'') \leqslant \delta_2} [f(x'') - f(x')]$$

(ya que cuando se amplía el conjunto númerico, su cota superior puede solamente crecer), es decir, $\omega(\delta_1) \leqslant \omega(\delta_2)$, dicho de otra forma, *el módulo de continuidad es una función creciente.*

**Problema 17.** Sea $G$ una región en $R^n$. Demuéstrese que si $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\omega(\delta; f; G)}{\delta} = 0$, entonces $f$ es una función constante.

Ejemplos. 1. Hallemos $\omega(\delta)$ para la función $y = x^2$, $-\infty < x < +\infty$.

Para cualquier $\delta > 0$ y un $x_0$ arbitrario dado, tenemos:

$$\omega(\delta; x^2) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} (x''^2 - x'^2) \geqslant x_0^2 - (x_0 - \delta)^2 = 2x_0\delta - \delta^2. \tag{19.33}$$

Esta desigualdad se cumple para todos los $x_0$ y ya que para cualquier $\delta$ dado tenemos $\lim\limits_{x_0 \to +\infty} (2x_0\delta - \delta^2) = +\infty$, entonces de (19.33) obtenemos

$$\omega(\delta; x^2) = +\infty, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Hallemos ahora el módulo de continuidad de la función $y = x^2$ sobre el segmento $[0; 1]$. Intuitivamente está claro que ya que el módulo de continuidad $\omega(\delta)$ describe según la definición el mayor incremento de la función sobre un segmento de longitud $\delta$, entonces, para obtener el módulo de continuidad de la función en el caso dado se debe tomar el segmento $[1 - \delta, \delta]$, sobre el cual la función $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, crece más rápidamente: el módulo de continuidad coincide con el incremento de la función sobre este segmento (fig. 96):

$$\omega(\delta) = f(1) - f(1 - \delta) = 1 - (1 - \delta)^2 = 2\delta - \delta^2.$$

Analíticamente esto se comprueba de la forma siguiente. Sea $0 \leqslant x'' - \delta \leqslant \leqslant x' \leqslant x'' \leqslant 1$, entonces, en virtud de la desigualdad

$$x''^2 - x'^2 \leqslant x''^2 - (x'' - \delta)^2 = 2x''\delta - \delta^2 \leqslant 2\delta - \delta^2,$$

obtenemos

$$\omega(\delta, x^2) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} (x''^2 - x'^2) \leqslant 2\delta - \delta^2, \tag{19.34}$$

pero si se toma $x' = 1 - \delta$, $x'' = 1$, entonces

$$\omega(\delta; x^2) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} (x''^2 - x'^2) \geqslant 1 - (1 - \delta)^2 = 2\delta - \delta^2. \tag{19.35}$$

De las estimaciones (19.34) y (19.35) se deduce, que sobre el segmento $[0; 1]$ tenemos $\omega(\delta; x^2) = 2\delta - \delta^2$.

2. Analicemos la función $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Por una parte,

$$\omega\left(\delta; \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} \left|\operatorname{sen}\frac{1}{x''} - \operatorname{sen}\frac{1}{x'}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} \left(\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x''}\right| + \left|\operatorname{sen}\frac{1}{x''}\right|\right) \leqslant \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} 2 = 2.$$

Por otra parte, eligiendo $x_n'' = 1/\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $x_n' = 1/\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right)$ y fijando $n$ tal que $|x_n'| \leqslant \delta/2$, $|x_n''| \leqslant \delta/2$ y por esto $|x_n'' - x_n'| \leqslant |x_n'| + |x_n''| \leqslant \delta$ tendremos

$$\omega\left(\delta, \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \geqslant \operatorname{sen}\frac{1}{x_n''} - \operatorname{sen}\frac{1}{x_n'} = 1 + 1 = 2.$$

De las estimaciones obtenidas se deduce que $\omega\left(\delta; \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = 2$.

3. Analicemos la función $y = \frac{1}{x}$ sobre el intervalo $(0; 1)$.

Para cualquier $\delta$, $0 < \delta < 1$, tenemos

$$\omega\left(\delta; \frac{1}{x}\right) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} \left(\frac{1}{x''} - \frac{1}{x'}\right) = \sup_{x' \leqslant x'' \leqslant x' + \delta} \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + \delta} \overset{*)}{=} \frac{\delta}{x_0(x_0 + \delta)} \to +\infty \quad \text{cuando} \quad x_0 \to +0.$$

De esta forma, $\omega(\delta; 1/x) = +\infty$.

En los términos del módulo de continuidad, la continuidad uniforme puede ser expresada de la forma siguiente.

---

*) Aquí $x_0$ es tal que $0 < x_0 < 1 - \delta$.

**Teorema 6.** *Para que la función $f$ definida sobre el conjunto $X$ sea uniformemente continua sobre este conjunto, es necesario y suficiente, que*

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta; f; X) = 0. \tag{19.36}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea la función $f$ uniformemente continua sobre el conjunto $X$, es decir se cumplen las condiciones (19.26) y (19.27); entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_\varepsilon > 0$, tal que si $x' \in X$, $x'' \in X$, $\rho(x', x'') < \delta_\varepsilon$, entonces $|f(x'') - f(x')| \leq \varepsilon/2$. De aquí se deduce que para cualquier $\delta < \delta_\varepsilon$ se cumpla la desigualdad

$$\sup_{\rho(x', x'') \leq \delta} |f(x'') - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

es decir, si $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, entonces $\omega(\delta) < \varepsilon$. Esto significa que $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$. La necesidad de la condición (19.36) queda demostrada.

Demostremos la suficiencia de la condición (19.36). El cumplimiento de la condición (19.36) significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_\varepsilon > 0$, tal que si $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, entonces $\omega(\delta, f, X) < \varepsilon$. Elijamos cualquiera de los $\delta$ señalados. Entonces cuando $\rho(x', x'') < \delta$, $x' \in X$, $x'' \in X$, tendremos (véase (19.32)): $|f(x'') - f(x')| \leq \omega(\delta, f, X) < \varepsilon$, es decir, la función $f$ es uniformemente continua sobre $X$. □

Hemos visto anteriormente que sobre el segmento $[0, 1]$ $\omega(\delta; x^2) = 2\delta - \delta^2$, por esto, $\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta; x^2) = 0$, y por lo tanto, la función $x^2$ es uniformemente continua sobre este segmento, como debe ser según el teorema 5. El módulo de continuidad de esta misma función $x^2$, pero analizado sobre todo el eje real, al igual que los módulos de continuidad $\omega\left(\delta, \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, y $\omega\left(\delta, \frac{1}{x}\right)$, $0 < x < 1$ no tienden hacia 0, cuando $\delta \to +0$ y por esto todas estas funciones no son uniformemente continuas sobre los conjuntos correspondientes.

Ejercicios. 5. Demuéstrese el teorema de Cantor sobre la continuidad uniforme de una función, continua sobre un compacto con ayuda del lema de Heine — Borel (véase el teorema 4 en el p. 18.3 y la observación después de él).

6. La función $f(x)$ continua sobre el segmento $[a, b]$ se llama *lineal a trozos*, si existe una partición del segmento $[a, b]$ en un número finito de segmentos $[x_{i-1}, x_i]$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

tal que la función $f(x)$ es lineal sobre cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Demuéstrese que cualquier función $F(x)$ continua sobre el segmento $[a, b]$ puede ser aproximada con cualquier exactitud por una función lineal a trozos, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función $f(x)$ lineal a trozos, tal que para todos los $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad $|F(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Introduzcamos ahora una serie de conceptos, que serán útiles en el futuro.

**Definición 11.** *Sea $X \subset R^n$. El número (finito o infinito) $d = \sup_{\substack{x' \in X,\\ x'' \in X}} \rho(x', x'')$ se llama diámetro del conjunto $X$ y se designa por $d(X)$.*

Ejercicio 7. Sea $Q^n$ una bola $n$-dimensional con centro en cierto punto $x^{(0)}$ y de radio $r$: $Q^n = O(x^{(0)}, r)$, entonces $d(Q^n) = 2r$. Demuéstrese que el conjunto $X$ es acotado si y sólo si $d(X) < +\infty$.

**Definición 12.** *Sea la función $f$ definida sobre el conjunto $X$; entonces el valor del módulo de continuidad $\omega(\delta, f, X)$ cuando $\delta$ es igual al diámetro del conjunto E, es decir, $\omega(d(X), f, X)$ se llama oscilación de la función $f$ sobre el conjunto $X$ y se designa por $\omega(f; X)$ o sencillamente por $\omega(f)$.*

Es evidente, que por (19.16)

$$\omega(f; X) = \sup_{\substack{x' \in X, \\ x'' \in X}} [f(x'') - f(x')].$$

Recordemos que si en el segundo miembro de esta igualdad tomamos la cota superior de los valores absolutos de las diferencias que aparecen allí, obtenemos el mismo valor.

OBSERVACIÓN. De lo dicho en este párrafo y el anterior, particularmente, es evidente, que todas las particularidades referentes a las cuestiones relacionadas con las funciones de varias variables, pueden ser vistas con bastante claridad en los casos bidimensionales y tridimensionales. Gracias a la elección afortunada de las definiciones y notaciones, las demostraciones de los teoremas se trasladan automáticamente del caso de $n = 2$ al caso $n$-dimensional arbitrario, llevando a veces sólo a una complicación técnica de la notación. El caso cuando $n = 2$ tiene la ventaja de su evidencia geométrica y de una notación más sencilla, cuando en ella participan las coordenadas de los puntos. Por eso, para mayor claridad y sencillez en la exposición, como regla, analizaremos detalladamente sólo el caso cuando $n = 2$ ó $n = 3$, y en el caso de un $n$ arbitrario sólo enunciaremos los resultados correspondientes o incluso sólo señalaremos la posibilidad de su generalización para el caso de un $n$ arbitrario. Si durante el análisis de alguna cuestión cuando $n > 3$ surgen algunas dificultades específicas, entonces esta custión se analizará detalladamente en el caso general.

## § 20. DERIVADAS PARCIALES. DIFERENCIABILIDAD DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

### 20.1. DERIVADAS PARCIALES Y DIFERENCIALES PARCIALES

Analicemos primeramente el caso de las funciones de tres variables.

**Definición 1.** *Supongamos que en cierto entorno del punto $(x_0 y_0, z_0)$ está dada la función $u = u(x, y, z)$. Si fijamos las variables $y$ y $z$: $y = y_0$, $z = z_0$, obtenemos una función de una variable $x$: $u = u(x, y_0, z_0)$. La derivada habitual (véase el p. 9.1) de esta función en el punto $x = x_0$ se llama derivada parcial de la función $u(x, y, z)$ en el punto $(x_0, y_0, z_0)$ por $x$ y se designa por $\dfrac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$.*

De esta forma,

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial u(x, y_0, z_0)}{\partial x}\right|_{x = x_0}$$

Señalemos que la designación de la derivada parcial según la variable $x$ por $\dfrac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$ es tradicional. Hubiera sido más correcto escribir $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, ya que $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ es un símbolo único, que designa una nueva función, cuyo valor se analiza en el punto $(x_0, y_0, z_0)$.

Si recordamos la definición de derivada $\dfrac{du}{dx}$ (véase el p. 9.1), entonces, por esta definición, se puede escribir

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x},$$

o, si introducimos la notación $u(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0) = \Delta_x u$ ($\Delta_x u$ es el incremento de la función por la variable $x$),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

De forma análoga se introducen las derivadas parciales por $y$ y $z$:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = \left.\frac{du(x_0, y, z_0)}{dy}\right|_{y = y_0},$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = \left.\frac{du(x_0, y_0, z)}{dz}\right|_{z = z_0}$$

ó

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta^y u}{\Delta y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta^z u}{\Delta z},$$

donde $\Delta_y u$ y $\Delta_z u$ son los incrementos de la función por las variables $y$, $z$ respectivamente.

Por analogía con las funciones de una variable, las funciones lineales $\dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}\,dz$ de las variables $dx$, $dy$, $dz$ llamadas *diferenciales de las variables independientes*, se llaman *diferenciales parciales* de la función $u(x, y, z)$ según las variables $x$, $y$, $z$ recpectivamente y se designan por

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx, \quad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y}\,dy, \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z}\,dz.$$

Definiciones análogas tienen lugar para cualquier número de variables.

Si la función $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ está definida en cierto entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, entonces por definición

$$\frac{\partial f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{\partial x_i} \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{df(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{dx_i}\right|_{x_i = x_i^{(0)}} \tag{20.1}$$

o, lo que es lo mismo, omitiendo el símbolo del argumento, $\dfrac{\partial y}{\partial x_i} = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_{x_i} y}{\Delta x_i}$, donde $\Delta_{x_i} y = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Para designar la derivada parcial $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ se utilizan también símbolos $y_{x_i}$ ó $f_{x_i}$.

*La diferencial parcial* $d_{x_i} y$ se define por la fórmula

$$\partial_{x_i} y \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i, \quad -\infty < dx_i < +\infty, \tag{20.2}$$

y de esta forma es una función lineal de la variable $dx_i$, llamada ***diferencial de la variable independiente*** $x_i$. Aquí, siempre $i = 1, 2, \ldots, n$. En el caso cuando $n = 1$, la derivada parcial coincide con la derivada ordinaria, y la diferencial parcial con la diferencial ordinaria.

Subrayemos que $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ es un símbolo único, es decir, que en él el numerador y el denominador no tienen sentido independiente. Por otra parte, la derivada parcial $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$, naturalmente, puede ser escrita también en la forma de cociente de dos diferenciales: $\dfrac{\partial y}{\partial x_i} = \dfrac{\partial_{x_i} y}{dx_i}$.

De la definición de las derivadas parciales, como derivadas ordinarias con la condición de que se han fijado todas las variables excepto una, por la cual se toma la derivada, se deduce que al calcular las derivadas parciales se pueden utilizar las reglas del cálculo de las derivadas ordinarias. Supongamos, por ejemplo, que se exige hallar la derivada $\partial z/\partial y$ de la función $z = xye^{x/y}$. Para esto, fijando en esta fórmula $x$, obtenemos una función de una variable $y$; calculando su derivada, tendremos:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{x/y} + xye^{x/y} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x(y - x)e^{x/y}}{y}.$$

Para concluir este punto señalemos que de la continuidad de la función de $n$ variables en un punto dado, no se deriva la existencia de sus derivadas parciales en este punto. El ejemplo correspondiente para el caso cuando $n = 1$ fue presentado anteriormente (véase el p. 9.2). Es importante señalar, que cuando $n \geqslant 2$ incluso de la existencia todas las derivadas parciales en cierto punto, no se deduce la continuidad de la función en este punto *). Esto es natural por cuanto la condición de continuidad de la función de varias variables en un punto impone determinadas limitaciones sobre su comportamiento cuando se acerca a este punto por todas las direcciones, mientras que la existencia de las derivadas parciales en el punto significa que la función satisface determinadas condiciones acercándose al punto señalado sólo en la dirección de los ejes coordenados.

---

*) Recordemos que para $n = 1$, es decir, para la función de una variable, de la existencia de la derivada en un punto se deriva también que la función es continua en este punto (véase el p. 9.2).

Para convencerse evidentemente de esto, analicemos la función $f(x, y)$ igual a cero si $xy = 0$, y a 1, si $xy \neq 0$. Es evidente que $f(x, 0) \equiv f(0, y) \equiv 0$, y, por lo tanto,

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Sin embargo, esta función es discontinua en el punto $(0, 0)$, ya que, por ejemplo, su límite a lo largo de la recta $y = x$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ es igual a 1, y $f(0, 0) = 0$.

Más aún, existen funciones, que tienen derivadas parciales en todos los puntos y a pesar de esto, son discontinuas. Ejemplo de tales funciones es la función

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & \text{cuando} \quad x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{cuando} \quad x = y = 0. \end{cases} \tag{20.3}$$

Esta función tiene derivadas parciales en todo el plano y es discontinua en el punto $(0, 0)$ (¿por qué?).

### 20.2. DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES EN UN PUNTO

Analicemos primeramente el caso de las funciones de dos variables. Sea la función $z = f(x, y)$ definida en cierto $\delta$-entorno $U = U(M_0; \delta)$ del punto $M_0 = (x_0, y_0)$ y sea (fig. 97)

$$M = (x, y) \in U(M_0; \delta), \quad \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0$$

y, por lo tanto,

$$\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta.$$

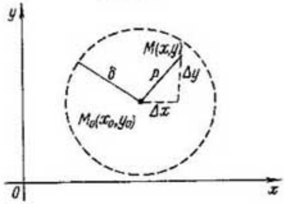
Sea, finalmente, $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Habitualmente $\Delta z$ se llama *incremento total de la función*; este nombre se explica por el hecho de que aquí, en general, todas las variables independientes reciben incrementos distintos de cero.

**Definición 2.** *La función $z = f(x, y)$ se llama diferenciable en el punto $(x_0, y_0)$, si existen dos números $A$ y $B$ tales que*

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{20.4}$$

FIG. 97



*donde, cuando $\rho \neq 0$:*

$$\alpha(\Delta x; \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho, \quad \lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0. ^{*)} \tag{20.5}$$

De (20.4) se deduce que $\alpha(0, 0) = 0$.

Junto con esto señalemos que el valor de la función $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ en el punto (0, 0) no está definido por la fórmula (20.5).

**Definición 3.** *En el caso de la diferenciabilidad de la función $f$ en el punto $(x_0, y_0)$ la función lineal $A\Delta x + B\Delta y$, de las variables $\Delta x$ y $\Delta y$ se llama diferencial total o sencillamente diferencial de la función $f$ en el punto $(x_0, y_0)$ y se designa por $dz$.*

De esta forma $dz = A\Delta x + b\Delta y$.

En lugar de $\Delta x$ y $\Delta y$ se utilizan también las notaciones equivalentes $dx$ y $dy$, es decir, se escribe $dz = A\,dx + B\,dy$. De (20.5) se deduce que

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0. \tag{20.6}$$

La función $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, que tiene la propiedad (20.6), la designaremos, por analogía con las funciones de una variable, por $o(\rho)$ cuando $\rho \to 0$ $^{**)}$. Utilizando esta notación, la definición de diferenciabilidad se puede escribir en la forma

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \rho \to 0. \tag{20.7}$$

**Lema 1.** *La condición (20.5) es equivalente a la condición*

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \quad \rho \neq 0 \tag{20.8}$$

donde $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que se cumple la condición (20.5), es decir, $\alpha = \varepsilon\rho$, $\rho \neq 0$, donde $\varepsilon \to 0$ cuando $\rho \to 0$; entonces

$$\alpha = \varepsilon\rho = \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} =$$

$$= \varepsilon \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta x + \varepsilon \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta y = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$. Señalando que

---

$^{*)}$ Recordemos que por lo acordado, la notación $\lim\limits_{\rho \to 0} f$ es equivalente a la notación $\lim\limits_{M \to M_0} f$, donde $\rho = \rho(M, M_0)$.

$^{**)}$ En general para las funciones $\alpha$ y $\beta$ de varias variables $\alpha = o(\beta)$ cuando $x \to x^{(0)}$, $x \in E \subset R^n$, $x^{(0)} \in R^n$, si $\alpha(x) = \varepsilon(x)\beta(x)$, donde $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)}, \\ x \in X}} \varepsilon(x) = 0$. En este caso diremos que la función $\alpha$ es infinitesimal en comparación con la función $\beta$ cuando $x \to x^{(0)}$, $x \in X$.

$\left|\dfrac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| \leqslant 1$, $\left|\dfrac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| \leqslant 1$, tenemos $|\varepsilon_1| \leqslant |\varepsilon|$, $|\varepsilon_2| \leqslant |\varepsilon|$ de donde $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_1 = \lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_2 = 0$, es decir, se obtiene una representación de la función $\alpha$ en la forma (20.8).

Supongamos que al revés se cumple la condición (20.8), es decir, $\alpha = \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$, $\rho \neq 0$ donde $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\rho \to 0$; entonces

$$\alpha = \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\varepsilon_2\right)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = \varepsilon\rho$$

donde $\varepsilon = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\varepsilon_1 + \dfrac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\varepsilon_2$ y, por lo tanto, $|\varepsilon| \leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$; por esto $\varepsilon \to 0$ cuando $\rho \to 0$. De esta forma, se obtiene la representación de la función $\alpha$ en la forma (20.5). □

**Teorema 1.** *Si la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en el punto $(x_0, y_0)$, entonces ella es continua en este punto.*

En efecto, ya que $|\Delta x| \leqslant \rho$ y $|\Delta y| \leqslant \rho$, entonces de las fórmulas (20.4) y (20.5) se deduce que $\Delta z \to 0$ cuando $\rho \to 0$, lo que implica la continuidad de la función $f$ en el punto $(x_0, y_0)$. □

**Teorema 2.** *Si la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en el punto $(x_0, y_0)$ y $dz = Adx + Bdy$ es su diferencial en este punto, entonces en el punto $(x_0, y_0)$ existen todas las derivadas parciales de la función $f$ y*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B. \tag{20.9}$$

*De esta forma,*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy. \tag{20.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de diferenciabilidad (véase (20.4) y (20.8)),

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y, \quad \rho \neq 0,$$

donde

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon_1 = \lim_{\rho\to 0}\varepsilon_2 = 0. \tag{20.11}$$

Suponiendo $\Delta y = 0$, obtenemos $\Delta z = \Delta_x z = A\Delta x + \varepsilon_1\Delta x$, donde $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1 = 0$ (esto se deduce de (20.11), y ya que, suponiendo $\Delta y = 0$, obtenemos $\rho = |\Delta x|$). De aquí,

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \varepsilon_1, \tag{20.12}$$

donde para $\Delta x \to 0$ el segundo miembro tiende hacia el límite igual a $A$, por esto, también el primer miembro para $\Delta x \to 0$ tiene el mismo límite, y esto significa (véase (20.1)) que en el punto $(x_0, y_0)$ existe la derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial x} = A$. Análogamente, suponiendo en (20.4) $\Delta x = 0$ y pasando al límite, cuando $\Delta y \to 0$ obtenemos $\dfrac{\partial z}{\partial y} = B$. □

**Corolario.** *Si la función $f(x, y)$ es diferenciable en el punto $(x_0, y_0)$, entonces esta diferencial es única.*

La unicidad de la diferencial se deriva directamente de la fórmula (20.9), ya que las derivadas parciales en el punto dado se determinan unívocamente.

Recordando las definiciones de las diferenciales parciales (véase (20.2)), la fórmula (20.10) se puede escrbir en la forma

$$dz = d_x z + d_y z,$$

es decir, la diferencial total de la función (cuando existe) es la suma de sus diferenciales parciales.

Señalemos que la afirmación, inversa al teorema 2, no tiene lugar: existen funciones que tienen todas sus derivadas parciales en todos los puntos del plano, pero no son diferenciables en cierto punto. Como ejemplo puede servir la función (20.3), citada en el punto anterior: en el punto (0, 0) esta función es discontinua, de donde, por el teorema 1 se deriva que en el punto (0, 0) no es diferenciable.

De lo dicho se deduce que no siempre la expresión $d_x z + d_y z$, cuando tiene sentido, es la diferencial total de la función. La relación entre la diferenciabilidad de la función en un punto y la existencia en este punto de las derivadas parciales es más complicada que la relación entre la diferenciabilidad y la existencia de la derivada para la función de una variable.

Enunciemos las condiciones de suficiencia en términos de las propiedades de las derivadas parciales para la diferenciabilidad de las funciones.

**Teorema 3.** *Supongamos que la función $z = f(x, y)$ en cierto entorno del punto $(x_0, y_0)$ tiene las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ las que son continuas en el punto $(x_0, y_0)$; entonces la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en este punto.*

**Corolario.** *Si la función $z = f(x, y)$ tiene, en cierto entorno del punto $(x_0, y_0)$,* las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ *y además estas derivadas parciales son continuas en el punto $(x_0, y_0)$, entonces la función $z = f(x, y)$ también es continua en este punto.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Designemos por $U(\delta)$ el $\delta$-entorno del punto $(x_0, y_0)$, en el cual está definida la función $f$, al igual que sus derivadas parciales $f_x$ y $f_y$. Elijamos $\Delta x$ y $\Delta y$ tales que $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(\delta)$. Notando que

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)],$$

apliquemos a las expresiones que se encuentran entre los corchetes y que son incrementos de las funciones por una variable, la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange (véase el p. 11.2). Esto es posible, ya que la función $f(x, y_0 + \Delta y)$, analizada como función de una variable $x$, tiene sobre el segmento con extremos en los puntos $x_0$ y $x_0 + \Delta x$ derivada (que es la derivada parcial según $x$ de la función $f$), por esto es continua sobre el segmento indicado. De esta forma, la función $f(x, y_0 + \Delta y)$ satisface todas las condiciones, bajo las cuales fue demostrada la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange. Análogamente se comprueba la posibilidad de aplicación de la fórmula de Lagrange a la función $f(x_0, y)$, analizada como función de una variable $y$, sobre el segmento con extremos en los puntos $y_0$ e $y_0 + \Delta y$. Entonces

$$\Delta z = f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y,$$

$$0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1, \quad (20.13)$$

además, $\theta_1$ y $\theta_2$ dependen, naturalmente, de la elección del punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, es decir, de $\Delta x$ y $\Delta y$.

Si

$$f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0) = \varepsilon_1,$$

$$f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f_y(x_0, y_0) = \varepsilon_2, \quad (20.14)$$

entonces, por la continuidad de las derivadas parciales $f_x$ y $f_y$ en el punto $(x_0, y_0)$ tenemos

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0. \quad (20.15)$$

Obteniendo de (20.14) las expresiones para $f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)$ y $f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)$ y sustituyéndolas en (20.13), obtenemos:

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \quad (20.16)$$

lo que en virtud del cumplimiento de la condición (20.15), significa que la función $f$ es diferenciable en el punto $(x_0, y_0)$ (véanse (20.4) y (20.8)). □

El corolario del teorema se deduce del hecho de que una función diferenciable en cierto punto es también continua en éste (véase el teorema 1).

El teorema 3 tiene una significación importante, relacionada con el hecho de que el concepto de diferenciabilidad de una función desempeña un papel de primer orden en una serie de secciones de la teoría de funciones de varias variables. Sin embargo, la comprobación directa de la diferenciabilidad de una función (por ejemplo, para aclarar las posibilidades de aplicación de unos u otros teoremas) con frecuencia es muy difícil, mientras que la comprobación de la continuidad de las derivadas parciales, para el cálculo de las cuales se tiene un aparato analítico muy cómodo, resulta más fácil.

**Definición 4.** *La función, que tiene en cierto punto (o sobre cierto conjunto, respectivamente) derivadas parciales continuas, se llama continuamente diferenciable en este punto (sobre este conjunto, respectivamente).*

Comparemos la definición de diferenciabilidad de una función (definición 2) y la definición de diferenciabilidad continua (definición 4). La diferenciabilidad de una función en un punto, implica la existencia en este punto de la diferencial, es decir, la validez para este punto de la fórmula (20.4). Lo que la función sea continuamente diferenciable en un punto, significa que sus derivadas parciales en este punto son continuas. De esta forma, la diferenciabilidad de una función está relacionada con el concepto de diferencial, y la diferenciabilidad continua está relacionada con el concepto de derivadas parciales. Conjuntamente con esto, de la diferenciabilidad continua en un punto (sobre un conjunto abierto) se deduce la diferenciabilidad en este punto (sobre este conjunto respectivamente); en esto reside la afirmación del teorema 3.

En el futuro necesitaremos de algunas propiedades auxiliares de las funciones $\varepsilon_1$ y $\varepsilon_2$ de la fórmula (20.16).

**Definición 5.** *Sean $A$ y $B$ dos conjuntos planos, $A \subset R^2_{xy}$, $B \subset R^2_{uv}$ y sea la función $f = f(x, y, u, v)$ definida para $(x, y) \in A$, $(u, v) \in B$.*

*La función $f$ se llama uniformemente tendiente hacia cero sobre el conjunto $A$ de las variables $x$, $y$ cuando $(u, v) \to (u_0, v_0)$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todos los $(u, v)$ que satisfacen la condición $\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} < \delta$, $(u, v) \neq (u_0, v_0)$ y todos los $(x, y) \in A$ se cumple la condición $|f(x, y, u, v)| < \varepsilon$.*

La definición general de tendencia uniforme de la función hacia un límite, será dada en el p. 39.4.

**Teorema 4.** *Sea la función $z = f(x, y)$ continuamente diferenciable sobre el conjunto abierto $G \subset R^2$. Entonces*

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \tag{20.17}$$

*donde las funciones $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x, y, \Delta x, \Delta y)$ y $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$ tienden uniformemente hacia cero cuando $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ sobre cualquier compacto $A \subset G$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A$ un compacto, perteneciente a $G$. Entonces los conjuntos cerrados $A$ y $R^2 \setminus G$ no se intersecan y ya que $A$ es acotado (véase el p. 18.3, teorema 3), entonces $d = \rho(A, R^2 \setminus G) > 0$ (véase el lema 7 del p. 18.2).

El conjunto $A_{d/2} = \{(x, y) : \rho(x, y), A) \leqslant d/2)\}$ está contenido en el conjunto $G$ y es compacto (véase el lema 11 del p. 18.3).

Sea ahora $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < d/2$; entonces cuando $(x_0, y_0) \in A$ obtendremos (véase (20.13)):

$$(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \in A_{d/2}, \quad (x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \in A_{d/2},$$

y, por lo tanto, según las fórmulas (20.14), tenemos las desigualdades

$$|\varepsilon_1| \leqslant \omega(\rho; f_x; A_{d/2}), \quad |\varepsilon_2| \leqslant \omega(\rho; f_y; A_{d/2}),$$

donde, en sus segundos miembros, están los módulos de continuidad de las funciones $f_x$ y $f_y$, respectivamente. De la continuidad de las derivadas parciales $f_x$ y $f_y$ sobre el compacto $A_{d/2}$ se deduce que

$$\lim_{\rho \to 0} \omega(\rho; f_x; A_{d/2}) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\rho \to 0} \omega(\rho; f_y; A_{d/2}) = 0.$$

Por esto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todos los $\rho < \delta$ se cumplen las desigualdades

$$\omega(\rho; f_x; A_{d/2}) < \varepsilon, \quad \omega(\rho; f_y; A_{d/2}) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, para todos los $\rho < \delta$ y todos los $(x_0, y_0) \in A$ son válidas las desigualdades

$$|\varepsilon_1| < \varepsilon, \quad |\varepsilon_2| < \varepsilon.$$

Esto implica que las funciones $\varepsilon_1$ y $\varepsilon_2$ tienden uniformemente hacia cero cuando $\rho \to 0$ sobre el compacto $A$. □

OBSERVACIÓN. En las suposiciones del teorema 2, el incremento $\Delta z$ de la función, también es representable en la forma

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon\rho, \tag{20.18}$$

donde $\varepsilon = \varepsilon(x, y, \Delta x, \Delta y)$ tiende hacia cero uniformemente sobre cada uno de los compactos $A \subset G$, cuando $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. Para la demostración, es suficiente en la fórmula (20.18) poner $\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\rho} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\rho}$ (compárese con la demostración del lema al inicio de este punto).

Todas las definiciones y afirmaciones de este punto se extienden al caso de la función $y = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, de cualquier número $n$ de variables, definida en cierto entorno del punto $x^{(0)}$. Por ejemplo, la condición de diferenciabilidad en un punto dado $x^{(0)}$, en el caso general tendrá la forma siguiente:

$$\Delta y = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{20.19}$$

donde

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}, \quad \Delta y = f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}),$$

$$\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

además, en este caso $A_i = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

De esta forma, si la función $f$ es diferenciable, entonces

$$f(x) = f(x^{(0)}) + A_1(x_1 - x_1^{(0)}) + \dots + A_n(x_n - x_n^{(0)}) + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{20.20}$$

es decir, la función $f$ en el entorno del punto dado, salvo un infinitésimo de un orden más alto que $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^{(0)})^2}$ es igual a una función lineal *). Dicho de otra forma, la diferenciabilidad de una función en un punto dado significa que la función $f$ es "casi lineal" en un entorno de este punto; el sentido exacto de la expresión "casi lineal" está contenido en la fórmula (20.20).

En el caso cuando tiene lugar (20.19), la función lineal $\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \Delta x_n$ de las variables $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ (aquí, en lugar de $x^{(0)}$ está escrito $x$) se llama *diferencial de la función*, o más claro, diferencial total de la función en un punto dado $x$ y se designa por $df(x)$:

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \Delta x_n. \tag{20.21}$$

La diferencial, como toda función lineal de $n$ variables, está definida sobre todo el espacio $n$-dimensional $R^n$. De esta forma, *la fórmula* (20.21) *tiene sentido para*

---

*) Las funciones de la forma $y = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$, donde $c_i$ son constantes, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, se llaman *funciones lineales* de $n$ variables o lo que es lo mismo *funciones lineales del punto* $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$.

*todos los valores* $\Delta x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; al mismo tiempo que *la fórmula* (20.19) *tiene sentido sólo para aquellos que no salen fuera del dominio de la función* $f$.

Las variables $\Delta x_i$ se llaman también *diferenciales de las variables* $x_i$ y se designan por $dx_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Con esta notación la diferencial de la función $f$ se escribe en la forma

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\,dx_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\,dx_n.$$

Es evidente que $\Delta f(x) = df(x) + o(\rho)$ cuando $\rho \to 0$.

Si se analiza la diferencial cuando varía el punto $x = x(x_1, \dots, x_n)$ entonces ésta será una función de $2n$ variables: $x_1, \dots, x_n, \dots, dx_n$.

Los teoremas 1 — 4 del presente párrafo, de forma evidente, se generalizan para las funciones de $n$ variables, por esto no daremos sus enunciados.

## 20.3. DIFERENCIACIÓN DE LA FUNCIÓN COMPUESTA

**Teorema 5.** *Sean las funciones* $x(t)$ *e* $y(t)$ *de una variable* $t$, *diferenciables en el punto* $t_0$ *(lo que, como sabemos, es equivalente a la existencia de sus derivadas en el punto* $t_0$, véase el p. 9.2) *y sean* $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. *Si la función* $z = f(x, y)$ *es diferenciable en el punto* $(x_0, y_0)$ *entonces la función compuesta* $z = f(x(t), y(t))$ *definida en cierto entorno del punto* $t_0$, *tiene en* $t_0$ *derivada y esta derivada se expresa por la fórmula*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \tag{20.22}$$

*o más detalladamente,*

$$\frac{df(x(t_0), y(t_0))}{dt} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{dx(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{dy(t_0)}{dt}.$$

DEMOSTRACIÓN. La función $f(x, y)$, por la definición de diferenciabilidad de una función, está definida en cierto entorno del punto $(x_0, y_0)$. De la diferenciabilidad de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ se deduce su continuidad en el punto $t_0$. Por esto, según la observación al teorema 2 en el p. 19.4, en cierto entorno del punto $t_0$ está definida la función compuesta $f(x(t), y(t))$.

La diferenciabilidad de la función $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0)$ significa que su incremento total $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ es representable en la forma

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y + \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \tag{20.23}$$

donde la función $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ es tal que $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. Aquí, como es habitual, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Definamos la función $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ en el punto $(0, 0)$, poniendo $\varepsilon(0, 0) = 0$ (compárese con la demostración del teorema 4 en el p. 9.7). Así la función definida $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ es continua en el punto $(0, 0)$.

Sea ahora $\Delta t$ el incremento de la variable $t$ y $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$. Dividamos ambos miembros de la igualdad (20.23) por $\Delta t$:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} \pm \varepsilon\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}. \qquad (20.24)$$

Cuando $\Delta t \to 0$ en virtud de la continuidad de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ en el punto $t_0$ obtenemos $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, por lo tanto, también $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \rho = 0$. De aquí, según el teorema sobre la composición de funciones continuas (véase el p. 19.3), $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. Señalemos, por último, que existe el límite finito

$$\lim_{\Delta t \to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}.$$

De todo esto se deduce que, cuando $\Delta t \to 0$ la parte derecha de la fórmula (20.24) tiende hacia el límite finito $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ $(t = t_0)$, por esto, también la parte izquierda de esta fórmula, es decir, $\frac{\Delta z}{\Delta t}$, tiende hacia el mismo límite, y esto significa que en el punto $t_0$ existe la derivada $\frac{dz}{dt}$ y se expresa por la fórmula (20.22). □

Señalemos que aunque en la fórmula definitiva de la derivada de una función compuesta (20.22) entran sólo las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la función $z = f(x, y)$, durante la demostración se ha usado esencialmente una propiedad más fuerte de esta función que la existencia de sus derivadas parciales, como es su diferenciabilidad.

Ejercicio 1. Muéstrese que cuando se rechaza la exigencia de diferenciabilidad de la función $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0)$ y cuando se supone solamente la existencia en este punto de las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ y la existencia de las derivadas $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ en el punto $t_0$, la fórmula (20.22), en general, no es válida, y, más aún, la función compuesta $f[x(t), y(t)]$ (se supone que tiene sentido), en general, no tiene derivada en el punto $t_0$.

**Corolario.** *Sean las funciones $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas en cierto entorno del punto $(u_0, v_0)$, y la función $z = f(x, y)$ definida en cierto entorno del punto $(x_0, y_0)$, donde $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$.*

*Si la función $f(x, y)$ es diferenciable en el punto $(x_0, y_0)$ y si en el punto $(u_0, v_0)$ existen las derivadas parciales $\frac{\partial x}{\partial u}$ y $\frac{\partial y}{\partial u}$ entonces en este punto $(u_0, v_0)$ existe también la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial u}$ de la función compuesta $z = f[x(u, v), y(u, v)]$, además*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \qquad (20.25)$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $v = v_0$ y analicemos la función compuesta $z = f[x(u, v_0), y(u, v_0)]$ de una variable $u$. Según el teorema 5, esta función está definida en cierto entorno del punto $u_0$ y tiene en este punto derivada. De esta forma, la derivada $\frac{\partial z}{\partial u}$ en el punto $(u_0, v_0)$ existe y de la fórmula (20.22) se deduce la fórmula (20.25). □

De forma análoga, si en el punto $(u_0, v_0)$ existen las derivadas parciales $\frac{\partial x}{\partial v}$ y $\frac{\partial y}{\partial v}$, entonces para la función compuesta $z = f(x(u, v), y(u, v))$ existe en el punto $(u_0, v_0)$ la derivada parcial por v y para ella es válida la fórmula

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Analicemos el caso general $n$-dimensional. *Supongamos en el entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ dada la función $y = y(x_1, \dots, x_n)$ y sobre cierto conjunto $E_t \subset R^k$ las funciones $x_i = x_i(t_1, \dots, t_k)$, $i = 1, 2, \dots, n$, tales que $x_i(t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)}) = x_i^{(0)}$. Si la función $y = y(x) = y(x_1, \dots, x_n)$ es diferenciable en el punto $x^{(0)}$ y si en punto $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)})$ existen las derivadas parciales $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$, $i = 1, 2, \dots, n$,* entonces la función compuesta $y(x(t))$ *tiene en el punto $t^{(0)}$ derivadas parciales $\frac{\partial y}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$, además*

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_i}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \tag{20.26}$$

Señalemos, que si en las suposiciones hechas las derivadas parciales $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ son continuas respectivamente en los puntos $x^{(0)}$ y $t^{(0)}$, entonces en virtud de la fórmula (20.26) las derivadas parciales de la función compuesta $y = y(x(t))$ también serán continuas en el punto $t^{(0)}$, por lo tanto, serán diferenciables en este punto (véase el teorema 3 en el p. 20.2). En el próximo punto será demostrada la diferenciabilidad de la composición de funciones con hipótesis más débiles.

## 20.4. INVARIANCIA DE LA FORMA DE LA PRIMERA DIFERENCIAL CON RESPECTO A LA ELECCIÓN DE LAS VARIABLES. REGLA DE CÁLCULO DE LAS DIFERENCIALES

**Teorema 6.** *Sea la función $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, definida en cierto entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, y las funciones $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, \dots, t_k)$, $i = 1, 2, \dots, n$, definidas en cierto entorno del punto $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)})$ y sea $x_i^{(0)} = x_i(t^{(0)})$, $i = 1, 2, \dots, n$.*

*En este caso, si la función $f(x)$ es diferenciable en el punto $x^{(0)}$ y las funciones $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, son diferenciables en el punto $t^{(0)}$, entonces la función compuesta $f(x(t)) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ está definida en cierto entorno del punto $t^{(0)}$ y es diferenciable en este punto. Además la diferencial $df$ de la función $f(x(t))$ en el punto $t^{(0)}$ puede ser escrita en las dos formas siguientes:*

$$df = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f(x(t^{(0)}))}{\partial t_j} dt_j, \tag{20.27}$$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i, \text{ donde } dx_i = dx_i(t)\Big|_{t = t^{(0)}} \tag{20.28}$$

DEMOSTRACIÓN. Ya que las funciones $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, están definidas en cierto entorno del punto $t^{(0)}$ y ya que de la diferenciabilidad de las funciones se deduce su continuidad, entonces la función compuesta $f(x(t))$ está definida en cierto entorno del punto $t^{(0)}$ (véase la observación al teorema 2 en el p. 19.4). Fijemos dos números cualesquiera $\delta > 0$ y $\eta > 0$ de tal forma que la función $f(x)$ estuviese definida sobre un $\eta$-entorno del punto $x^{(0)}$, las funciones $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, en un $\delta$-entorno del punto $t^{(0)}$, y que $(x_i(t), \dots, x_n(t)) \in U(x^{(0)}; \eta)$ cuando $t \in U(t^{(0)}; \delta)$. Entonces, sobre el entorno $U(t^{(0)}; \delta)$ está definida la función compuesta $f(x(t))$. La posibilidad de elegir tales números $\delta$ y $\eta$ (evidentemente $\delta$ depende de la elección de $\eta$) fue mostrada en el p. 19.4. La función $f(x)$ es diferenciable en el punto $x^{(0)}$; por esto, cuando $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} < \eta$ tenemos

$$\Delta f = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \Delta x_i + \varepsilon r, \tag{20.29}$$

donde $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ es tal que $\lim_{r \to 0} \varepsilon = 0$. Pongamos $\varepsilon(0, \dots, 0) = 0$. Definida complementariamente de esta forma la función $\varepsilon$ es continua en el punto $(0, \dots, 0)$.

Por la diferenciabilidad de las funciones $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, en el punto $t^{(0)}$ cuando $\rho = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \Delta t_j^2} < \delta$ obtenemos:

$$\Delta x_i = x_i(t_1^{(0)} + \Delta t_1, \dots, t_k^{(0)} + \Delta t_k) - x_i(t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_i + \varepsilon_i \rho, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{20.30}$$

donde $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Sustituyendo los valores de $\Delta x_i$ de (20.30) en (20.29), obtenemos

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_j + \beta, \tag{20.31}$$

donde

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \varepsilon_i \rho + \varepsilon r. \tag{20.32}$$

Cambiando el orden de la adición en (20.31), tendremos

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{k} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right) \Delta t_j + \beta. \tag{20.33}$$

Ahora, para demostrar que la función compuesta $f(x(t))$ es diferenciable en el punto $t^{(0)}$, es necesario demostrar que $\beta = o(\rho)$ cuando $\rho \to 0$. Por la continuidad de las funciones $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ en el punto $t^{(0)}$ tenemos $\lim\limits_{\rho \to 0} \Delta x_i = 0$, y por lo tanto, $\lim\limits_{\rho \to 0} r = 0$. De aquí, en virtud del teorema sobre la composición de funciones continuas (véase el p. 19.2)

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon = 0. \tag{20.34}$$

De (20.32) tenemos:

$$\frac{\beta}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \varepsilon_i + \varepsilon \frac{r}{\rho}. \tag{20.35}$$

Demostremos que la relación $r/\rho$ es acotada. Utilizando la fórmula (20.30), obtenemos

$$\frac{r}{\rho} = \frac{1}{\rho} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} \leqslant \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|^{*)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left| \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right| \frac{|\Delta t_j|}{\rho} + \varepsilon_i.$$

Y como $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_i = 0$, entonces en cierto entorno del punto $t^{(0)}$ las funciones $\varepsilon_i$ son acotadas, y ya que $|\Delta t_j| \ / \ \rho \leqslant 1$, entonces, la función $r/\rho$ es acotada en cierto entorno del punto $t^{(0)}$. Por esto, de (20.34) y (20.35) se deduce que $\lim\limits_{\rho \to 0} (\beta/\rho) = 0$, es

---

*) Nos servimos de la desigualdad $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$, que es una consecuencia evidente de la desigualdad $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \left( \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i| \right)^2$ (véase (18.11)).

decir, que $\beta = o(\rho)$ cuando $\rho \to 0$. La diferenciabilidad de la función compuesta $f(x(t))$ en el punto $t^{(0)}$ queda demostrada.

De la fórmula (20.31) tenemos

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t} \Delta\partial t_j.$$

De aquí, observando que $\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_j = dx_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, precisamente obtenemos la fórmula (20.28). La fórmula (20.27) es la forma habitual para la diferencial (véase (20.21)). □

Formalmente ambas notaciones (20.27) y (20.28) de la diferencial de la función, son iguales: en ambas fórmulas, la diferencial es igual a la suma de los productos de las derivadas parciales por las diferenciales correspondientes, sin embargo, en el caso de la fórmula (20.27) $dt_j$ son las diferenciales de las variables independientes, y en el caso de la fórmula (20.28) $dx_i$ son las diferenciales de la función. Esta propiedad se llama *invariancia de la forma de la primera diferencial* con respecto a la elección de las variables.

OBSERVACIÓN 1. De la fórmula (20.33) se deduce que

$$df(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^{k} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right) dt_j.$$

Pero los coeficientes de la diferencial de la función en las diferenciales de las variables independientes se determinan unívocamente y son iguales a las derivadas parciales correspondientes, por esto, comparando esta fórmula con la fórmula (20.27), obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j},$$

es decir, otra vez la fórmula (20.26). Cierto es que esta vez ha sido deducida teniendo en cuenta limitaciones más fuertes que las anteriores; esta vez se ha supuesto la diferenciabilidad de las funciones $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, mientras que en el p. 20.3 se ha supuesto sólo la existencia para estas funciones de sus correspondientes derivadas parciales.

OBSERVACION 2. Si las funciones $f(x_1, \ldots, x_n)$ y $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_k) \in R^k$, $i = 1, 2, \cdots, n$, tienen derivadas parciales continuas en el punto $(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) \in R^n$ y en el punto $t^{(0)} \in R^k$, respectivamente, donde $x_i^{(0)} = x_i(t^{(0)})$, entonces según el teorema 3 del p. 20.2 (véanse también las observaciones al final del p. 20.2 sobre el caso general), son diferenciables en los puntos señalados y por esto satisfacen las condiciones del teorema 6. Por consiguiente, para ellas se cumplen las hipótesis de este teorema y la fórmula, que se deduce de éste, para el cálculo de las derivadas parciales de la función compuesta (véase la observación anterior).

La invariancia de la fórmula de la primera diferencial se utiliza ampliamente durante el cálculo práctico de las diferenciales y de las derivadas parciales. Si $u$ y $v$ son funciones de cierto número de variables, entonces con ayuda de las fórmulas (20.28), se obtienen fácilmente las siguientes:

$$1.\ d(u + v) = du + dv.$$
$$2.\ d(uv) = v\,du + u\,dv. \tag{20.36}$$
$$3.\ d(u/v) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Demostremos, por ejemplo, la fórmula 3. Sea $z = u/v$, donde $u = u(x_1, \ldots, x_n), v = v(x_1, \ldots, x_n)$. Notando que $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}$ y $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$, según la fórmula (20.28) tenemos

$$dz = \frac{1}{v}du - \frac{u}{v^2}dv = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \ \square$$

Durante el cálculo de las diferenciales concretas de funciones de varias variables se pueden utilizar ampliamente las fórmulas obtenidas anteriormente por nosotros (véase el § 9), para las diferenciales de las funciones elementales. Señalemos para esto lo siguiente: sea la función $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ representada en la forma $y = F(u)$, donde $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Entonces, teniendo en cuenta las suposiciones correspondientes, por la fórmula (20.28),

$$dy = F'(u)du, \quad u = u(x_1, \ldots, x_n).$$

Por ejemplo, si $y = \operatorname{sen} u$, entonces $dy = \cos u\,du$; *si* $y = \ln u$, entonces $dy = \frac{du}{u}$; si $y = \operatorname{arctg} u$, entonces $dy = \frac{du}{1 + u^2}$, etc. (subrayamos que aquí en todos los casos $u = u(x_1, \ldots, x_n)$).

En calidad de ejemplo hallemos la diferencial de la función $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

El cálculo se realiza en el orden siguiente:

$$dz = d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + y^2/x^2}d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}\ \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Si se exige calcular las derivadas parciales de las funciones de varias variables, en particular, si es necesario calcular todas las derivadas, entonces es conveniente calcular la diferencial de esta función, y en este caso las derivadas parciales buscadas serán los coeficientes de las diferenciales correspondientes.

Así, en el ejemplo analizado $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, tomando los coeficientes de $dx$ y $dy$ de la expresión hallada por nosotros para la diferencial, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

OBSERVACIÓN 3. *Cualquier función $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ de $n$ variables puede ser analizada también, en cierto sentido, como una función de cualquier número de va-*

riables $n + m > n$, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{n+m}$. Precisamente, para cualquier función $f(x_1, \dots, x_n)$, dada sobre el conjunto $E \subset R^n$, definamos la función $f^*(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m})$ sobre el conjunto de puntos $(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m})$ tales que $(x_1, \dots, x_n) \in E$, $-\infty < x_j < +\infty$, $j = n + 1, \dots, n + m$, de la forma siguiente:

$$f^*(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m}) = f(x_1, \dots, x_n). \tag{20.37}$$

De esta forma, el estudio de la función de $n$ variables, como una función de $n + m$ variables, de hecho significa la prolongación, según la fórmula (20.37), de la función $f$ desde el conjunto de su definición $E \subset R^n$ sobre el conjunto

$$E^* = \{x_1, \dots, x_{n+m}) : (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad -\infty < x_j < +\infty,$$
$$j = n + 1, \dots, n + m\},$$

que se encuentra ya en el espacio $R^{n+m}$. Para la función $f^*$, obtenida, después de esta prolongación, tenemos

$$\frac{\partial f^*(x_1, \dots, x_{n+m})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial f^*(x_1, \dots, x_{n+m})}{\partial x_j} = 0, \quad j = n + 1, \dots, n + m,$$

por esto

$$df^*(x_1, \dots, x_{n+m}) = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f^*(x_1, \dots, x_{n+m})}{\partial x_i} dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} dx_i = df(x_1, \dots, x_n).$$

Por ejemplo, cuando decimos que la función de una variable $z = f(x)$, definida sobre un intervalo $(a, b)$, la analizamos como una función de dos variables $f(x) = F(x, y)$, $x \in (a, b)$, $-\infty < y < +\infty$, esto significa que la función $F(x, y)$ es constante, igual a $f(x)$ sobre cualquier recta que pase por el punto $x$ del intervalo $(a, b)$ del eje $Ox$ paralelamente al eje $Oy$. En este caso

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = f'(x), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0, \quad dF(x, y) = df(x),$$
$$a < x < b, -\infty < y < +\infty.$$

Será útil para el futuro señalar el hecho contrario, en un determinado sentido. Sea $E \subset R^n$. Si la función $f^*(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ definida sobre el conjunto

$$E^* = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad a < x_{n+1} < b\}$$

y

$$\frac{\partial f^*(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} = 0 \text{ sobre } E^*, \tag{20.38}$$

entonces, existe la función $f(x_1, \dots, x_n)$ de $n$ variables, definida sobre el conjunto $E$ y tal que $f^*(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n)$ para todos los $(x_1, \dots, x_n) \in E$, $x_{n+1} \in (a, b)$. En este caso, se dice que la función $f^*$ de hecho *no depende de* *la variable* $x_{n+1}$. En efecto, de la condición (20.38) se deduce que la función $f^*$ es constante como la función $x_{n+1}$ (véase el corolario 1 del teorema 3 del p. 11.2) para el punto dado $(x_1, \dots, x_n)$, es decir, fijando, cualquier $c \in (a, b)$ para cualquier punto $(x_1, \dots, x_n) \in E$ y $x_{n+1} \in (a, b)$, tenemos $f^*(x_1, \dots, x_{n+1}) = f^*(x_1, \dots, x_n, c)$. La función buscada $f$, evidentemente, se define por la igualdad $f(x_1, \dots$ $\dots, x_n) = f^*(x_1, \dots, x_n, c)$, además no depende de la elección de $c \in (a, b)$.

De lo dicho anteriormente, en particular, se deduce que las fórmulas (20.36) para las diferenciales siguen siendo válidas también en el caso cuando las funciones $u$ y $v$ dependan de un número distinto de variables, ya que siempre, en virtud del método señalado, este caso puede reducirse al caso analizado anteriormente para las funciones de una variable.

## 20.5. SENTIDO GEOMÉTRICO DE LAS DERIVADAS PARCIALES Y DE LA DIFERENCIAL TOTAL

Para una mejor evidencia geométrica y para no introducir nuevos conceptos, en este punto nos limitaremos al análisis de las funciones de dos variables.

Analicemos la función $z = f(x, y)$, definida sobre el conjunto abierto y plano $G$, es decir, sobre el conjunto $G$ que se encuentra sobre el plano $R^2$. Sea $(x_0, y_0) \in$ $\in G$ y supongamos que en el punto $(x_0, y_0)$ existe la derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Su sentido geométrico se obtiene inmediatamente de la definición de la derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, como una derivada ordinaria de la función $f(x, y)$ por $x$ para un $y$ dado y del sentido geométrico de la derivada ordinaria (véase el p. 9.3). En efecto, tomemos el círculo cerrado $Q$ de radio $r$ con centro en el punto $(x_0, y_0)$ y que se encuentra en $G$ [*]. Sea una curva dada por la representación

$$z = f(x, y_0), \quad y = y_0, \quad x_0 - r \leqslant x \leqslant x_0 + r,$$

es decir, la curva que se obtiene seccionando la gráfica de la función $z = f(x, y)$, $(x, y) \in Q$ con el plano $y = y_0$ (fig. 98). Como es conocido, $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} =$ $= \left.\dfrac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{x = x_0} = \operatorname{tg} \alpha$, donde $\alpha$ es el ángulo formado por la tangente a la gráfica de la función $f(x, y_0)$ en el punto $(x_0, f(x_0, y_0))$ con el eje $Ox$, es decir, el ángulo formado por la tangente a la curva $\gamma$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ con el eje $Ox$.

De esta forma,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha,$$

en esto consiste el sentido geométrico de la derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

---

[*] Tal círculo $Q$ siempre existe. En efecto, según la definición de conjunto abierto, existe un $\delta$-entorno $U$ del punto $(x_0, y_0)$, tal que $U \subset G$. Entonces el círculo cerrado $Q$ de radio $\delta/2$ con centro en el punto $(x_0, y_0)$, estará, a ciencia cierta, en $G$.

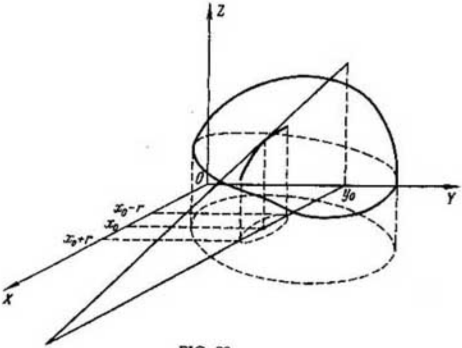



FIG. 98

De forma análoga se establece también el sentido geométrico de la derivada parcial $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ como tangente del ángulo de inclinación, formado por la tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a la curva obtenida seccionando la gráfica de la función $z = f(x, y)$, $(x, y) \in Q$ por el plano $x = x_0$ con el eje $Oy$.

En lo que respecta al sentido geométrico de la diferencial, entonces de las fórmulas (20.20) y (20.9) para nuestro caso, es decir, cuando $n = 2$, obtenemos

$$f(x, y) = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{20.39}$$
$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad z_0 = f(x_0, y_0).$$

La ecuación

$$z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) \tag{20.40}$$

es la ecuación del plano que pasa por el punto $(x_0, y_0, z_0)$ y que no es paralelo al eje $Oz$. Como sabemos, los coeficientes $A$ y $B$ se definen unívocamente por la relación (20.39), además

$$A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \tag{20.41}$$

y, por lo tanto, el plano (20.40) se define unívocamente por la relación (20.39). Este plano se llama *plano tangente* a la gráfica de la función $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, z_0)$.

De esta forma, llegamos a la definición siguiente.

**Definición 6.** *Se llama plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y)$ en el punto dado el plano tal que la diferencia entre su coordenada $z$ y el valor de la función $f(x, y)$ es una magnitud infinitesimal en comparación con $\rho$ cuando $\rho \to 0$.*

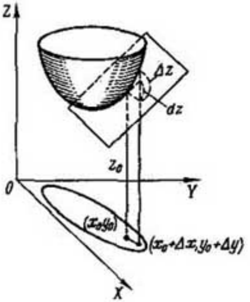



FIG. 99

En virtud de (20.41) la ecuación de este plano tangente tiene la forma

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0). \tag{20.42}$$

En adelante (véase el t. 2, el p. 50.4) presentaremos otro enfoque del concepto de plano tangente.

Suponiendo $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, el segundo miembro de la ecuación (20.42) lo escribemos en la forma

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Esta es la forma usual de escritura de la diferencial $dz$ de la función $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0)$ y por esto la ecuación (20.42) puede ser escrita en la forma:

$$z - z_0 = dz.$$

De esta forma, geométricamente *la diferencial total de la función en el punto* $(x_0, y_0)$ *es igual al incremento de la coordenada* $z$ del plano tangente a la gráfica de la función (fig. 99).

Más detalladamente, la diferencial

$$dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y, \quad \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0,$$

coincide con el incremento en el punto $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ de la coordenada $z$ del plano tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

## 20.6. GRADIENTE DE LA FUNCIÓN

Supongamos que la función $F(x, y)$ es diferenciable en el punto $(x_0, y_0)$ y la curva $\gamma$ es tal que las funciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, que son su forma paramétrica, satisfacen la ecuación

$$F(x, y) = 0,$$

es decir, por medio de ella está dada de forma implícita la curva $\gamma$. Sean $t_0 \in [a, b]$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, y las funciones $x(t)$, $y(t)$ diferenciables cuando $t = t_0$.

Diferenciando para $t = t_0$ la identidad $F(x(t), y(t)) = 0$, $a \leqslant t \leqslant b$, obtendremos

$$x_t' \frac{\partial F}{\partial x} + y_t' \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad t = t_0,$$

es decir, los vectores $(x'(t_0), y'(t_0))$ y $\left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ son ortogonales. El vector $a = (x_t', y_t')$, en el caso cuando es distinto de cero, como es conocido, un vector tangente a la curva $\gamma$ en el punto $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. El vector $\left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ se llama *gradiente de la función* $F$ en el punto $(x_0, y_0)$ y se denota por grad $F(x_0, y_0)$. De lo dicho se deduce que el gradiente de la función $F$ es ortogonal a la tangente de la curva dada implícitamente por la ecuación $F(x, y) = 0$. La recta, perpendicular a la tangente a la curva plana y que descansa en un mismo plano con ésta, se llama (véase el p. 17.3) *normal* a la curva dada.

De esta forma, el gradiente de la función $F$ es colineal con la normal a la curva, dada por la ecuación $F(x, y) = 0$, en el punto correspondiente.

En el caso de la función diferenciable $f(x_1, \ldots, x_n)$, se llama su gradiente el vector $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

## 20.7. DERIVADA RESPECTO A UNA DIRECCIÓN

Las derivadas parciales de la función son derivadas "por la dirección de los ejes coordenados". Es natural plantear la cuestión sobre la definición y el cálculo de la derivada respecto a cualquier dirección dada. Ante todo, definamos este concepto. Realicemos el análisis de esta cuestión en el ejemplo de las funciones de tres variables.

Sea la función $f$ definida en el $\delta$-entorno $U(M_0; \delta)$ del punto $M_0 \in R^3$ y sea $M_1 \in U(M_0; \delta)$. Tracemos una recta a través de los puntos $M_0$ y $M_1$. Por dirección positiva sobre esta recta tomaremos la dirección del vector $l = \overrightarrow{M_0M_1}$, es decir, la dirección desde el punto $M_0$ hacia el punto $M_1$. Para cualquier punto $M$ de esta recta, designemos por $M_0M$ la longitud orientada del segmento con origen en el punto $M_0$ y extremo en el punto $M$, es decir, la longitud de este segmento con signo positivo, si el vector $\overrightarrow{M_0M}$ tiene la misma dirección que el vector $l$, y con signo negativo en el caso contrario.

**Definición 7.** *El límite* $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$, *si existe, se llama derivada de la función $f$ en el punto $M_0$ respecto a la dirección del vector $l$ y se denota por* $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$.

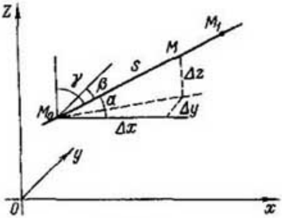



FIG. 100

Sea ahora dado, en el espacio $R^3$, un sistema de coordenadas $x, y, z$. Sean $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $M = (x, y, z)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$ y $s = M_0M$. Hallemos la relación entre las coordenadas del punto $M$ y la longitud oriendada $s$ del segmento $M_0M$. Sean $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ los ángulos formados por el vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ con los ejes $Ox$, $Oy$, y $Oz$ respectivamente, entonces (fig. 100)

$$x - x_0 = s\cos\alpha, \quad y - y_0 = s\cos\beta, \quad z - z_0 = s\cos\gamma.$$

A lo largo de la recta $M_0M$, la función $f$ es función de una variable $s$, más exactamente

$$f(x, y, z) = f(x_0 + s\cos\alpha, \quad y_0 + s\cos\beta, \quad z_0 + s\cos\gamma).$$

La derivada de esta función según $s$ (si naturalmente existe) es la derivada *de la función $f$ en el punto $M_0$ respecto a la dirección del vector $\overrightarrow{M_0M_1}$*.

Señalemos que los cosenos directores $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ del vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ a través de las coordenadas de los puntos $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ se definen de la siguiente forma:

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_0}{\rho}, \quad \cos\beta = \frac{y_1 - y_0}{\rho}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1 - z_0}{\rho}, \tag{20.43}$$
$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

La derivada respecto a la dirección se calcula según la regla de diferenciación de la función compuesta. Sea la función $f(x, y, z)$ diferenciable en el punto $(x_0, y_0, z_0)$ y sea

$$x = x_0 + s\cos\alpha, \quad y = y_0 + s\cos\beta, \quad z = z_0 + s\cos\gamma. \tag{20.44}$$

De acuerdo con la definición de derivada respecto a la dirección y la fórmula de la derivada de la función compuesta tenemos:

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial t} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} =$$
$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s\cos\alpha, y_0 + s\cos\beta, z_0 + s\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{s} =$$
$$= \left.\frac{df}{ds}\right|_{s=0} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\frac{dz}{ds},$$

pero de (20.44) se deduce que

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma, \tag{20.45}$$

por esto definitivamente

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial s} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma. \tag{20.46}$$

Esta es la fórmula buscada.

De esta forma, queda demostrado el teorema siguiente.

**Teorema 7.** *Sea la función $f$ diferenciable en el punto $(x_0, y_0, z_0)$. Entonces, en este punto la función $f$ tiene derivada respecto a cualquier dirección y esta derivada se halla por la fórmula* (20.46).

Es curioso señalar, que de la fórmula obtenida (20.46) para la derivada respecto a una dirección no se ve inmediatamente que esta derivada no depende de la elección del sistema de coordenadas. Esta independencia se deduce directamente de la definición de derivada respecto a una dirección, de donde a su vez se deriva, que la parte derecha de la fórmula (20.46) no depende de la elección del sistema de coordenadas rectangular cartesiano y se determina sólo por los puntos $M_0$ y $M_1$, o lo que es lo mismo, por el punto $M_0$ y el vector $\overrightarrow{M_0M_1}$.

El vector con coordenadas $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial z}$ se llama, como sabemos, *gradiente* de la función $f(M)$ en el punto $M_0$ y se designa por grad $f$. (Ya nos hemos encontrado con el concepto de gradiente de las funciones cuando analizamos las curvas dadas implícitamente: véase el p. 20.6.)

De esta forma, si $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ son versores coordenados, entonces

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{20.47}$$

Con frecuencia resulta cómoda la utilización del vector simbólico de Hamilton *)

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

llamado *nabla*. Es la notación de una determinada operación que se debe realizar sobre una u otra función.

Para la función $f$, según la definición, suponemos

$$\nabla f = \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Formalmente esta igualdad se puede analizar como el "producto" del vector $\nabla$ por el número $f$. Así, el grad $f$ y $\nabla f$ son las notaciones de una misma expresión.

---

*) W. Hamilton (1805 — 1865), matemático irlandés.

Sea ahora el vector $l$ unitario, y, por lo tanto, $l = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Con ayuda del gradiente, la fórmula para la derivada de la función $f$ respecto a la dirección $l$ se escribe de la forma siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \cos\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial f}{\partial z} = l \operatorname{grad} f, \tag{20.48}$$

donde en el segundo miembro se halla el producto escalar de los vectores $l$, y $\operatorname{grad} f$. De aquí, por cuanto $l$ es un vector unitario,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\operatorname{grad} f| \cos\varphi,$$

donde $\varphi$ es el ángulo formado por el vector $l$ y el $\operatorname{grad} f$. De esta fórmula se ve que si en el punto dado

$$|\operatorname{grad} f|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \neq 0,$$

entonces la derivada de la función diferenciable respecto a la dirección, alcanza su valor máximo en una única dirección, y precisamente en aquella para la cual $\cos\varphi = 1$, es decir, en la dirección del gradiente. De esto se deduce que para la función dada del punto $f(M)$, el gradiente en cada punto se determina unívocamente por la propia función, y no depende de la elección del sistema de coordenadas, como hubiera podido parecer de la fórmula (20.47).

En realidad, ante todo, si el gradiente es igual a cero en un sistema de coordenadas cartesianas, entonces es igual a cero también en cada sistema de coordenadas semejante. En efecto, la igualdad a cero del gradiente en un punto, por la fórmula (20.48), es equivalente a la igualdad a cero en este punto de las derivadas respecto a todas las direcciones, lo último no depende de la elección del sistema de coordenadas cartesianas, por cuanto de esta elección no depende la derivada respecto a la dirección. Si el gradiente no es igual a cero, entonces su independencia de la elección del sistema de coordenadas cartesianas se deduce directamente de su sentido geométrico demostrado anteriormente: la dirección del gradiente muestra la dirección del crecimiento más rápido de la función (es única), y su magnitud es igual a la derivada en este dirección.

Tomemos ahora cualquier curva continuamente diferenciable, sin puntos particulares, que pase por punto $(x_0, y_0, z_0)$, y al que el vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ sea su vector tangente. Designemos por $s$ la longitud variable del arco de esta curva, medida desde el punto $M_0$ en una dirección tal que el vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ de la dirección positiva sobre la tangente. Si $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ es una representación de esta curva, entonces, como sabemos (véase el p. 16.5), $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \cos\beta$, $\frac{dz}{ds} = \cos\gamma$, es decir, también se cumple (20.45). Por esto, si se toma la derivada en el punto $(x_0, y_0, z_0)$ de la función diferenciable $f(x, y, z)$ respecto a la curva dada, es decir, cuando $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, dicho de otra forma, se toma la derivada de la función $f(x(s), y(s), z(s))$ respecto a $s$, entonces para esta derivada será válida la fórmula (20.46). Esto significa que la derivada en cierto punto de la función a lo largo de la curva, que pasa por el punto señalado coincide con la derivada respecto a la dirección de la tangente a esta curva en este mismo punto.

Todo lo dicho se extiende a funciones de cualquier número $n$ de variables ($n \geqslant 2$). Enunciemos sólo la definición de la derivada respecto a una dirección.

Sea la función $f(x)$ definida en un entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, y sea $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ un punto de este entorno, $x^{(1)} \neq x^{(0)}$.

Tracemos una recta por los puntos $x^{(0)}$ y $x^{(1)}$. Su ecuación tiene la forma (véase (18.44) y (18.45))

$$x_i = x_i^{(0)} + s\cos\alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad -\infty < s < +\infty,$$

donde $\cos\alpha_i$ son los cosenos directores

$$l = (x_1^{(1)} - x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(1)} - x_n^{(0)}).$$

Analicemos la función dada $f$ sólo en los puntos de esta recta, es decir, analicemos la función

$$f(x_1^{(0)} + s\cos\alpha_1, \dots, x_n^{(0)} + s\cos\alpha_n).$$

*La derivada* $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ *de la función* $f(x_1, \dots, x_n)$ *en el punto* $x^{(0)}$ *en la dirección del punto* $x^{(1)}$, *o lo que es lo mismo, en la dirección* $(\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$, *se define como la derivada* $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ *de la función compuesta* $f(x_1^{(0)} + s\cos\alpha_1, \dots, x_n^{(0)} + s\cos\alpha_n)$.

En el caso, cuando la función $f$ es diferenciable en el punto $x^{(0)}$, entonces, por la fórmula para la derivada de la función compuesta, tenemos en este punto

$$\frac{\partial f}{\partial l} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\alpha_n.$$

Recordando la definición de gradiente de la función de $n$ variables (véase el p. 20.6), con ayuda del producto escalar de vectores $n$-dimensionales (véase (18.32)), la fórmula de la derivada de la función $f$ respecto a la dirección del vector $l$ para cualquier espacio $n$-dimensional $R^n$, se puede escribir en la forma (20.48), es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\operatorname{grad} f, l_0),$$

donde $l_0 = (\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$.

Para concluir señalemos que del hecho de que la función en cierto punto tiene derivadas respecto a todas las direcciones, no se deduce que la función en este punto es diferenciable. Por ejemplo, la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad y \neq x^2, \quad \text{ó} \quad x = y = 0, \\ 1, & \text{si} \quad y = x^2, \qquad x^2 + y^2 > 0, \end{cases}$$

tiene en el punto (0, 0) respecto a cualquier dirección derivada igual a cero. Sin embargo, en el punto (0, 0) la función $f$ es discontinua y de ningún modo diferenciable (fig. 101).

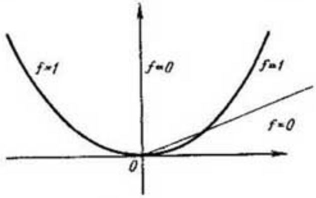



FIG. 101

## 20.8. EJEMPLO DE LA INVESTIGACIÓN DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Con ayuda de las derivadas parciales se puede estudiar el comportamiento de las funciones de varias variables, de forma semejante a como se investigó el comportamiento de las funciones de una variable con ayuda de su derivada. El problema de la búsqueda de los valores máximos y mínimos, lo estudiaremos más tarde, en los § 40 y § 43, aquí nos limitaremos sólo a un ejemplo del estudio de una función de dos variables, que nos permitirá obtener una desigualdad útil para el futuro.

Mostremos, que para cualesquiera $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $p > 1$, y el número $q$, definido por la igualdad

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{20.49}$$

es válida la desigualdad

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{20.50}$$

Ante todo, señalemos que la ecuación (20.49), que relaciona a los números $p$ y $q$, es equivalente a la relación

$$(p-1)(q-1) = 1, \tag{20.51}$$

la que es equivalente a la condición

$$q = \frac{p}{p-1}. \tag{20.52}$$

Esto se establece comparándolos directamente.

Para la demostración de la desigualdad (20.50), analicemos la función

$$F(x, y) = xy - \frac{x^p}{p} - \frac{y^q}{q}, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0. \tag{20.53}$$

Calculemos sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y - x^{p-1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x - y^{q-1}. \tag{20.54}$$

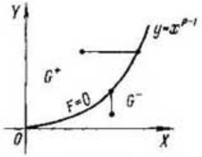



FIG. 102

De (20.51) se deduce que cuando $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, las ecuaciones

$$y - x^{p-1} = 0 \tag{20.55}$$

y

$$x - y^{q-1} = 0 \tag{20.56}$$

son equivalentes. De esta forma, los puntos $(x, y)$, que satisfacen tanto la condición $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0$, como lo condición $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$ descansan sobre la curva (20.55), o, lo que es lo mismo, sobre la curva (20.56).

En virtud de (20.49) y (20.52), a lo largo de la curva (20.55) tenemos:

$$F(x, x^{p-1}) = x^p - \frac{x^p}{p} - \frac{x^{(p-1)q}}{q} =$$
$$= x^p - \frac{x^p}{p} - \frac{x^p}{q} = x^p\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = 0. \tag{20.57}$$

Designemos ahora por $G^+$ el conjunto de todos los puntos, situados por encima de la curva (20.55) y sobre la propia curva:

$$G^+ \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) : y \geqslant x^{p-1},\ x \geqslant 0\},$$

y por $G^-$, el conjunto de todos los puntos del primer cuadrante (incluyendo el eje de las $x$), situados por debajo de esta curva y sobre ella misma:

$$G^- \overset{\text{def}}{=} \{(x, y); 0 \leqslant y \leqslant x^{p-1},\ x \geqslant 0\}.$$

Por las fórmulas (20.54) para $(x, y) \in G^+$, $y \neq x^{p-1}$ tenemos $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) > 0$, y para $(x, y) \in G^-$, $y \neq x^{p-1}$, respectivamente $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ (aquí se ha utilizado la equivalencia de las ecuaciones (20.55) y (20.56)). Por esto, a lo largo de cualquier segmento, situado en el conjunto $G^+$ y paralelo al eje de las $x$ (fig. 102), la función $F(x, y)$ crece estrictamente. Por lo tanto, si $(x, y) \in G^+$, $y \neq x^{p-1}$, entonces (véase (20.57))

$$F(x, y) < F(x, x^{p-1}) = 0.$$

De forma análoga, sobre cualquier segmento, situado en el conjunto $G^-$ y paralelo al eje de las $y$, la función $F(x, y)$ también crece estrictamente. Por esto, si

$(x, y) \in G^-$ e $y \neq x^{p-1}$, entonces otra vez

$$F(x, y) < F(x, x^{p-1}) = 0.$$

De esta forma, si $y \neq x^{p-1}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, entonces, siempre $F(x, y) < 0$.

Así pues, recordando la forma de la función $F$ (véase (20.53)), tenemos: si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, entonces

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{cuando} \quad b \neq a^{p-1},$$

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{cuando} \quad b = a^{p-1}.$$

Así la desigualdad (20.50) queda demostrada.

# § 21. DERIVADAS PARCIALES Y DIFERENCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

## 21.1. DERIVADAS PARCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

Sea dada la función $f(x, y)$. Entonces cada una de sus derivadas parciales (si naturalmente existen) $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, las que se llaman también *derivadas parciales de primer orden*, otra vez es una función de las variables independientes $x$, $y$ por lo tanto puede tener también derivadas parciales. La derivada parcial $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ se denota por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \text{o } f_{xx}, \quad \text{y } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \text{por} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}, \text{o } f_{xy}.$$

De esta forma,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = f_{xy}$$

y, análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Las derivadas $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}$ y $f_{yy}$ se llaman *derivadas parciales de segundo orden*. Analizando las derivadas parciales de éstas, obtendremos todas posibles derivadas parciales de tercer orden:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \text{etc.}$$

De forma análoga se definen las derivadas parciales de un orden arbitrario para las funciones de cualquier número de variables.

**Definición 1.** *La derivada parcial (respecto a cualquiera de las variables independientes) de la derivada parcial de orden $m - 1, m = 1, 2, \cdots$,* [*] *se llama derivada parcial de orden m.*

*La derivada parcial, obtenida por la diferenciación respecto a distintos variables, se llama derivada parcial mixta (cruzada). La derivada parcial, obtenida diferenciando sólo con respecto a una variable, se llama derivada parcial pura.*

El número de las distintas derivadas parciales cuando aumenta $m$, naturalmente, crece; sin embargo, resulta que para determinadas suposiciones muchas de ellas coinciden, precisamente, las derivadas parciales mixtas respecto a las mismas variables, no dependen del orden de diferenciación.

Más exactamente tiene lugar el teorema siguiente.

**Teorema 1.** *Sea la función $f(x, y)$, al igual que sus derivadas parciales $f_x, f_y, f_{xy}$ y $f_{yx}$, definida en un entorno del punto $(x_0, y_0)$, además $f_{xy}$ y $f_{yx}$ son continuas en este punto; entonces*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \tag{21.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea la función $f(x, y)$ definida, junto con sus derivadas $f_x, f_y, f_{xy}$ y $f_{yx}$, en el $\delta$-entorno del punto $(x_0, y_0)$ y sean $\Delta x$ y $\Delta y$ fijados, tales que $\Delta x^2 + \Delta y^2 < \delta^2$. Designaremos, al igual que antes (véase el p. 20.1), por el símbolo $\Delta_x$, respectivamente $\Delta_y$, al incremento de la función $f$ respecto al argumento $x$, respectivamente $y$, en el punto $(x_0, y_0)$ [**]. Introduzcamos la notación

$$\Delta_{xy}f = \Delta_x(\Delta_y f), \quad \Delta_{yx}f = \Delta_y(\Delta_x f)$$

y demostremos que

$$\Delta_{xy}f = \Delta_{yx}f. \tag{21.2}$$

En efecto,

$$\Delta_{xy}f = \Delta_x(\Delta_y f) = \Delta_x[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] =$$
$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]; \tag{21.3}$$

análogamente,

$$\Delta_{yx}f = \Delta_y(\Delta_x f) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] -$$
$$- [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)]. \tag{21.4}$$

Comparando (21.3) y (21.4), nos convencemos de la validez de la relación (21.2).

Hagamos ahora

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0);$$

entonces (21.3) se puede transcribir en la forma

$$\Delta_{xy}f = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0).$$

---

[*] Para comodidad de la notación, la propia función se considera *derivada parcial de orden cero.*

[**] Para la función dada $F(x, y)$ sus incrementos $\Delta_x$ y $\Delta_y$, en el punto dado $(x_0, y_0)$ se determinan por las fórmulas $\Delta_x F(x_0, y_0) = F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0)$, $\Delta_y F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0)$.

Debido a que en el entorno analizado del punto $(x_0, y_0)$ existe la derivada parcial $f_x$, la función $\varphi(x)$ es diferenciable sobre el segmento con extremos en los puntos $x_0$ y $x_0 + \Delta x$. Del teorema de Lagrange sobre los incrementos finitos, se deduce que

$$\Delta_{xy}f = \varphi'(x_0 + \theta_1\Delta x)\Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Pero $\varphi'(x) = f_x(x, y_0 + \Delta y) - f_x(x, y_0)$, y por esto

$$\Delta_{xy}f = [f_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0)]\Delta x.$$

Aplicando otra vez el mismo teorema de los incrementos finitos, pero ahora respecto a la variable $y$, tendremos

$$\begin{gathered}\Delta_{xy}f = f_{xy}(x + \theta_1\Delta x, \quad y_0 + \theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y,\\ 0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1.\end{gathered} \tag{21.5}$$

De un modo completamente análogo, suponiendo $\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)$, tenemos

$$\begin{aligned}\Delta_{yx}f = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) &= \psi'(y_0 + \theta_3\Delta y)\Delta y =\\ &= [f_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y) - f_y(x_0, y_0 + \theta_3\Delta y)]\Delta y =\\ &= f_{yx}(x_0 + \theta_4\Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y, \quad 0 < \theta_3 < 1, \quad 0 < \theta_4 < 1.\end{aligned} \tag{21.6}$$

Por (21.2), los primeros miembros de las igualdades (21.5) y (21.6), son iguales entre sí, por lo tanto, son iguales también los segundos; igualándolos y simplificándolos por $\Delta x\Delta y$, cuando $\Delta x \neq 0$ y $\Delta y \neq 0$, obtendremos

$$\begin{gathered}f_{xy}(x_0 + \theta_1\Delta x, \quad y_0 + \theta_2\Delta y) = f_{yx}(x_0 + \theta_4\Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y),\\ 0 < \theta_i < 1, \quad i = 1, 2, 3, 4.\end{gathered} \tag{21.7}$$

Por la continuidad de las derivadas parciales $f_{xy}$ y $f_{yx}$ en el punto $(x_0, y_0)$, pasando en (21.7) al límite cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, obtenemos (21.1). □

OBSERVACIÓN 1. Del teorema demostrado, por inducción, es fácil deducir, que si para una función de $n$ variables, las derivadas parciales mixtas de orden $m$ son continuas en un punto, entonces no depende del orden de diferenciación.

Esto se deduce del hecho de que dos sucesiones cualesquiera de diferenciación, que se diferencian sólo en el orden de diferenciación (es decir, tales que respecto a cada argumento fijo contienen el mismo número total de diferenciaciones), se puede convertir una en otra con un número finito de pasos, en cada uno de los cuales se cambia el orden de diferenciación respecto a dos variables, y las restantes permanecen fijas. De esta forma, en cada paso, de hecho, se analiza el cambio del orden de diferenciación de la función que tiene sólo dos variables, es decir, en este caso nos encontramos en las condiciones del teorema demostrado anteriormente. Así, el caso general se reduce al caso de las funciones de dos variables.

Aclaremos esto en un ejemplo. Demostremos, por ejemplo, que

$$f_{xyz} = f_{zyx}.$$

Por lo dicho anteriormente, tenemos la sucesión

$$f_{xyz} = (f_x)_{yz} = (f_x)_{zy} = (f_{xz})_y = (f_{zx})_y = (f_z)_{xy} = (f_z)_{yx} = f_{zyx}.$$

OBSERVACIÓN 2. Para concluir este punto señalemos, que, a primera vista, el teorema demostrado puede parecer que no tiene mucho contenido: para juzgar, si tiene lugar la igualdad $f_{xy} = f_{yx}$, es necesario, según este teorema, comprobar la continuidad de las funciones $f_{xy}$ y $f_{yx}$, y para esto parecería necesario conocerlas, pero si ya las conocemos, entonces sin ningún teorema podemos aclarar si son iguales o no. No obstante, el teorema 1 tiene sentido. El problema es que sobre la continuidad de una función se puede juzgar algunas veces a base de ciertos teoremas generales, sin tener que recurrir al cálculo concreto y a la investigación de la propia función. Así, sabemos que todas las funciones elementales de varias variables son continuas en sus dominios (véase el p. 19.4). Por otra parte, las derivadas parciales de las funciones elementales, también son elementales, por esto, si por ejemplo, la derivada de cierta función elemental está definida sobre un entorno de cualquier punto, entonces esta derivada también es continua en cada punto del entorno señalado.

**Problema 18.** Demuéstrese que si la función $f(x, y)$ está definida junto con sus derivadas parciales $f_x$, $f_y$ y $f_{xy}$ en un entorno del punto $(x_0, y_0)$, además la derivada parcial $f_{xy}$ es continua en el punto $(x_0, y_0)$, entonces en este punto existe la derivada parcial $f_{yx}$, y

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0).$$

La función que tiene en un punto (o, respectivamente, sobre un conjunto abierto) derivadas parciales continuas de todos los órdenes hasta un cierto orden $m$ inclusive, se llama *$m$ veces continuamente diferenciable* en este punto (sobre este conjunto).

Señalemos que para que la función tenga en el punto (sobre un conjunto abierto) derivadas parciales continuas de todos los órdenes hasta un cierto orden $m$ inclusive, es suficiente que tenga en este punto (sobre este conjunto) derivadas parciales continuas de orden $m$. En efecto, de la continuidad de todas las derivadas parciales de orden $m$ en el punto (sobre un conjunto abierto), según el corolario del teorema 3 en el p. 20.2, se deriva la continuidad de todas las derivadas parciales de orden $m - 1$, en el punto analizado (sobre el conjunto analizado). De la continuidad de las derivadas parciales de orden $m - 1$, se deriva (en el caso $m > 1$) la continuidad de las derivadas parciales de orden $m - 2$, etc.

## 21.2. DIFERENCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

La función de $2n$ variables $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, o, lo que es lo mismo, de los pares ordenados de puntos del espacio $n$-dimensional $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ del tipo

$$A(x, y) = A(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \sum_{i, k = 1}^{n} a_{ik} x_i y_k,$$

donde $a_{ik}$ son números dados ($i, k = 1, 2, \dots, n$), se llama *forma bilineal* de $x$ e $y$. Este nombre se explica por el hecho de que si uno de los puntos $x$ o $y$ es fijo, entonces la función será lineal respecto a las coordenadas de los puntos restantes.

La función $A(x, x)$ se llama *forma cuadrática*, correspondiente a la forma bilineal dada $A(x, y)$:

$$A(x, x) = A(x_1, \dots, x_n; x_1, \dots, x_n) = \sum_{i, k = 1}^{n} a_{ik} x_i x_k.$$

En el caso cuando $a_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, la forma bilineal $A(x, y)$ y la forma cuadrática $A(x, x)$ correspondiente a ella se llaman *simétricas*.

Por ejemplo, el producto escalar de dos vectores $x = (x_1, x_2 \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ del espacio euclídeo $n$-dimensional $R^n$

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

es una forma bilineal simétrica de los puntos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, y al cuadrado de la longitud del vector $|x|$ le corresponde su forma cuadrática:

$$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

En el futuro, para comodidad de la exposición, denotaremos las diferenciales no sólo por el símbolo $d$, sino también por el símbolo $\delta$, por ejemplo, escribiremos no sólo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad \text{sino también} \quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y,$$

además, a la diferencial de cualquier función la llamaremos también su primera diferencial.

Supongamos que la función $z = z(x, y)$ tiene continuas las primeras y segundas derivadas parciales sobre cierto conjunto abierto y plano $G$ (tales funciones, por la definición del punto anterior, se llaman dos veces continuamente diferenciables sobre el conjunto $G$). De la continuidad sobre el conjunto $G$ de las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, se deduce, como sabemos (véase el teorema 3 en el p. 20.2), la diferenciabilidad de la propia función $z(x, y)$ en cada punto de este conjunto. De esta forma, para todos los puntos $(x, y) \in G$ está definida la diferencial

$$dz = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} dy.$$

Por cuanto, según las suposiciones hechas, las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ tienen sobre un conjunto abierto derivadas parciales continuas

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

entonces, por el teorema 3 del p. 20.2 $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ también son diferenciables sobre el conjunto $G$. Por esto, la diferencial $dz$, analizada como función sólo de las variables $x$ e $y$, a su vez, es diferenciable sobre el conjunto $G$ de la función. Calculemos la diferencial de la primera diferencial $dz$, considerando a $dx$ y $dy$ fijas, y el punto $(x, y)$ perteneciente a la región $G$: $(x, y) \in G$, en este caso, la nueva diferenciación la denotaremos por el símbolo $\delta$:

$$\delta(dz) = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right) = \left(\delta\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(\delta\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\,\delta y\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,\delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\delta y\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx\delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,(dx\delta y + \delta x dy) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\delta y.$$

Llamemos la atención al hecho de que la continuidad de las segundas derivadas ha sido utilizada no sólo para que los cálculos tuvieron sentido $\left(\text{es decir, para que en todos los puntos analizados existieran las diferenciales } \delta\,\frac{\partial z}{\partial x} \text{ y } \delta\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, sino también para que en el proceso de cálculo no se presentara atención al orden de la diferenciación. En efecto, fue demostrado (véase el p. 21.1), que en el caso de continuidad de las derivadas parciales mixtas $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, éstas coinciden, por esto para su designación puede ser utilizado un mismo símbolo, lo que ha sido hecho en los cálculos señalados.

Como resultado se ha obtenido la forma bilineal simétrica de las variables $dx$, $dy$, $\delta x$, $\delta y$. Suponiendo $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, obtendremos su correspondiente forma cuadrática, la que se llama *segunda diferencial* de la función $z = z(x, y)$ en el punto dado $(x, y) \in G$ y se designa por $d^2 z$.

De esta forma, hemos llegado a la siguiente definición.

**Definición 2.** *Se llama segunda diferencial $d^2 z$ de la función $z = f(x, y)$ en el punto dado la forma cuadrática de las diferenciales $dx$ y $dy$ de las variables independientes, correspondiente a la forma bilineal de la diferencial de la primera diferencial, es decir,*

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2. \tag{21.8}$$

En la práctica, durante el cálculo concreto de las diferenciales con frecuencia se simultanean ambos pasos, o sea, el cálculo de la diferencial de la diferencial $\delta(dz)$ y la igualación de las diferenciales de los argumentos en las sucesivas diferenciaciones: $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. Por ejemplo, sea $z = x^3 \cos^2 y$ y se pide hallar $d^2 z$. Sucesivamente tendremos:

$$dz = 3x^2 \cos^2 y dx - x^3 \operatorname{sen} 2y dy,$$

$$d^2 z = 6x \cos^2 y\, dx^2 - 3x^2 \operatorname{sen} 2y\, dx\, dy - 3x^2 \operatorname{sen} 2y\, dx\, dy - 2x^3 \cos 2y\, dy^2 =$$

$$= 6x \cos^2 y\, dx^2 - 6x^2 \operatorname{sen} 2y\, dx\, dy - 2x^3 \cos^2 2y\, dy^2.$$

De forma análoga, durante la continuidad de las derivadas parciales de tercer orden, se puede calcular también la diferencial de la segunda diferencial $\delta(d^2z)$, después de lo cual, suponiendo $\delta x = dx$ y $\delta y = dy$, obtendremos por definición la tercera diferencial. Por inducción se define también la diferencial de orden $(m + 1)$ $d^{m+1}z$, $m = 1, 2, \cdots$ De forma más precisa, en la suposición de que son continuas todas las derivadas parciales hasta del orden $m + 1$ inclusive, de la función dada sobre un cierto conjunto, para obtener su diferencial $d^{m+1}z$, es necesario tomar la diferencial de la diferencial $d^m z$ de orden $m$: $\delta(d^m z)$ y hacer $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. En este caso, para las diferenciales de orden $m = 1, 2, \cdots$ será válida la fórmula

$$d^m z = \sum_{k=0}^{m} C_n^k \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-k}\, \partial y^k} dx^{m-k} dy^k, \tag{21.9}$$

con frecuencia se escribe simbólicamente en la forma siguiente que es más cómoda para ser recordada:

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^{(m)} f(x, y). \tag{21.10}$$

Demostremos la fórmula (21.9) por inducción. Para $m = 1$, evidentemente es cierta. Supongamos que sea válida para cierto $m$, mostremos su validez para $m + 1$. Tenemos

$$\delta(d^m z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(\frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k+1} \partial y^k} \delta x\, dx^{m-k} dy^k + \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k} \partial y^{k+1}} dx^{m-k} \delta y\, dy^k\right).$$

Hagamos $\delta x = dx$ y $\delta y = dy$; entonces

$$d^{m+1} z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-k+1} \partial y^k} dx^{m-k+1} dy^k +$$

$$+ \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-p} \partial y^{p+1}} dx^{m-p} dy^{p+1}.$$

Sustituyamos en la segunda suma el índice de la adición $p$ por $k - 1$ y observemos que $C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$; obtendremos finalmente:

$$d^{m+1} z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-k+1} \partial y^k} dx^{m-k+1} dy^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k+1} \partial y^k} dx^{m-k+1} dy^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^{k} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1-k} \partial y^k} dx^{m+1-k} dy^k. \ \square$$

OBSERVACIÓN. Se debe tener en cuenta que si se tiene una función compuesta $z = f(x, y)$, donde $x = x(u, v)$, $y = (u, v)$, entonces la segunda diferencial de la función $f$, expresada por las diferenciales de las variables $x$ e $y$, ya no tendrá, en general, la forma (21.8) y tendrá, como regla, una forma más compleja. De esta forma, en el caso de la diferencial de orden superior (es decir, de orden mayor o igual a dos) no tiene lugar la invariancia de la forma de la diferencial respecto a la elección de las variables. Para convencerse de esto, calculemos en el caso analizado la segunda diferencial de la función $z = f(x, y)$, donde $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Por la invariancia de la forma de la primera diferencial tenemos

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Más adelante, calculemos la diferencial $\delta(dz)$, considerando que $\delta u = du$, $\delta v = dv$. Utilizando la invariancia de la forma de la primera diferencial respecto a la elección de las variables durante los cálculos de $\delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ y $\delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$:

$$\delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \delta y,$$
$$\delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \delta y,$$

y notando, que la diferencial $\delta(dx)$, es la diferencial de la función, y por lo tanto, en general, no es nula, obtendremos

$$dz^2 = \delta(dz)\Big|_{\substack{\delta u = du \\ \delta v = dv}} = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)\Big|_{\substack{\delta u = du \\ \delta v = dv}} =$$
$$= \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial z}{\partial x}\delta(dx) + \frac{\partial z}{\partial y}\delta(dy)\Big|_{\substack{\delta v = du \\ \delta w = dv}} =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y.$$

En la práctica también en este caso ambas operaciones — cálculo de las diferenciales e igualación de las diferenciales $\delta u = du$, $\delta v = dv$ — se realizan simultáneamente, es decir, la notación $\delta(dz)\big|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}}$, se considera equivalente a la notación $d(dz)$.

Todo lo dicho, en particular, la definición de las diferenciales de órdenes superiores, de una forma natural se extiende a las funciones de un gran número de variables. Señalemos que la diferencial de orden $m$ de las funciones de $n$ variables $y = y(x_1, \dots, x_n)$ tiene la forma

$$d^m y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^{(m)} y(x_1, \dots, x_n). \tag{21.11}$$

Esta fórmula se demuestra de forma análoga a la fórmula (21.10).

Ejercicios. 1. Hállense las derivadas parciales de primer orden de la función $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.

2. Hállese la diferencial total de la función $u = z^{xy}$.

3. Hállense todas las derivadas parciales de segundo orden de la función.

$$u = x \operatorname{sen}(x + y) + y \cos(x + y).$$

4. Hállese $d^2 z$, si $z = \frac{1}{y} \ln(x^2 + y^2)$.

5. Hállense las derivadas de los dos primeros órdenes de la función $w = f(u, v)$, donde $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

CAPÍTULO TERCERO

# CÁLCULO INTEGRAL DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE

## § 22. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

### 22.1. PRIMITIVA E INTEGRAL INDEFINIDA

En este párrafo se analiza el problema de hallar una función para la cual la función dada es su derivada.

**Definición 1.** *Sea la función $f$ definida sobre un intervalo $\Delta$, finito o infinito, del eje numérico $R$, es decir, sobre un intervalo, intervalo semiabierto o segmento* *).

*La función $F$ definida sobre este intervalo se llama función primitiva* (*o sencillamente primitiva*), *de la función $f$ sobre $\Delta$, si*

1) *la función $F$ es continua sobre el intervalo $\Delta$,*

2) *en cualquier punto del intervalo $\Delta$, excepto un conjunto finito $E_f = E_{f,F} \subset \subset \Delta$, la función $F$ tiene derivada, igual al valor de la función $f$ en este punto:*

$$F'(x) = f(x), \ X \in \Delta \setminus E_f. \tag{22.1}$$

A veces en lugar de "primitiva de la función dada" se dice "primitiva para la función dada".

En los puntos del conjunto $E_f$ la función $F$, siendo obligatoriamente continua puede tener o no derivada, y además, si la derivada existe, entonces $F'(x) \neq f(x)$, $x \in F_f$.

El conjunto $E_f$ puede ser, en particular, un conjunto vacío.

Ejemplo. Para la función $f(x) = \operatorname{sign} x$ (véase el p. 5.2) la función $F(x) = |x|$, $-\infty < x < +\infty$, es primitiva. Aquí el conjunto $E_f$ está compuesto por un punto, el cero: $E_{\operatorname{sign} x} = \{0\}$. Para cualquier punto $x \neq 0$ tiene lugar $|x|' = \operatorname{sign} x$. Señalemos que la función $F(x) = |x|$ es también primitiva de la función

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando} \quad x \geqslant 0, \\ -1 & \text{cuando} \quad x < 0, \end{cases}$$

que se diferencia de la función $f(x) = \operatorname{sign} x$ por su valor en el cero.

En este ejemplo se ve que una misma función $F$ puede ser primitiva para diferentes funciones $f$, no obstante, en virtud de la condición (22.1) estas funciones $f$

---

*) Si el intervalo analizado es un segmento, entonces por supuesto, puede ser solamente finito.

pueden diferenciarse una de otra sólo en los valores sobre un conjunto finito de puntos (que depende de las funciones escogidas).

Es evidente que si la función $F$ es un primitiva de la función $f$ sobre cierto intervalo $\Delta$, es decir, $F$ es continua sobre $\Delta$ y en todos sus puntos menos cierto conjunto finito se cumple la condición $F'(x) = f(x)$, entonces para cualquier constante $C$, la función $F(x) + C$ también es continua sobre el intervalo $\Delta$ y en todos sus puntos menos el conjunto finito indicado se cumple la condición

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x),$$

es decir, la función $F(x) + C$ también es primitiva de la función $f$ sobre el intervalo $\Delta$.

Por otro lado, si las funciones $F$ y $\Phi$ son primitivas para la función $f$ sobre el intervalo $\Delta$, es decir, $F$ y $\Phi$ son continuas sobre el intervalo $\Delta$ y en todos sus puntos excepto los conjuntos finitos $E_{f,F}$ y respectivamente $E_{f,\Phi}$ se cumplen las condiciones

$$F'(x) = f(x) \quad \text{y} \quad \Phi'(x) = f(x),$$

entonces para todos los puntos del intervalo $\Delta$ excepto el conjunto $E_{f,F} \cup E_{f,\Phi}$, se cumplirá la condución

$$F'(x) = f(x) = \Phi'(x)$$

y además, el conjunto $E_{f,F} \cup E_{f,\Phi}$ donde esta condición se altera, es finito como la unión de dos conjuntos finitos.

De aquí, en virtud del corolario 2 del teorema 3 del p. 11.2 se deriva que las funciones $F$ y $\Phi$ se diferencian sobre el intervalo $\Delta$ sólo en cierta constante $C$:

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad x \in \Delta. \tag{22.2}$$

Así pues, si la función $F$ es cualquier primitiva de la función $f$ sobre el intervalo $\Delta$, entonces cualquier función $\Phi$ del tipo (22.2) también es primitiva de la función $f$ y cualquier primitiva de la función $f$ es representable en la forma $F(x) + C$.

**Definición 2.** *El conjunto de todas las primitivas de la función $f$ definidas sobre cierto intervalo $\Delta$ se llama integral indefinida de la función $f$ sobre este intervalo y se denota por*

$$\int f(x)\,dx. \tag{22.3}$$

El símbolo $\int$ *se llama símbolo de la integral*, $f(x)$ *función subintegral* (*integrando*).

Si $F$ es cualquier primitiva de la función $f$ sobre $\Delta$, entonces se escribe

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{22.4}$$

aunque sería más correcto escribir

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}. \tag{22.5}$$

Como se acepta usualmente, utilizaremos la escritura (22.4). Así pues, un mismo símbolo $\int f(x)\,dx$ denotará tanto todo el conjunto de primitivas de la función $f$ como cualquier elemento de este conjunto, es decir, cualquier primitiva de la función $f$.

Es necesario, no obstante, tener en cuenta que *cualquier igualdad en ambos miembros de la cual aparecen integrales indefinidas, es una igualdad entre conjuntos.*

Bajo el signo de la integral se escribe para mayor comodidad no la propia función $f$ sino su producto por la diferencial $dx$. Esto se hace ante todo para indicar respecto a qué variable se busca la primitiva. Por ejemplo,

$$\int x^2 z dx = \frac{x^2 z}{3} + C, \quad \int x^2 z dz = \frac{x^2 z^2}{2} + C;$$

aquí en ambos casos la función subintegral es igual a $x^2 z$, pero sus integrales indefinidas en los casos analizados resultan diferentes: en el primer caso se analiza como una función de la variable $x$ y en el segundo como una función de $z$.

Otras comodidades que se derivan de la utilización de la notación $\int f(x)dx$, serán indicadas en el futuro (véase al cambio de variable en la integral, en el p. 22.3).

Si $F$ es una primitiva de la función $f$ sobre el intervalo $\Delta$, entonces por la definición 2 en la fórmula (22.3) bajo el signo de la integral aparece la diferencial de la función $F$ en los puntos $x \in \Delta \setminus E_f$:

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Consideraremos a base de la definición que esta diferencial bajo el signo de la integral se puede escribir en cualquiera de las formas indicadas, es decir, según este acuerdo

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x). \tag{22.6}$$

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA.

Supondremos que todas las funciones analizadas están definidas sobre un mismo intervalo finito o infinito $\Delta$.

1°. *Sea la función $F$ continua sobre el intervalo y diferenciable en sus puntos interiores; entonces*

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

*o, lo es lo que mismo, véase* (22.6)):

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

La validez de esta igualdad se deriva de la definición de integral indefinida como conjunto de todas las funciones continuas sobre el intervalo dado $\Delta$ cuya diferencial (en los puntos $x \in \Delta \setminus E_f$) aparece bajo el signo de la integral (véase (22.6)), y de la forma general (22.2) de todas las primitivas de la función dada.

2°. *Supongamos que la función $f$ tiene primitiva sobre el intervalo $\Delta$; entonces para cualquier punto interior del intervalo $\Delta$ tiene lugar la igualdad*

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

En la fórmula dada por integral $\int f(x)dx$ se entiende cualquier primitiva $F$ de la función $f$. La validez de esta fórmula es evidente en virtud de la definición de primitiva.

3°. *Si las funciones $f_1$ y $f_2$ tienen primitivas sobre $\Delta$, entonces, la función $f_1 + f_2$ también tiene primitiva sobre $\Delta$, y además*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx \tag{22.7}$$

Esta igualdad expresa la coincidencia de dos conjuntos de funciones y significa que la suma de primitivas cualesquiera para las funciones $f_1$ y $f_2$ es una primitiva para la función $f_1 + f_2$ y que viceversa, cualquier primitiva para la función $f_1 + f_2$ es la suma de ciertas primitivas para las funciones $f_1$ y $f_2$.

La propiedad de la integral expresada por la fórmula (22.7) se llama *aditividad de la integral con respecto a las funciones.*

Sea $\int f_1(x)\,dx = F_1(x) + C_1$, $\int f_2(x)\,dx = F_2(x) + C_2$ y, por consiguiente, las funciones $F_1$ y $F_2$ son continuas sobre el intervalo $\Delta$ y en sus puntos $x \in \Delta \setminus E_{f_1}$ se cumple la condición $F_1'(x) = f_1(x)$ y en los puntos $x \in \Delta \setminus E_{f_2}$ la condición $F_2'(x) = f_2(x)$, donde $E_{f_1}$ y $E_{f_2}$ son ciertos conjuntos finitos.

Hagamos $F = F_1 + F_2$. Entonces la función $F$ es continua sobre el intervalo $\Delta$ como suma de las funciones $F_1$ y $F_2$ continuas sobre este intervalo y para cualquier punto $x \in \Delta \setminus (E_{f_1} \cup F_{f_2})$ tiene lugar la igualdad

$$F'(x) = [F_1(x) + F_2(x)]' = F_1'(x) + F_2'(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

y además, el conjunto $E_{f_1} \cup E_{f_2}$ para los puntos del cual esta igualdad no se cumple, es finito, como unión de dos conjuntos finitos $E_{f_1}$ y $E_{f_2}$.

Esto significa, que $F$ es la primitiva para la función $f_1 + f_2$ sobre $\Delta$, por esto

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = F(x) + C = F_1(x) + F_2(x) + C.$$

De esta forma, la parte izquierda de la fórmula (22.6) está compuesta por las funciones del tipo $F_1(x) + F_2(x) + C$ la parte derecha, por las funciones del tipo $F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2$. Por la arbitrariedad de las constantes $C$, $C_1$ y $C_2$, estos conjuntos coinciden. $\square$

4°. *Si la función $f$ tiene primitiva sobre el intervalo $\Delta$ y $k$ es un número, entonces la función $kf$ también tiene sobre $\Delta$ primitiva, además cuando $k \neq 0$ es válida la igualdad*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx. \tag{22.8}$$

En efecto, sea $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, es decir, $F$ es continua sobre el intervalo $\Delta$ y en todos sus puntos, excepto un conjunto finito $E_f$, se cumple la condición

$$F'(x) = f(x), \quad x \in \Delta \setminus E_f.$$

Entonces, la función $kf$ también es continua sobre este intervalo y en todos los puntos $x \in \Delta \setminus E_f$ tiene lugar la igualdad $[kF(x)]' = kF'(x) = kf(x)$. Esto significa que la función $kF$ es primitiva para $kf$, y por esto $\int kf(x)\,dx = kF(x) + C_1$.

De esta forma, la parte izquierda de la fórmula (22.8) es un conjunto de funciones del tipo $kF(x) + C_1$ y la derecha está compuesta por funciones del tipo $k[F(x) + C] = kF(x) + kC$. Por la arbitrariedad de las constantes $C$ y $C_1$, a condición $k \neq 0$ ambos conjuntos coinciden. $\square$

**Corolario (linealidad de la integral).** *Si las funciones $f_1$ y $f_2$ tienen primitivas sobre el intervalo $\Delta$ y $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ y $\lambda_2 \in \mathbf{R}$ son números tales que $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$ entonces* *la función* $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ *también tiene primitiva sobre* $\Delta$ *y además*

$$\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx.$$

Esto se deduce directamente de las propiedades 3° y 4°.

La cuestión sobre la existencia de la primitiva se estudiará algo más tarde (véase el p. 29.2) y ahora analicemos los métodos más simples del cálculo de las primitivas para las funciones elementales.

Ejercicio 1. Demuéstrese que para la función sign $x$ no existe una función $F$ tal que para todos los $x \in R$ se cumpla la igualdad $f'(x) = \operatorname{sign} x$.

## 22.2. INTEGRALES DE TABLA

La operación de hallar la integral indefinida de una función dada llamada *integración* es la operación inversa a la diferenciación, es decir, a la operación de hallar por una función dada su derivada (véanse las propiedades 1 y 2 de la integral indefinida en el p. 22.1). Por esto, cualquier fórmula que expresa la derivada de una u otra función, es decir, del tipo $F'(x) = f(x)$ puede ser invertida (escrita en forma de fórmula integral):

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Utilizando esta idea escribiremos la tabla de valores de una serie de integrales indefinidas, que se obtiene directamente de la tabla correspondiente de las derivadas de las funciones elementales (véase el § 9)

1. $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha} + 1}{x + 1} + C \quad x > 0, \quad \alpha \neq -1.$

Si el número $\alpha$ es tal, que la potencia $x^{\alpha}$ tiene también sentido para todos los $x \leqslant 0$, entonces la fórmula 1 es válida sobre cualquier intervalo. Por ejemplo, la fórmula

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

es válida sobre todo el eje numérico.

No obstante, para la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$ ya no es posible escribir tal fórmula única, válida para todo su dominio, es decir, para todo el eje numérico, de cual se excluye el cero. En este caso tenemos:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{para} \quad x > 0, \\ -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{para} \quad x < 0. \end{cases}$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ sobre cualquier intervalo sobre el cual $x \neq 0$.

3. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a_x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$ En particular, $\int e^x dx = e^x + C.$

4. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$

5. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

9. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C.$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, \; |x| < |a|.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$, y además, cuando bajo la raiz aparece $x^2 - a^2$ se supone que $|x| > |a|$.

Claro, se sobreentiende que si el denominador de la función subintegral se anula en cierto punto, entonces las fórmulas escritas serán válidas sólo para aquellos intervalos en los cuales no se anula el denominador indicado (véanse las fórmulas 2, 6, 7, 11, 13, 15). Esta observación se refiere también a las situaciones análogas que nos encontraremos en el futuro y que no serán comentadas especialmente cada vez.

Lo que las derivadas de las funciones que aparecen en las partes derechas de estas fórmulas son las expresiones subintegrales correspondientes se comprueba directamente diferenciando (véanse los ejemplos en el § 9).

Con ayuda de las integrales 1–15 llamadas usualmente *integrales de tabla* y las propiedades de la integral indefinida demostradas anteriormente, se pueden expresar las integrales de funciones elementales más complejas también con funciones elementales.

Por ejemplo

$$\int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1}\right) dx =$$
$$= 5 \int \cos x\,dx + 2 \int dx - 3 \int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$
$$= 5 \operatorname{sen} x + 2x - x^3 + \ln |x| - 4 \operatorname{arctg} x + C.$$

Señalemos que para cualquier polimonio de grado $n$ existe la primitiva y es un polimonio de grado $n + 1$, más exacto,

$$\int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)dx =$$
$$= a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \dots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + C. \quad (22.9)$$

Esto se deduce de las propiedades 3 y 4 de la integral indefinida (véase el p. 22.1) y de la fórmula 1 de este punto.

*Si la primitiva de cierta función $f$ es una función elemental, entonces se dice que la integral $\int f(x)dx$ se expresa con funciones elementales o que esta integral se calcula.*

## 22.3. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN (CAMBIO DE VARIABLE)

En este punto y en el siguiente se analizarán dos propiedades de la integral indefinida que a menudo resultan útiles en el cálculo de las primitivas de las funciones elementales.

**Teorema 1.** *Sean las funciones $f(x)$ y $\varphi(t)$ definidas respectivamente sobre los intervalos $\Delta_x$ y $\Delta_t$, $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$, la función $f$ tiene sobre $\Delta_x$ la primitiva $F(x)$ y, por consiguiente,*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (22.10)$$

*$E_f$ — es un conjunto finito tal que $E_f \subset \Delta_x$ y para todos los $x \in \Delta_x \setminus E_f$ se cumple la igualdad*

$$F'(x) = f(x).$$

*Si la función $\varphi$ es continua sobre el intervalo $\Delta_t$, es diferenciable en todos sus puntos a excepción de cierto conjunto finito y la preimagen total $\varphi^{-1}(E_f)$ del conjunto $E_f$ también es un conjunto finito, entonces la función $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ tiene la primitiva $F[\varphi(t)]$ sobre el intervalo $\Delta_t$ y por esto*

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C. \quad (22.11)$$

DEMOSTRACIÓN. Las funciones $f(x)$ y $F(x)$ están definidas sobre el intervalo $\Delta_x$ y por la condición del teorema es válida la inclusión $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$, por lo que tienen sentido las funciones compuestas $f[\varphi(t)]$ y $F[\varphi(t)]$. Según las condiciones del teorema, la función $\varphi$ es continua sobre el intervalo $\Delta_t$ y existe un conjunto finito — denotémoslo por $E_\varphi$ — tal que la función $\varphi$ es diferenciable en todos los puntos $t \in \Delta_t \setminus E_\varphi$. Por consiguiente, la función $F[\varphi(t)]$ es continua sobre $\Delta_t$ como la composición de funciones continuas y por la regla de diferenciación de las funciones compuestas, para todos los puntos $t \in \Delta_t \setminus [E_\varphi \cup \varphi^{-1}(E_f)]$ tiene lugar la igualdad

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)] = \left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

y además, el conjunto $E_\varphi \cup \varphi^{-1}(E_f)$, donde la igualdad indicada no tiene lugar, es un conjunto finito como la unión de dos conjuntos finitos $E_\varphi$ y $\varphi^{-1}(E_f)$. Esto significa que la función $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ tiene en calidad de una de sus primitivas la función $F[\varphi(t)]$. De aquí se deduce inmediatamente la fórmula (22.11). □

La fórmula (22.9) a menudo se aplica en la práctica para el cálculo de integrales. Para mayor comodidad de su utilización démosle una forma algo diferente. Observando que

$$\int f(x)dx|_{x=\varphi(t)} = [F(x) + C]_{x=\varphi(t)} = F[\varphi(t)] + C,$$

transcribamos la fórmula (22.9) en la forma

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int f(x)dx|_{x=\varphi(t)}. \tag{22.12}$$

De aquí se ve que se puede inicialmente calcular la integral $\int f(x)dx$ y luego en lugar de $x$ poner la función $\varphi(t)$. Esta fórmula usualmente se llama *fórmula de integración por sustitución*. Su parte izquierda se puede escribir de otra forma según la igualdad

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int f[\varphi(t)]d\varphi(t).$$

Señalemos además, que resulta conveniente utilizar la fórmula (22.12) en el orden inverso, es decir, de derecha a izquierda. Precisamente, a veces resulta cómodo el cálculo de la integral

$$\int f(x)dx$$

con ayuda del cambio de variable correspondiente $x = \varphi(t)$ reducirlo al cálculo de la integral

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

(si esta integral en algún sentido es "más simple" que la inicial), es decir, utilizar la fórmula (22.12) en la forma

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{22.13}$$

Esta fórmula se deduce directamente de (22.12) si en ambas partes hacemos el cambio de variable $t = \varphi^{-1}(x)$, donde $\varphi^{-1}$ como siempre denota la función inversa a la función $\varphi$. Para que la función $\varphi^{-1}$ exista, en complemento a las condiciones del teorema 1 es suficiente, por ejemplo, exigir que sobre el intervalo analizado la función $\varphi$ sea estrictamente monótona. En este caso, como es conocido (véase el p. 6.3) existirá la función inversa unívoca $\varphi^{-1}$.

La fórmula (22.13) usualmente se llama *fórmula de integración por cambio de variable*.

Ejemplos. 1. Para el cálculo de la integral $\int \cos ax\,dx$ es natural hacer la sustitución $u = ax$, entonces

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\int \cos u\,du = \frac{1}{a}\operatorname{sen} u + C = \frac{\operatorname{sen} ax}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

2. Para el cálculo de integral $\int \frac{x\,dx}{x^2 + a^2}$ es cómodo aplicar la sustitución $u = x^2 + a^2$:

$$\int \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(u) + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C.$$

3. Al calcular las integrales del tipo $\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}$, $\varphi(x) \neq 0$, es útil la sustitución $u = \varphi(x)$:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C.$$

Por ejemplo,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

4. Las integrales del tipo $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a \neq 0$, en el caso cuando la expresión subradical es no negativa sobre cierto intervalo *), fácilmente se reducen, con ayuda de un cambio de variable a integrales de tabla.

En efecto, observando que $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$, hagamos el cambio de variable $t = \sqrt{|a|}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ y pongamos $d = c - \frac{b^2}{4a}$. Entonces $dx = \frac{dt}{\sqrt{|a|}}$ y en virtud de la fórmula (22.11) obtendremos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int \frac{dt}{\sqrt{\pm t^2 + d}}$$

(frente a $t^2$ aparece el signo "+" si $a > 0$ y el signo "−" si $a < 0$). La integral que aparece a la derecha, es de tabla (véanse las fórmulas 14 y 15 en el p. 22.2). Hallándola por las fórmulas correspondientes y regresando de la variable $t$ a la $x$ obtendremos la integral buscada.

Con un método semejante se calculan las integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad a \neq 0$$

(véase esto en el p. 24.1).

---

*) En el caso contrario, es decir, cuando la expresión subradical es negativa para todos los $x \in \boldsymbol{R}$, se obtendrá la integral de una función de valores complejos. Tales integrales aquí no se analizan.

5. La integral $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ se puede calcular con ayuda de la sustitución $x + a \operatorname{sen} t$ (véase también el ejemplo 2 en el p. 22.4). Tenemos $dx = a \cos t\, dt$ y por esto

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = a^2 \int \cos^2 t\, dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$
$$= \frac{a^2}{2} \int dt + \frac{a^2}{2} \int \cos 2t\, dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4} \operatorname{sen} 2t + C.$$

Sustituyendo en la expresión obtenida $t = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}$ y observando que

$$\operatorname{sen} 2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} = 2 \operatorname{sen} \left(\operatorname{arcsen} \frac{x}{a}\right) \cos \left(\operatorname{arcsen} \frac{x}{a}\right) = 2\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2}{a^2}x\sqrt{a^2 - x^2}$$

finalmente tendremos

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Observemos que para la comprobación del resultado obtenido en el cálculo de una integral indefinida, es suficiente diferenciarla, después de lo cual se debe obtener la expresión subintegral de la integral que se calcula.

Otros ejemplos de integración con ayuda del cambio de variable se analizarán en los § 25, 26.

## 22.4. INTEGRACÍON POR PARTES

**Teorema 2.** *Si cada una de las funciones* $u(x)$ y $v(x)$ *es continua sobre un intervalo dado, diferenciable en todos sus puntos excepto un conjunto finito de ellos y sobre este intervalo existe la integral* $\int v du$, *entonces sobre este mismo intervalo existe también la integral* $\int u dv$ *y además*

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{22.14}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean las funciones $u(x)$ y $v(x)$ continuas sobre el intervalo $\Delta$, la función $u(x)$ no es diferenciable sobre el conjunto finito $E_u$, la función $v(x)$ no es diferenciable sobre el conjunto finito $E_v$ y $E = E_u \cup E_v$. Es evidente que $E$ también es un conjunto finito y que para todos los puntos $x \in \Delta \setminus E$, por la regla de diferenciación del producto tendremos

$$d(uv) = v du + u dv$$

y por lo tanto

$$u dv = d(uv) - v du.$$

La integral de cada sumando de la parte derecha existe, ya que por la propiedad 1° del p. 22.1

$$\int d(uv) = uv + C$$

y la integral $\int v du$ existe por la condición del teorema. Por esto, según la propiedad 3° del p. 22.1 existe también la integral $\int u dv$ y además

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du. \tag{22.15}$$

Sustituyendo en la parte derecha de (22.15) $uv + C$ en lugar de $\int d(uv)$ y llevando la constante arbitraria $C$ a la integral $\int v du$ obtendremos la fórmula (22.14). □

Con ayuda de la fórmula (22.14) se calculan muchas integrales. En su uso práctico está dada la parte izquierda de (22.14), es decir, la función $u$ y la diferencial $dv$ y por esto $v$ se determina no unívocamente. Usualmente en calidad de $v$ se escoge la función escrita con la fórmula más simple.

Ejemplos. 1. Supongamos que se exige calcular la integral $\int xe^x dx$. Considerando

$$u = x, \quad dv = e^x dx, \quad \text{de donde} \quad du = dx, v = e^x,$$

tenemos

$$\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Observemos que tomando $u = e^x$ y $dv = xdx$, de donde $u = e^x$ y $v = x^2/2$ tendremos

$$\int xe^x dx = \frac{1}{2}x^2e^x - \frac{1}{2}\int x^2e^x dx,$$

es decir, la integración por partes nos llevará a una integral más compleja que la inicial. De aquí se ve que al calcular las integrales con ayuda de la fórmula (22.14) no cada forma de elección de las funciones $u$ y $v$ nos lleva a una integral más simple que la inicial.

2. Calculemos la integral $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ integrando por partes (anteriormente, véase el p. 22.3, ejemplo 5, fue calculada con ayuda de un cambio de variable).

Considerando $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$ y, por consiguiente, $du = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$, $v = x$, obtendremos

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{22.16}$$

Sumemos y restemos $a^2$ en el numerador de la función subintegral de la integral que aparece en la parte derecha de la igualdad; entonces realizando la división por $\sqrt{a^2 - x^2}$ tendremos

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} - I.$$

Sustituyendo esta expresión en (2.16) obtendremos:

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} - I. \tag{22.17}$$

Como ya se señaló anteriormente, cualquier igualdad de tal tipo es una igualdad entre dos conjuntos de funciones; los elementos de cada uno de estos conjuntos se diferencian uno de otro en una constante. Por esto, la expresión general para un elemento del conjunto $I$, según (22.17) tiene la forma

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsen\frac{x}{a} + C.$$

3. A veces para el cálculo de una integral, es necesario aplicar la regla de integración por partes varias veces, por ejemplo,

$$\int \arcsen^2 x\,dx = x\arcsen^2 x - 2\int \arcsen x\,\frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= x\arcsen^2 x = 2\int \arcsen x\,d\sqrt{1 - x^2} =$$

$$= x\arcsen^2 x = 2\arcsen x\sqrt{1 - x^2} - 2x + C.$$

4. Si $P_n(x)$ es un polinomio de grado $n$, entonces para el cálculo de la integral $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$ es necesario aplicar la fórmula de integración por partes $n$ veces. Efectuando esto obtendremos

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx = e^{\alpha x}\left(\frac{P_n(x)}{\alpha} - \frac{P_n'(x)}{\alpha^2} + \ldots + (-1)^n\frac{P_n^{(n)}(x)}{\alpha^{n+1}}\right) + C.$$

Otros ejemplos de la aplicación de la integración por partes serán analizados en el § 26.

## § 23. ALGUNOS CONOCIMIENTOS SOBRE NÚMEROS COMPLEJOS Y POLINOMIOS

### 23.1. NÚMEROS COMPLEJOS

Como es conocido del álgebra, se llaman *números complejos* las expresiones del tipo

$$z = x + iy$$

donde $i^2 = -1$ y $x$ e $y$ son números reales cualesquiera. El conjunto de todos los números complejos se denota por $C$. El número $x$ se llama parte real e $y$, parte imaginaria del número complejo $z = x + iy$. Esto se escribe de la siguiente forma: $x = \mathrm{Re}\,x$, $y = \mathrm{Im}\,z$ [*)].

Un número complejo $z$ que no sea real, es decir, para el cual $\mathrm{Im}\,z \neq 0$, lo llamaremos *número esencialmente complejo*. El número $\sqrt{x^2 + y^2}$ se llama módulo del número complejo $z = x + iy$ y se denota por $|z|$, es decir, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

A cada número complejo $z = x + iy$ le corresponde un par ordenado de núme-

[*)] De los vocablos latinos *realis*, real, e *imaginarius*, imaginario.

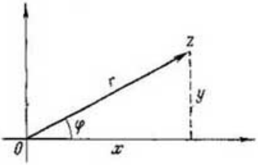



FIG. 103

ros reales $(x, y)$ y viceversa, a cada par ordenado de números reales $(x, y)$ le corresponde el número complejo $z = x + iy$. Por esta relación biunívoca (y también en virtud de otras circunstancias sobre las cuales se hablará posteriormente) el número complejo $z = x + iy$ es cómodo interpretarlo geométricamente o bien como el punto $(x, y)$ o bien como el radio vector sobre el plano con coordenadas $x$ e $y$ (en cierto sistema rectangular de coordenadas cartesianas dado).

El plano coordenado, cuyo punto $(x, y)$ (para $x, y \in R$ cualesquiera) está identificado con el número $x + yi$ se llama *plano complejo*. En él el eje $Ox$ se llama real y $Oy$, eje imaginario.

El ángulo $\varphi$ que forma el radio vector $z$, $z \neq 0$, con la dirección positiva del eje $Ox$ se llama *argumento* del número complejo $z$ y se denota por $\operatorname{Arg} z$. Los valores $\varphi$ del argumento del número complejo $z$ tales que $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ usualmente se denotan por $\arg z$. Evidentemente, $\operatorname{Arg} z$ se define por el número complejo $z \neq 0$ salvo un múltiplo entero de $2\pi$, mientras que $\arg z$ ya se determina por el número $z \neq 0$ unívocamente. Es evidente también que

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi,$$

donde $k = 0$ para los cuadrantes primero y cuarto, $k = 1$ para el segundo y $k = -1$ para el tercero. Si $x = 0$, entonces para $y \neq 0$ se considera que $\arg z \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y$ y para $x = y = 0$ $\arg z$ no está definido.

Sea $|z| = r$, $\operatorname{Arg} z = \varphi$, entonces (fig. 103) $x = r\cos\varphi$, $y = r\operatorname{sen}\varphi$ y por esto

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$$

El segundo miembro de esta igualdad se llama *forma trigonométrica del número complejo z*.

Los números complejos $x_1 + y_1 i$ y $x_2 + y_2 i$ se consideran iguales si y sólo si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. Según la definición, se considera también $x + 0i = x$, $0 + yi = yi$, $0 + 0i = 0$.

La suma de dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se define por la fórmula

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{23.1}$$

Dicho de otro modo, las partes real e imaginaria de la suma $z_1 + z_2$ son iguales a las sumas de las partes reales e imaginarias correspondientes de $z_1$ y $z_2$.

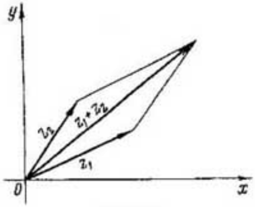



FIG. 104

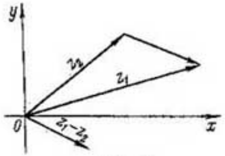



FIG. 105

La *diferencia* de números complejos se define como la operación inversa a la suma, es decir, la diferencia $z = z_1 - z_2$ es número $z$, tal que $z_2 + z = z_1$. Por consiguiente, si $z = x + iy$, entonces $x_2 + x + i(y_2 + y) = x_1 + iy_1$. De aquí, $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$, es decir, las partes real e imaginaria de la diferencia $z_1 - z_2$ son iguales a las diferencias de las partes reales e imaginarias de los números $z_1$ y $z_2$, respectivamente.

Por cuanto geométricamente las partes real e imaginaria de un número complejo son sus coordenadas y en la suma (resta) de las coordenadas de los vectores los propios vectores también se suman (restan), entonces la fórmula (23.1) significa que geométricamente los números complejos se suman y restan como los vectores (figs. 104 y 105).

El *producto* de dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$, y $z_2 = x_2 + iy_2$ se define por la fórmula

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \quad (23.2)$$

Hallemos las fórmulas de la multiplicación de números complejos en la forma trigonométrica. Si

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_2),$$

entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \mathrm{sen}\,\varphi_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_2) &+ \\ + i(\cos\varphi_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_2 + \mathrm{sen}\,\varphi_1 \cos\varphi_2)] &= \\ = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) &+ i\,\mathrm{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

y de esta forma

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,\ \mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2\ ^{*)}. \quad (23.3)$$

Por el método de inducción matemática es fácil mostrar que

$$|z_1 z_2 \dots z_n| + |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n|,$$
$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2 \dots z_n) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 + \dots + \mathrm{Arg}\, z_n.$$

---

*) Esta igualdad, como en general todas las igualdades que contienen Arg, es necesario entenderla como la igualdad de los conjuntos correspondientes.

De aquí, considerando $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$, para la potencia $z^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, de un número complejo $z$ tenemos

$$|z^n| = |z|^n, \quad \operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z = 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{*)},$$

en particular, para $|z| = 1$, es decir, cuando $z = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$,

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi. \tag{23.4}$$

Esta relación se llama fórmula de Moivre **).

La división $\dfrac{z_1}{z_2}$ de un número complejo $z_1$ por un número complejo $z_2 \neq 0$ se define como la operación inversa a la multiplicación, es decir, el número $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ se llama *cociente de la división* de $z_1$ por $z_2$ si $z_1 = z_2 z$. Por esto

$$|z_1| = |z_2|\,|z| \quad \text{y} \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + \operatorname{Arg} z,$$

de donde

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} + \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \tag{23.5}$$

Con las fórmulas (23.5) el número complejo $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ para los $z_1$ y $z_2 \neq 0$ dados evidentemente está definido unívocamente. Una serie de propiedades de los números complejos como, por ejemplo, la conmutatividad y asociatividad de la adición y la multiplicación, la distributividad de la multiplicación con respecto a la adición y otras propiedades se deducen directamente de las fórmulas, con ayuda de las cuales están definidas estas operaciones para los números complejos y de las propiedades correspondientes de los números reales. Por esto no nos detendremos detalladamente en ellas.

La raíz de $n$-ésimo orden $w = \sqrt[n]{z}$ del número complejo $z$ se define como el número $w$, cuya $n$-ésima potencia es igual a la expresión subradical:

$$w^n = z.$$

Si

$$z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \quad \text{y} \quad w = \rho(\cos\psi + i \operatorname{sen}\psi)$$

entonces

$$\rho^n(\cos n\psi + i \operatorname{sen} n\psi) = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi);$$

de donde

$$\rho = \sqrt[n]{r}.$$

Aquí la raíz se entiende en el sentido aritmético como un número real no negativo, ya que según la definición, del módulo de un número complejo $\rho \geqslant 0$.

A continuación

$$n\psi = \varphi + 2k\pi \quad (k \text{ es entero}), \quad \text{ó} \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

---

*) Observemos que $\operatorname{Arg} z^n \neq n \operatorname{Arg} z$, $n = 2, 3, \dots$

**) A. Moivre (1667—1754), matemático francés.

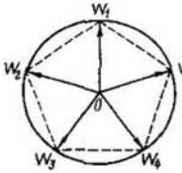



FIG. 106

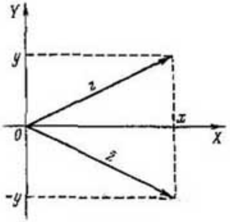



FIG. 107

En esencia se obtienen diferentes valores del argumento para los valores $k = 0, 1, \dots, n-1$: diferentes en el sentido de que si denotamos estos valores del argumento por $\psi_k$ y hacemos $w_k = \rho(\cos\psi_k + i \operatorname{sen}\psi_k)$, entonces cuando $\rho \neq 0$ se obtendrán diferentes números complejos. Para todos los $k$ restantes los valores de $\psi$ se diferenciarán de los números $\psi_k$ indicados, en un múltiplo de $2\pi$, es decir, estos valores del argumento nos llevarán a uno de los números complejos $w_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. De esta forma, la raíz $\sqrt[n]{z}$ tiene para $z \neq 0$ exactamente $n$ valores $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$.

En el plano complejo, los números $w_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, se encuentran en los vértices del polígono regular de $n$ lados inscrito en el círculo de radio $\rho$ con centro en el origen de coordenadas. Esto se deduce de que el argumento del número $w_k$ se diferencia del argumento del número $w_{k-1}$ para todos los $k = 1, 2, \dots, n-1$ en un mismo número $2\pi/n$. En la fig. 106 está representado el caso de $n = 5$.

A cada número complejo $z = x + iy$ le corresponde el número $x - iy$ que se llama *conjugado* a $z$ y se denota por $\bar{z}$; $\bar{z} = x - iy$. Geométricamente el número $\bar{z}$ se representa con el vector simétrico a $z$ con respecto al eje $Ox$ (fig. 107).

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS CONJUGADOS

1° $|\bar{z}| = |z|$, $\arg\bar{z} = -\arg z$.

2°. $z\bar{z} = |z|^2$.

3°. $\bar{\bar{z}} = z$.

4°. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

5°. $\overline{z_1 - z_2} + \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.

6°. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

7°. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$.

La propiedad 1 es evidente (véase la fig. 107).

A continuación, por la regla de la multiplicación de números complejos

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \ \square$$

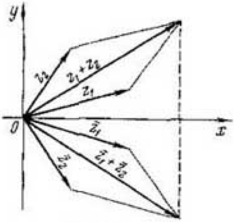



FIG. 108

La propiedad 3 también es evidente: si $z = x + iy$, entonces $\bar z = x - iy$ y $\bar{\bar z} = \overline{x - iy} = x + iy = z$. □

De la validez de la propiedad 4 es posible convencerse geométricamente tomando un paralelogramo simétrico, con respecto al eje $Ox$, al paralelogramo construido con los vectores $z_1$ y $z_2$ como lados (fig. 108), es decir, el paralelogramo extendido sobre los vectores $\bar z_1$ y $\bar z_2$. Las diagonales de estos paralelogramos también serán simétricas una a otra con respecto al eje $Ox$ y por consiguiente serán iguales a $z_1 + z_2$ y $\overline{z_1 + z_2}$, respectivamente. Por otro lado, la última diagonal, como la suma de los vectores $\bar z_1$ y $\bar z_2$ es igual también a $\bar z_1 + \bar z_2$. □

La propiedad 5° se demuestra análogamente.

Las propiedades 6° y 7° se deducen de que los módulos y los argumentos de las expresiones que aparecen en las diferentes partes de las igualdades correspondientes coinciden. En efecto, utilizando la propiedad 1 obtendremos

$$|\overline{z_1 z_2}| = |z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2| = |\bar z_1|\cdot|\bar z_2| = |\bar z_1 \cdot \bar z|,$$

$$\operatorname{Arg}\overline{z_1 z_2} = -\operatorname{Arg} z_1 z_2 = -(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) =$$
$$= -\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg}\bar z_1 + \operatorname{Arg}\bar z_2 + \operatorname{Arg}\bar z_1 \bar z_2. \ \square$$

De forma análoga se demuestra la propiedad 7°.

Para números complejos $z_1$ y $z_2$ cualesquiera es válida la ***desigualdad triangular***

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \text{ y su consecuencia } ||z_1| - |z|| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

La primera de estas desigualdades geométricamente significa que la longitud de un lado de un triángulo no sobrepasa la suma de las longitudes de sus otros dos lados (véase la fig. 104) y la segunda, que la diferencia de las longitudes de dos lados de un triángulo no sobrepasa la longitud del tercer lado (véase la fig. 105).

## 23.2. *) TEORÍA FORMAL DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

El lector reflexivo prestó atención a que el enunciado dado en p. 23.1 "la expresión del tipo $z = x + iy$ se llama número complejo" no es una definición exacta de los números complejos.

El conjunto de los números complejos $\boldsymbol{C}$ se puede definir como el conjunto de los pares ordenados $(x, y)$ de números reales, $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$, en el cual están introducidas las operaciones de suma y multiplicación por la siguiente definición:

$$(x, y) + (x', y') \overset{\text{def}}{=} (x + x', y + y'),$$

$$(x, y)(x', y') \overset{\text{def}}{=} (xx' - yy', xy' + x'y),$$

$$(x, y) \in \boldsymbol{C}, \quad (x', y') \in \boldsymbol{C}.$$

No es difícil comprobar que como resultado de esta definición, el conjunto de los pares indicados se convierte en un campo, es decir, satisface las condiciones I, II, III del p. 2.1. El campo obtenido de esta forma y también cada campo isomorfo a él se llama *campo de los números complejos*.

Los pares $(x, 0)$ se denotan simplemente por $x$ (su conjunto es isomorfo al campo de los números reales) y el par $(0, 1)$ se denota por $i$: $i \overset{\text{def}}{=} (0, 1)$.

Por la operación definida de multiplicación

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1, \quad \text{es decir,} \quad i^2 = -1.$$

Para cualquier número complejo $(x, y)$ tiene lugar la identidad fácilmente comprobable

$$(x, y) = x + iy.$$

En efecto

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy,$$

y de nuevo llegamos a la escritura de los números complejos de la cual partimos en el p. 23.1.

## 23.3. ALGUNOS CONCEPTOS DEL ANÁLISIS EN LA REGIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Los conceptos de sucesión numérica y su límite se generalizan fácilmente al caso de los números complejos.

Una función definida sobre un conjunto de números naturales cuyos valores son números complejos se llama *sucesión de números complejos.* Como en el caso de los números reales al número complejo $z$ correspondiente al número natural $n$ se le adjunta el índice $n$: $z_n$, $n = 1, 2, \ldots$ .

**Definición 1.** *Sea dada una sucesión de números complejos* $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$ . *El número* $\zeta = \xi + i\eta$ *se llama su límite si para cualquier número real* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $n_\varepsilon$ *tal que para* $n \geqslant n_\varepsilon$ *se cumple la desigualdad*

$$|z_n - \zeta| < \varepsilon.$$

En este caso se escribe $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \zeta$ y se dice que la sucesión $\{z_n\}$ converge al número $\zeta$.

Así pues, por su forma, esta definición es exactamente la misma que la del límite de una sucesión de números reales.

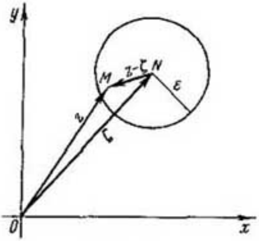



FIG. 109

Geométricamente, si denotamos por $M_n$ el extremo del radio vector $z_n$, es decir, el punto con coordenadas $(x_n, y_n)$ y por $N$ el punto con coordenadas $(\xi, \eta)$, entonces la igualdad $\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta$ tendrá lugar si y sólo si $\lim_{n\to\infty} M_n \to N$ en el sentido del p. 18.1. Esto se deduce directamente de que el conjunto de los extremos $M = (x, y)$ de los vectores $z = x + iy$ tales que $|z - \zeta| < \varepsilon$ forman un $\varepsilon$-entorno del punto $N = (\xi, \eta)$ (fig. 109).

De lo dicho se deduce (véase el p. 18.1) que la sucesión $z_n = x_n + iy_n$ converge al número $\zeta = \xi + i\eta$ si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \eta.$$

La sucesión de números complejos que tiene el cero como su límite se llama *infinitesimal.*

A las sucesiones de números complejos, de forma natural, se extiende una serie de teoremas sobre los límites de las sucesiones de números reales, por ejemplo, el teorema sobre la unicidad del límite, sobre la acotación de una sucesión que tenga límite, el criterio de Cauchy, etc.

En el § 8 fueron introducidas las notaciones "$o$" y "$O$" para la comparación de funciones. En el futuro, se necesitarán esas mismas notaciones para las sucesiones.

**Definición 2.** *Diremos que la sucesión* $\{z_n\}$ *está acotada con respecto a la sucesión* $\{w_n\}$ *y escribiremos* $z_n = O(w_n)$ *) *si existe una constante* $c > 0$ *tal que* $|z_n| \leqslant c(w_n)$, $n = 1, 2, \dots$ .

Esta definición en el caso de $w_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, es equivalente a la siguiente: para las dos sucesiones dadas $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ existen una constante $c' > 0$ y un número $n_0$ tales que

$$|z_n| \leqslant c' \, |w_n|, \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots .$$

*) A veces a esto se agrega: cuando $n \to \infty$.

En efecto, suponiendo en este caso

$$c = \max\left\{ \left|\frac{z_1}{w_1}\right|, \left|\frac{z_2}{w_2}\right|, \ldots, \left|\frac{z_{n_0-1}}{w_{n_0-1}}\right| c' \right\}$$

obtendremos

$$|z_n| \leqslant c\,|w_n|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

es decir, la definición inicial.

**Definición 3.** *Si* $z_n = O(w_n)$ *y* $w_n = O(z_n)$, *entonces diremos que las sucesiones* $\{z_n\}$ *y* $\{w_n\}$ *son de un mismo orden y escribiremos* $z_n \asymp w_n$.

**Definición 4.** *Diremos que la sucesión* $\{z_n\}$ *es infinitesimal con respecto a la sucesión* $\{w_n\}$ *y escribiremos* $z_n = o(w_n)$ *si existe una sucesión infinitesimal* $\{\alpha_n\}$ *tal que* $z_n = \alpha_n w_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

**Definición 5.** *Las sucesiones* $\{z_n\}$ *y* $\{w_n\}$ *se llaman equivalentes o iguales asintóticamente si existe una sucesión* $\{\varepsilon_n\}$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1 \quad \text{y} \quad z_n = \varepsilon_n w_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

En este caso se escribe $z_n \sim w_n$, $n = 1, 2, \ldots$ .

Ejercicios. 1. Demuéstrese que para que $z_n \sim w_n$ es necesario y suficiente que $z_n = w_n + o(w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ .

2. Demuéstrese: si $z_n = cw_n + o(w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces $z_n = O(w_n)$.

También se pueden analizar las funciones de argumento complejo. Por ejemplo, $f(z) = |z|$, $f(z) = z^2$. Ambas funciones están definidas sobre el conjunto de todos los números complejos, la primera de ellas toma sólo valores reales no negativos, la segunda toma también valores esencialmente complejos.

Geométricamente, si la función $f(z)$ está definida sobre cierto conjunto $X$ del espacio euclídeo $n$-dimensional $R^n$ y toma valores complejos, entonces define una aplicación del conjunto $X$ en el plano. Por ejemplo, la función del conjunto $w = |z|$ aplica el plano en una semirrecta y la función $w = z^2$ todo el plano en todo el plano, como se dice, de una forma doble, en el caso dado, esto significa que en la aplicación $w = z^2$ cada punto de la imagen menos el cero tiene una preimagen compuesta por dos puntos.

Si el conjunto $X$ sobre el cual se da cierta función está en el plano $R^2$, entonces se puede analizar siempre para un sistema de coordenadas fijo como un conjunto de números complejos y la función dada como una función de argumento complejo.

Para las funciones de valores complejos definidas sobre un conjunto $X$ del espacio $n$-dimensional $R^n$ se pueden introducir muchos de los conceptos introducidos anteriormente para las funciones de valores reales (límite, continuidad, derivadas parciales, diferenciabilidad, integral y otros). En los párrafos próximos nos veremos obligados a encontrarnos sólo con el concepto de acotación y continuidad de funciones de valores complejos.

La función de valores complejos $f(P)$, $P \in X$ se llama *acotada sobre el conjunto* $X$ si sobre este conjunto está acotada la función $|f(P)|$.

De esta forma, el concepto de que la función $f$ de valores complejos es acotada se reduce al concepto de que la función $|f|$ de valores reales es acotada.

**Definición 6.** *Sea $f$ una función de valores complejos definida sobre el conjunto $X \subset R^n$ y sea $P_0 \in X$. La función $f$ se llama continua en el punto $P_0$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta_{(\varepsilon)} > 0$ tal que para todos los puntos $P \in X$ que satisfacen la condición $\rho(P, P_0) < \delta$, se cumple la desigualdad*

$$|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon.$$

Vemos que por su forma esta definición coincide completamente con la definición de continuidad para las funciones de valores reales (compárese con el p. 19.3).

En el caso cuando $X$ es un conjunto plano y por lo tanto sus puntos se pueden analizar como números complejos $z$, la definición de continuidad toma la forma: la función $f(z)$ es continua en el punto $z_0 \in X$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todos los $z \in X$ que satisfacen la condición $|z - z_0| < \delta$, se cumple la desigualdad

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Una función de valores complejos continua en cada punto de cierto conjunto se llama continua sobre este conjunto. Por la definición de continuidad de una función y la desigualdad

$$||f(P)| - |f(P_0)|| \leqslant |f(P) - f(P_0)|,$$

es evidente que si la función $f(P)$ definida sobre el conjunto $X \subset R^n$, es continua en algún punto $P_0$ de este conjunto: $P_0 \in X$, entonces la función de valores reales $|f(P)|$ es continua sobre este conjunto. Por esto, si la función de valores complejos $f$ es continua sobre el compacto $X \subset R^n$, entonces, por lo dicho, la función $|f|$ también es continua y por consiguiente acotada sobre este compacto. Esto, según la definición dada anteriormente de la acotación de función significa que la propia función $f$ está acotada. De esta forma, para las funciones continuas de valores complejos es válido el análogo de la primera afirmación del teorema de Weierstrass (véase el teorema 3 en el p. 19.4): una función continua sobre un compacto está acotada sobre él.

A las funciones de valores complejos también se trasladan los teoremas de que si dos funciones $f$ y $g$ definidas sobre cierto conjunto $X \subset R^n$ son continuas en el punto $P_0 \in X$, entonces las funciones $f + g$, $fg$ y si $g(P_0) \neq 0$, entonces también $f/g$ son continuas en este punto. De este teorema se deduce, por ejemplo, que cualquier polinomio $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ con coeficientes complejos $a_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, es continuo en cualquier punto $z_0 \in C$ (compárese con el p. 7.1).

### 23.4. DESCOMPOSICIÓN DE POLINOMIOS EN FACTORES

Sea

$$P_n(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0 \tag{23.6}$$

un polinomio con coeficientes complejos, en general, $A_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Si $A_n \neq 0$, entonces el número $n$ se llama *grado del polinomio*.

Del álgebra es conocido que si el grado $m$ del polinomio $Q_m(x)$ no sobrepasa el grado $n$ del polinomio $P_n(x)$, entonces existen los polinomios $S_k(x)$ de grado $k$ y $R_l(x)$ de grado $l$, tales que $n = m + k$, $0 \leqslant l < m$, y el polinomio $P_n(x)$ es representable en la forma

$$P_n(x) = S_k(x)Q_m(x) = R_l(x).$$

Además, tal representación es única.

La operación de hallar los polinomios $S_k(x)$ y $R_l(x)$ según los polinomios dados $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ se llama *división del polinomio* $P_n(x)$ entre $Q_m(x)$; el polinomio $P_n(x)$, *dividendo*; $Q_m(x)$, *divisor*; $S_k(x)$, *cociente* y $R_l(x)$, *residuo* de la división de $P_n(x)$ entre $Q_m(x)$.

Señalemos que de $m = 1$ se deduce que $l = 0$, es decir, en este caso el residuo de la división es una constante.

El número complejo $z_0$ tal que

$$P_n(z_0) = 0,$$

se llama *raíz* del polinomio dado (23.6).

Si el polinomio $P_n(z)$ de grado $n \geqslant 1$ se divide por $z - \zeta$, donde $\zeta$ es un número complejo cualquiera, entonces obtendremos

$$P_n(z) = (z - \zeta)Q_{n-1}(z) + r,$$

donde $Q_{n-1}(z)$ es un polinomio de grado $n - 1$, y el resto $r$ es una constante. De aquí se deduce directamente que el número $z_0$ es una raíz del polinomio $P_n(z)$ si y sólo si el polinomio $P_n(z)$ es divisible sin resto por $z - z_0$ (teorema de Bézout *)).

Si el polinomio $P_n(z)$ es divisible por $(z - z_0)^k$ ($k$ es un entero positivo) y no es divisible por $(z - z_0)^{k+1}$, entonces el número $k$ se llama *multiplicidad de la raíz* $z_0$.

De esta forma, si el número complejo $z_0$ es una raíz de multiplicidad $k$ del polinomio $P_n(z)$, entonces

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z)$$

donde $Q_{n-k}(z)$ es un polinomio de grado $n - k$, tal que $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

El el curso de álgebra se demuestra que *cualquier polinomio* $P_n(z)$ *de grado* $n \geqslant 1$ *tiene al menos una raíz* $z_1$. Si su multiplicidad es igual a $k_1$, entonces, como se ha señalado, es válida la descomposición

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} Q_{n-k_1}(z), \quad Q_{n-k_1}(z_1) \neq 0,$$

donde el grado del polinomio $Q_{n-k_1}(z)$ es menor que $n$. El polinomio $Q_{n-k_1}(z)$, si su grado es mayor que 1, tiene también al menos una raíz $z_2$. Si la multiplicadad de esta raíz es igual a $k_2$, entonces

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} Q_{n-k_1-k_2}(z),$$
$$Q_{n-k_1-k_2}(z_1) \neq 0, \quad Q_{n-k_1-k_2}(z_2) \neq 0.$$

*) E. Bézout (1730—1783), matemático francés.

Condinuando este proceso, después de un número finito $m$ de pasos obtendremos un polinomio de grado cero $P_{n-k_1-\dots-k_m(z)} = A_n$, y por lo tanto, para el polinomio $P_n(z)$ es válida la siguiente descomposición en factores

$$P_n(z) = A_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}, \tag{23.7}$$

donde $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, de donde se deduce que *cada polinomio de grado $n \geqslant 1$ tiene exactamente $n$ raíces, si cada raíz se cuenta tantas veces como sea su multiplicidad.*

Para el polinomio (23.6) designemos por $\bar{P}_n(z)$ al polinomio cuyos coeficientes son los números complejos conjugados de los coeficientes del polinomio $P_n(z)$:

$$\bar{P}_n(z) = \bar{A}_n z^n + \bar{A}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \bar{A}_1 z + \bar{A}_0.$$

El polinomio $\bar{P}_n(z)$ se llama polinomio *conjugado* del polinomio $P_n(z)$.

En virtud de las propiedades de los números complejos tenemos

$$\overline{P_n(z)} = \bar{P}_n(\bar{z})$$

En realidad,

$$\overline{P_n(z)} = \overline{A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \dots + A_n z + A_0} =$$
$$= \bar{A}_n \bar{z}^n + \bar{A}_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + \bar{A}_n \bar{z} + \bar{A}_0 = \bar{P}_n(\bar{z})$$

Es evidente también que $\bar{\bar{P}}(z) = P(z)$.

Mostremos que si el número $z_0$ es una raíz del polinomio $P_n(z)$ de multiplicidad $k$, entonces el número conjugado de él $\bar{z}_0$ es una raíz del polinomio conjugado $\bar{P}_n(z)$ y además de la misma multiplicidad.

En efecto, pasando en las fórmulas

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z), \quad Q_{n-k}(z_0) \neq 0,$$

a las expresiones conjugadas, obtendremos

$$\bar{P}_n(\bar{z}) = (\bar{z} - \bar{z}_0)^k \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}), \quad \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

Suponiendo para mayor claridad $\zeta = \bar{z}$($\bar{z}$ y también $z$ son números complejos arbitrarios) transcribamos las fórmulas obtenidas en la forma

$$\bar{P}_n(\zeta) = (\zeta - \bar{z}_0)^k \bar{Q}_{n-k}(\zeta), \quad \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

Esto significa que el número $\bar{z}_0$ es una raíz de multiplicidad $k$ para el polinomio $\bar{P}_n(z)$.

Sean ahora todos los coeficientes del polinomio $P_n(z)$, números reales. En este caso el polinomio conjugado $\bar{P}_n(z)$, evidentemente coincide con el propio polinomio $P_n(z)$. Por esto, de lo demostrado se deduce que si el número complejo $z_0$ es una raíz de multiplicidad $k$ del polinomio $P_n(z)$ con coeficientes reales, entonces también el número conjugado de él $\bar{z}_0$ es una raíz de multiplicidad $k$ de este polinomio.

Señalemos a continuación que el producto $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ es siempre un polinomio (respecto a $z$) con coeficientes reales. En efecto, sea $z_0 = a + bi$, donde $a$ y $b$ son reales. Entonces $\bar{z}_0 = a - bi$, y por esto

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = (z - a - bi)(z - a + bi) =$$
$$= (z - a)^2 + b^2 = z^2 - 2az + a_2 + b^2 = z^2 + pz + q, \tag{23.8}$$

donde se ha hecho $p = -2a$ y $q = a^2 + b^2$, evidentemente $p$ y $q$ son reales. Señalemos que $\frac{p^2}{4} - q = -b^2$, por esto, cuando $b \neq 0$, es decir, cuando la raíz $z_0$ es un número esencialmente complejo se cumple la desigualdad

$$\frac{p^2}{4} - q < 0. \tag{23.9}$$

Prestemos atención también a la validez de la afirmación inversa: si se cumple la desigualdad (23.9), entonces las raíces del trinomio $z^2 + pz + q$ ($p$ y $q$ son reales) son números esencialmente complejos.

De lo dicho se deduce que para cualquier polinomio de grado $n$ con coeficientes reales es válida la descomposición en factores del tipo

$$P_n(x) = A_n(x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots$$
$$\dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}, \tag{23.10}$$

donde

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + 2\sum_{j=1}^{s} \beta_j = n, \quad \frac{p_j^2}{4} - q_j < 0, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

y todos los coeficientes $A_n$, $a_1 \dots, a_r$; $p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$, son reales. En este caso $a_1, \dots, a_r$ son todas las raíces reales del polinomio $P_n(x)$, y a cada raíz esencialmente compleja $z_0$ y a su raíz conjugada $\bar{z}_0$ le corresponde un factor del tipo $x^2 + px + q = (x - z_0)(x - \bar{z}_0)$. En lugar de la letra $z$, que ha sido utilizada con anterioridad para designar el argumento del polinomio analizado, aquí se ha empleado la letra $x$, como es tradicional, para subrayar que el análisis se realiza en la región real.

La fórmula (23.10) se deduce directamente de las fórmulas (23.7) y (23.8): es necesario agrupar, en la descomposición (23.7), por parejas los factores con raíces conjugadas y escribir los productos del tipo $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ en la forma (23.8).

Entonces, notando que la multiplicidad de las raíces conjugadas $z_0$ y $\bar{z}_0$ son iguales, obtendremos la fórmula (23.10).

La descomposición de un polinomio en factores del tipo (23.10) es única, ya que se determina unívocamente por las raíces de este polinomio y por sus multiplicidades.

## 23.5.* MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE POLINOMIOS

Sea dado un polinomio $P(x)$. Cualquier polinomio $R(x)$, por el cual se divide el polinomio $P(x)$, es decir,

$$P(x) = R(x)r(x), \tag{12.11}$$

donde $r(x)$ también es un polinomio, se llama *divisor* del polinomio $P(x)$.

Hemos visto que el polinomio $P(x)$ se puede escribir en la forma

$$P(x) = A(x-a_1)^{\alpha_1} \dots (x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \dots \\ \dots (x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \quad (23.12)$$

donde $a_1, \dots, a_r$ son las raíces reales del polinomio, y los factores del tipo $x^2 + p_jx + q_j$ corresponden a las raíces esencialmente complejas de este polinomio,

$$\frac{p_j^2}{4} - q_j < 0, \quad j = 1, 2, \dots, s;$$

los coeficientes $A, p_j$ y $q_j$ ($j = 1, 2, \dots, s$) son reales. De aquí se deduce que cualquier divisor $R(x)$ del polinomio $P(x)$ puede ser escrito en la forma

$$R(x) = B(x-a_1)^{\lambda_1} \dots (x-a_r)^{\lambda_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1} \dots \\ \dots (x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}, \quad (23.13)$$

donde $\lambda_i \leqslant \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, $\mu_j \leqslant \beta_j$,

$$j = 1, 2, \dots, s. \quad (23.14)$$

En realidad, ningún otro factor que no sea del tipo

$$x - a \quad \text{y} \quad x^2 + px + q, \quad (23.15)$$

donde $a$, $p$ y $q$ son reales y $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$, puede aparecer en la descomposición del polinomio $R(x)$, ya que por un lado, el polinomio $R(x)$, como cualquier polinomio puede ser descompuesto en factores del tipo (23.15), por otro lado, de la fórmula (23.11) se deduce que si en la descomposición de $R(x)$ en factores se tiene el factor del tipo $x - a$, respectivamente del tipo $x^2 + px + q$, entonces $x = a$, respectivamente las raíces del trinomio $x^2 + px + q$, son precisamente raíces del polinomio $P(x)$; por esto, los factores indicados aparecen en la descomposición (23.12). Las desigualdades (23.14) también son evidentes: de la misma fórmula (23.11) se deduce que la multiplicidad de una raíz del polinomio $R(x)$ no puede sobrepasar la multiplicidad de esa misma raíz del polinomio $P(x)$.

Sean ahora dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. Cualquier polinomio que sea divisor tanto del polinomio $P(x)$ como del polinomio $Q(x)$ se llama su *divisor común*. El divisor común de dos polinomios que se divide por cualquier divisor común de estos polinomios, se llama su *máximo común divisor*.

Si los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ están escritos en el forma (23.12):

$$P(x) = A'(x-a_1')^{\alpha_1'} \dots (x-a'_{r'})^{\alpha'_{r'}}(x^2+p_1' + q_1')^{\beta_1'} \dots \\ \dots (x^2+p_s'x+q'_{s'})^{\beta'_{s'}}, \quad (23.16)$$

$$Q(x) = A''(x-a_1'')^{\alpha_1''} \dots (x-a''_{r''})^{\alpha''_{r''}}(x^2+p_1''x+q_1'')^{\beta_1''} \dots \\ \dots (x^2+p''_{s''}x+q''_{s''})^{\beta''_{s''}}, \quad (23.17)$$

entonces cualquiera de sus divisores comunes $R(x)$ se puede escribir de la forma (23.13), donde los factores

$$x - a_k \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad x^2 + p_l x + q_l \quad (l = 1, 2, \dots, s) \tag{23.18}$$

aparecen tanto en la descomposición (23.16) como en la descomposición (23.17).

Supongamos que los índices de los coeficientes de los factores de (23.18) en las descomposiciones (23.16) y (23.17) son iguales a $i'_k, j'_l$ e $i''_k, j''_l$, respectivamente, entonces por las desigualdades (23.14) tenemos

$$\begin{aligned} &\lambda_k \leqslant \alpha'_{i'_k}, \quad \lambda_k \leqslant \alpha''_{i''_k}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \\ &\mu_l \leqslant \beta'_{j'_l}, \quad \mu_l \leqslant \beta''_{j''_l}, \quad l = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \tag{23.19}$$

Para que el polinomio (23.13) sea el máximo común divisor de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es necesario y suficiente que los exponentes de las potencias $\lambda_k$, $k = 1, 2, \dots, r$ y $\mu_l$, $l = 1, 2, \dots, s$ sean los máximos entre los posibles, es decir, que

$$\begin{aligned} &\lambda_k = \min\{\alpha'_{i'_k}, \alpha''_{i''_k}\}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \\ &\mu_l = \min\{\beta'_{j'_l}, \beta''_{j''_l}\}, \quad l = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \tag{23.20}$$

En efecto, cuando se cumplen estas condiciones el polinomio $R(x)$ será un divisor común de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ y además se dividirá por cualquier polinomio del tipo (23.13) para el cual se cumplen las condiciones (23.19), es decir, $R(x)$ se dividirá por cualquier divisor común de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. □

Del tipo hallado de un común divisor, en particular del máximo común divisor, se deduce en primer lugar, que al máximo común divisor de dos polinomios no es único, no obstante dos máximos comunes divisores de dos polinomios dados pueden diferenciarse uno de otro sólo en un factor constante (la constante $B$ en la fórmula (23.13), se puede tomar arbitraria, no igual a cero); en segundo lugar, que el máximo común divisor de dos polinomios tiene un grado mayor que cualquiera de sus divisores comunes que no sea máximo común divisor.

En calidad de ejemplo útil para el futuro hallemos el máximo común divisor de un polinomio $P(x)$ y su derivada $P'(x)$.

Observemos previamente que si el número $a$ es una raíz real de multiplicidad $\alpha$ del polinomio $P(x)$, es decir,

$$P(x) = (x - a)^\alpha P_1(x), \quad P_1(a) \neq 0, \tag{23.21}$$

entonces $a$ es una raíz de multiplicidad $\alpha - 1$ del polinomio $P'(z)$.

En efecto, diferenciando (23.21) tenemos

$$P'(x) = \alpha(x - a)^{\alpha - 1} P_1(x) + (x - a)^\alpha P_1'(x) = (x - a)^{\alpha - 1} P_2(x),$$

donde

$$P_2(x) = \alpha P_1(x) + (x - a) P_1'(x)$$

y

$$P_2(a) = \alpha P_1(a) \neq 0.$$

De forma semejante, si

$$P(x) = (x^2 + px + q)^\beta P_3(x), \tag{23.22}$$

donde $\frac{p^2}{4} - q < 0$ y por lo tanto las raíces $z_1$ y $z_2$ ($z_2 = \bar{z}_1$) del trinomio $x^2 + px + q$ son esencialmente complejas, y si

$$P_3(z_1) \neq 0, \quad P_3(z_2) \neq 0, \quad \text{entonces } P'(x) = (x^2 + px + q)^{\beta - 1} P_4(x)$$

donde $P_4(z_1) \neq 0$, $P_4(z_2) \neq 0$, es decir, $P_4(z)$ no se divide por $x^2 + px + q$.

En efecto, diferenciando (23.22) obtendremos:

$$P'(x) = \beta(x^2 + px + q)^{\beta - 1}(2x + p)P_3(x) + \\ + (x^2 + px + q)^{\beta} P_3'(x) = (x^2 + px + q)^{\beta - 1} P_4(x),$$

donde $P_4(x) = \beta(2x + p)P_3(x) + (x^2 + px + q)P_3'(x)$ de donde se deduce que

$$P_4(z_1) = \beta(2z_1 + p)P_3(z_1) \neq 0, \quad P_4(z_2) = \beta(2z_2 + p)P_3(z_2) \neq 0,$$

ya que $z_1 \neq -p/2$ y $z_2 \neq -p/2$ al ser esencialmente complejas. □

De lo demostrado se deduce que si el polinomio $P(x)$ está escrito en la forma (23.12), entonces su derivada $P'(x)$ se puede representar en la forma

$$P'(x) = C(x - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r - 1}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1 - 1} \dots \\ \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s - 1} P_5(x),$$

donde el polinomio $P_5(x)$ no se divide ni por $x - a_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, ni por $x^2 + p_j x + q_j$, $j = 1, 2, \dots, s$, es decir, no tiene raíces comunes con el polinomio $P(x)$.

De las fórmulas (23.13) y (23.20) obtenemos que el máximo común divisor $R(x)$ del polonomio $P(x)$ y su derivada $P'(x)$ tiene la forma

$$R(x) = (x - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r - 1}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1 - 1} \dots \\ \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s - 1}. \quad (23.23)$$

El método desarrollado anteriormente de la obtención del máximo común divisor de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, en principio resuelve completamente la cuestión sobre la existencia y el aspecto del máximo común divisor. No obstante, prácticamente su aplicación puede provocar dificultades sustanciales: para la utilización de este método es necesario conocer las descomposiciones en factores del tipo (23.16) y (23.17) de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ dados, las cuales no siempre se logran escribir de forma explícita.

No obstante, existe otro método de obtención del máximo común divisor de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ llamado comúnmente *algoritmo de Euclides* *). Describámoslo.

Sea para mayor exactitud el grado del polinomio $P(x)$ mayor o igual al grado del polinomio $Q(x)$. Dividiendo $P(x)$ por $Q(x)$, obtendremos en calidad de cociente cierto polinomio $Q_1(x)$ y de residuo $R_1(x)$, cuyo grado evidentemente es menor que el grado del polinomio $Q(x)$ (en el caso contrario hubiera sido posible continuar el proceso de dividir por $Q(x)$):

$$P(x) = Q(x)Q_1(x) + R_1(x).$$

---

*) Euclides (apr. 365 — apr. 300 a. n. e.), matemático de la Antigua Grecia.

De esta fórmula se deduce: 1) si los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se dividen por cierto polinomio $r(x)$, entonces el polinomio $R_1(x)$ también se divide por este polinomio: 2) si los polinomios $Q(x)$ y $R_1(x)$ se dividen por cierto polinomio $r(x)$, entonces el polinomio $P(x)$ también se divide entre este polinomio $r(x)$. De aquí a su vez se deduce que los divisores comunes de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, en particular sus máximos comunes divisores coinciden con los divisores comunes, respectivamente con los máximos comunes divisores, de los polinomios $Q(x)$ y $R_1(x)$.

Dividamos a continuación el polinomio $Q(x)$ por el polinomio $R_1(x)$:

$$Q(x) = R_1(x)Q_2(x) + R_2(x),$$

continuando el proceso más adelante, tendremos

$$R_1(x) = R_2(x)Q_3(x) + R_3(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x)Q_k(x) + R_k(x).$$

Los grados de los polinomios $R_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, decrecen, por esto existe un número (lo denotaremos por $m + 1$) tal que $R_{m+1}(x) = 0$ y por consiguiente

$$R_{m-1}(x) = R_m(x)Q_{m+1}(x).$$

Los pares de polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, $Q(x)$ y $R_1(x)$, $R_1(x)$ y $R_2(x)$ ... ... $R_{m-1}(x)$ y $R_m(x)$ tienen divisores comunes iguales y esto significa que tienen máximos comunes divisores iguales. Pero $R_{m-1}(x)$ se divide por $R_m(x)$, por lo que $R_m(x)$ es el máximo común divisor de $R_{m-1}(x)$ y $R_m(x)$, y quiere decir que también es el máximo común divisor de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$.

## 23.6. DESCOMPOSICIÓN DE LAS FRACCIONES RACIONALES PROPIAS EN FRACCIONES ELEMENTALES

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios con coeficientes reales.

*La fracción racional $P(x)/Q(x)$ se llama propia si el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x)$.*

Si la fracción racional $P(x)/Q(x)$ no es propia, entonces realizando la división del numerador por el denominador según la regla de división de polinomios se puede representar en la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \tag{23.24}$$

donde $R(x)$, $P_1(x)$ y $Q_1(x)$ son ciertos polinomios y $P_1(x)/Q(x)$ es una fracción racional propia.

**Lema 1.** *Sea $P(x)/Q(x)$ una fracción racional propia. Si el número $a$ es una raíz real de multiplicidad $\alpha \geqslant 1$ del polinomio $Q(x)$, es decir,*

$$Q(x) = (x - a)^\alpha Q_1(x) \quad \text{y} \quad Q_1(a) \neq 0,$$

*entonces existen el número real $A$ y el polinomio $P_1(x)$ con coeficientes reales tales que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)},$$

*donde la fracción* $\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)}$ *también es propia.*

DEMOSTRACIÓN. Cualquiera que sea el número real $A$, restando de la fracción

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}$$

la expresión $\dfrac{A}{(x-a)^\alpha}$ y luego agregándola obtendremos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \left[\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha}\right] =$$
$$= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}. \quad (23.25)$$

Por condición el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x) = (x-a)^\alpha Q_1(x)$. Es evidente que el grado del polinomio $Q_1(x)$ también es menor que el grado del polinomio $Q(x)$ (ya que $\alpha \geqslant 1$) por lo que cualquiera que sea la elección del número $A$ la fracción racional $\dfrac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}$ es regular.

Escojamos ahora el número $A$ de tal forma que el número $a$ sea raíz del polinomio $P(x) - AQ_1(x)$ y por consiguiente, que este polinomio sea divisible por $x - a$. Dicho de otro modo definamos $A$ a base de la condición.

$$P(a) - AQ_1(a) = 0;$$

por cuanto por condición $Q_1(a) \neq 0$, entonces $A = \dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$. Para tal elección de $A$ el segundo sumando de la parte derecha en la fórmula (23.25) se puede simplificar por $x - a$, como resultado obtendremos una fracción del tipo

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)}.$$

Por cuanto ella se ha obtenido con la simplificación de una fracción racional propia con coeficientes reales por el factor $x - a$, donde $a$ es real, entonces ella misma también es una fracción racional propia con coeficientes reales. □

OBSERVACIÓN 1. Si los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ tienen coeficientes complejos y $z = a$ es una raiz compleja de multiplicidad $\alpha \geqslant 1$ del polinomio $Q(z)$, entonces la descomposición (23.25) también tiene lugar, pero el número $A$ en este caso es ya, en general, un número complejo. La validez de esto se deduce directamente de los razonamientos realizados en la demostración del lema 1.

**Lema 2.** *Sea* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *una fracción racional propia. Si el número complejo* $z_1 =$ $= a + bi$ *(*$a$ *y* $b$ *son reales,* $b \neq 0$*) es una raíz de multiplicidad* $\beta \geqslant 1$ *del polino-*

*mio* $Q(x)$, *es decir,*

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^\beta Q_1(x),$$

*donde* $Q_1(z_1) \neq 0$ *y* $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$, *entonces existen los números reales* $M$, $N$ *y el polinomio* $P_1(x)$ *con coeficientes reales tales que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta - 1} Q_1(x)}$$

*donde la fracción* $\dfrac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta - 1} Q_1(x)}$ *también es propia.*

DEMOSTRACIÓN. Para cualesquiera $M$ y $N$ reales tenemos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q_1(x)} =$$

$$= \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \left[\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q_1(x)} - \frac{\mathrm{Mx + N}}{(x^2 + px + q)^\beta}\right] =$$

$$= \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{P(x) - (Mx + N)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q_1(x)}, \quad (23.26)$$

y además el segundo sumando del segundo miembro de la igualdad (23.26) es, como no es difícil ver, una fracción propia.

Tratemos ahora de escoger $M$ y $N$ de forma tal que el numerador de esta fracción sea divisible entre $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$. Para esto es suficiente elegir $M$ y $N$ de forma tal que $z_1$ sea raíz del polinomio $P(x) - (Mx + N)Q_1(x)$. En efecto, entonces, por lo dicho en el p. 23.3, el número $\bar{z}_1$, conjugado a $z_1$ también será raíz del polinomio indicado. De aquí se deduce que este polinomio, por la existencia de la descomposición del tipo (23.10) es divisible por $x^2 + px + q$. Así, sea

$$P(z_1) - (Mz_1 + N)Q_1(z_1) = 0. \quad (23.27)$$

Si esto tiene lugar, entonces $Mz_1 + N = \dfrac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}$, donde por condición $Q_1(z_1) \neq 0$.

Sea $z_1 = a + bi$, $P(z_1)/Q(z_1) = A + Bi$, entonces

$$A + iB = Mz_1 + N = M(a + bi) + N.$$

De aquí, igualando las partes imaginarias y reales obtendremos las ecuaciones $Ma + N = A$ y $Mb = B$, por consiguiente

$$M = \frac{B}{b} \quad \text{y} \quad N = A - \frac{a}{b}B. \quad (23.28)$$

Para estos valores de $M$ y $N$ el polinomio

$$P(x) - (Mx + N)Q_1(x)$$

se dividará por el polinomio $x^2 + px + q$. Simplificando el segundo sumando de segundo miembro de la igualdad (23.26) por $x^2 + px + q$ obtendremos una fracción del tipo

$$\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta - 1}Q_1(x)}.$$

Por cuanto ella se obtuvo con la simplificación de una fracción racional propia con coeficientes reales por un polinomio con coeficientes reales, entonces ella misma es también una fracción racional propia con coeficientes reales. □

Enunciemos ahora el teorema principal de este punto.

**Teorema 1.** *Sean $P(x)/Q(x)$ una fracción racional propia *), $P(x)$ y $Q(x)$, polinomios con coeficientes reales.*

*Si* $Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \ldots$

$$\ldots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}, \quad (23.29)$$

*donde $a_i$ son raíces reales distintos dos a dos del polinomio $Q(x)$ de multiplicidad $\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, y $x^2 + p_jx + q_j = (x - z_j)(x - \bar{z}_j)$, donde $z_j$ y $\bar{z}_j$ son raíces esencialmente complejas, distintos dos a dos para distintos $j$ del polinomio $Q(x)$ de multiplicidad $\beta_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$; entonces existen los números reales $A_i^{\alpha}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i$,*

$$M_j^{(\beta)} \ \text{y} \ N_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, s, \ \ \beta = 1, 2, \ldots, \beta_j$$

*tales que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 1}} + \ldots + \frac{A_1^{\alpha_1}}{x - a_1} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_r^{(1)}}{(x - a_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x - a_r)^{\alpha_1 - 1}} + \ldots + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x - a_r} +$$

$$+ \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}} + \frac{M_1^{(2)}x + N_1^{(2)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_s - 1}} + \ldots + \frac{M_1^{(\beta_1)}x + N_1^{(\beta_1)}}{x^2 + p_1x + q_1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{M_s^{(1)}x + N_s^{(1)}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}} + \frac{M_s^{(2)}x + N_s^{(2)}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s - 1}} + \ldots + \frac{M_s^{\beta_s}x + N_s^{\beta_s}}{x^2 + p_sx + q_s}. \quad (23.30)$$

DEMOSTRACIÓN. De la descomposición (23.29) tenemos:

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1}Q_1(x).$$

Aquí

$$Q_1(x) = (x - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}$$

---

*) Sin perder generalidad se puede considerar que el coeficiente del término de mayor grado del polinomio $Q(x)$ es igual a la unidad, ya que en el caso cuando él es igual a otro número (distinto de cero) se puede dividir el numerador y el denominador de la fracción $P(x)/Q(x)$ por este número, después de lo cual el polinomio obtenido en el denominador tiene el coeficiente del término de mayor grado igual a la unidad.

y por consiguiente $Q_1(a_1) \neq 0$, por lo que según el lema 1

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a)^{\alpha_1}} + \frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1 - 1}Q_1(x)}.$$

Aplicando de forma semejante el mismo lema cuando $\alpha_1 > 1$ a la fracción racional $\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha_1 - 1}Q_1(x)}$ obtendremos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1 - 1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1 - 2}Q_2(x)}.$$

Continuando este proceso más adelante mientras que el exponente de la potencia del factor $x_1 - a$ se convierte en cero y procediendo luego de forma análoga respecto a los factores $x - a_i$, $i = 2, \dots, r$, tendremos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1 - 1}} + \dots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-a_1} + \\ + \dots + \frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r - 1}} + \dots + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x-a_r} + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)},$$

donde $\dfrac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ de nuevo es una fracción racional propia y además $P^*(x)$ y $Q^*(x)$ son polinomios con coeficientes reales y el polinomio $Q^*(x)$ no tiene raíces reales.

Aplicando sucesivamente el lema 2 a la fracción $P^*(x)/Q^*(x)$ y a las expresiones obtenidas en este proceso, como resultado obtendremos la fórmula (23.30). □

Las fracciones racionales del tipo

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}} \quad \text{y} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}},$$

donde $a, p, q, A, M$ y $N$ son números reales y $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$ (las raíces del trinomio $x^2 + px + q$ son esencialmente complejas) se llaman *fracciones racionales elementales*.

De esta forma el teorema demostrado afirma *que cualquier fracción racional propia puede ser descompuesta en la suma de fracciones racionales elementales.*

Cuando se cumple la descomposición del tipo (23.30) para una fracción concreta dada comúnmente resulta cómodo el así llamado método de los coeficientes indeterminados. Este consiste en lo siguiente. Para la fracción dada $P(x)/Q(x)$ se escribe la descomposición (23.30) en la cual los coeficientes $A_i^{(\alpha)}, M_j^{(\beta)}, N_j^{(\beta)}$ se consideran incógnitas ($i = 1, 2, \dots, r$, $\alpha = 1, 2, \dots, \alpha_i$, $j = 1, 2, \dots, s$, $\beta = 1, 2, \dots, \beta_j$). Después de esto ambos miembros de la igualdad se reducen a un denominador común y para los polinomios obtenidos en el numerador se igualan los coeficientes. Si el grado del polinomio $Q(x)$ es igual a $n$, entonces, en general, en el numerador del segundo miembro de la igualdad (23.30), después de reducirlo a un denominador común se obtiene un polinomio de grado $n - 1$ es decir, un polinomio con $n$ coeficientes, el número de incógnitas $A_i^{(\alpha)}, M_j^{(\beta)}, N_j^{(\beta)}$ también es igual a $n$ (véase (23.10)):

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + 2\sum_{j=1}^{s} \beta_j = n.$$

De esta forma obtenemos un sistema de $n$ ecuaciones con $n$ incógnitas. La existencia de solución para ella se deriva del teorema demostrado.

Señalemos que después de reducir la expresión (23.30) a un denominador común y de su eliminación en el caso cuando $Q(x)$ tiene raíces reales, es conveniente sustituir en ambos miembros de la igualdad obtenida sucesivamente estas raíces; como resultado se obtienen ciertas relaciones entre los coeficientes buscados, útiles para su determinación final.

Ejemplos. 1. Descompongamos la fracción $x/((x^2 - 1)(x - 2))$ en fracciones elementales. Según (22.30) la descomposición buscada tiene la forma

$$\frac{x}{(x^2 - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 2}.$$

Reduciéndola al denominador común y eliminándolo, obtendremos

$$x = A(x + 1)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 1). \tag{23.31}$$

Tenemos el caso cuando todas las raíces del denominador son reales. Suponiendo en la igualdad (23.31), de acuerdo con lo dicho anteriormente, sucesivamente $x = 1, x = -1, x = 2$, hallaremos

$$1 = -2A, \quad -1 = 6B, \quad 2 = 3C,$$

de donde

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{6}, \quad C = -\frac{2}{3}.$$

De esta forma la descomposición buscada será

$$\frac{x}{(x^2 - 1)(x - 2)} = -\frac{1}{2(x - 1)} - \frac{1}{6(x - 1)} + \frac{2}{3(x - 2)}. \tag{23.32}$$

2. Hallemos la descomposición en fracciones elementales para $\dfrac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2}$. La forma general de la descomposición en este caso es

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}.$$

Reduciéndola al común denominador y eliminándolo tenemos

$$x^2 - 1 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x + (Dx + E)(x^2 + 1)x.$$

Igualemos los coeficientes para las potencias iguales de $x$:

$$-1 = A, \quad 0 = C + E, \quad 1 = 2A + B + D, \quad 0 = E, \quad 0 = A + D$$

de aquí hallamos

$$A = -1, \quad B = 2, \quad C = 0, \quad D = 1, \quad E = 0$$

y por esto la descomposición buscada tiene la forma

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x}{x^2 + 1}. \tag{23.33}$$

Es necesario observar que en los casos aislados la descomposición en fracciones elementales se puede obtener más fácil y simplemente, no recurriendo al método de los coeficientes indeterminados, sino actuando por cualquier otro camino Por ejemplo, para la descomposición de la fracción

$$\frac{1}{x^2(1 + x^2)^2}$$

en la suma de fracciones elementales lo más fácil es dos veces añadir y restar en el numerador $x^2$ y realizar la división como se indica a continuación:

$$\frac{1}{x^2(1 + x^2)^2} = \frac{(1 + x^2) - x^2}{x^2(1 + x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1 + x^2)} - \frac{1}{(1 + x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1 + x^2) - x^2}{x^2(1 + x^2)} - \frac{1}{(x + x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{(1 + x^2)^2}.$$

La descomposición obtenida como resultado es la descomposición de la fracción dada en suma de fracciones elementales.

Ejercicio 3. Demuéstrese que la descomposición del tipo (23.30) de una fracción racional propia es única.

OBSERVACIÓN 2. Si los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ tienen coeficientes complejos, entonces aplicando a la fracción $\frac{P(z)}{Q(z)}$ sucesivamente la fórmula (23.25) (véase la observación 1) obtendremos que cualquier fracción racional propia $\frac{P(z)}{Q(z)}$ es representable en la región compleja en la forma de una suma finita de fracciones elementales sólo del tipo $\frac{A}{(z - a)^k}$, $A \in C$, $k$ es un número entero no negativo que no sobrepasa la miltiplicidad $\alpha$ de la raíz $a$ del polinomio $Q(z)$, es decir,

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\alpha_j} \frac{A_j^k}{(z - a_j)^k}.$$

# § 24. INTEGRACIÓN DE FRACCIONES RACIONALES

## 24.1. INTEGRACIÓN DE FRACCIONES RACIONALES ELEMENTALES

En este párralo y en el próximo serán analizados los métodos de integración de ciertas clases de funciones elementales. En cada caso, sin aclararlo especialmente, vamos a suponer que se habla del cálculo de la integral sobre cierto segmento, en todos los puntos del cual está definida la función elemental subintegral (dicho de otra forma, sobre el cual la fórmula que define la función subintegral, tiene sentido, véase sobre esto en el p. 4.3).

En el párrafo anterior fue demostrado, que cualquier fracción racional es representable en forma de suma de un polinomio y fracciones racionales elementales (véanse (23.24) y (23.30)). La integral de un polinomio se calcula y además de manera muy simple (véase el p. 22.2). Analicemos la cuestión sobre la integración de las fracciones racionales elementales.

Primero analicemos el cálculo de las integrales de las fracciones de tipo

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Si $n = 1$, entonces (véase la fórmula 2 en el p. 22.2)

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A \ln|x-a| + C, \tag{24.1}$$

y si $n \neq 1$, entonces (véase la fórmula 1 en el p. 22.2)

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C. \tag{24.2}$$

Analicemos ahora las integrales de las fracciones

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$$

donde $\frac{p^2}{4} - q < 0$, $n = 1, 2, \dots$ De nuevo comencemos por el caso de $n = 1$. Observando que

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right),$$

y suponiendo $t = x + \frac{p}{2}$, $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$, obtendremos:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}\,dt = M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} +$$
$$+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a} + C. \tag{24.3}$$

En el caso de $n > 1$, suponiendo, como anteriormente, $t = x + \frac{p^2}{2}$, $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, de forma semejante, obtendremos

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}\,dx = M\int \frac{t\,dt}{(t^2 + a^2)^n} + \frac{2N - pM}{2}\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}. \tag{24.4}$$

Analicemos en particular cada una de las integrales obtenidas en el segundo miembro de esta igualdad. Lo que respecta a la primera de ellas, se calcula inmediatamente:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} + C. \tag{24.5}$$

La segunda integral del segundo miembro de la igualdad (24.4) se calcula un tanto más complicado. Sea

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Integremos la integral $I_n$ por partes, poniendo

$$u = \frac{1}{(t^2 + a^2)^n}, \quad dv = dt \quad \text{y por la tanto,} \quad du = -\frac{2nt\,dt}{(t^2 + a^2)^{n+1}}, \quad v = t,$$

y después agregando y restando $a^2$ en el numerador de la función que se obtuvo bajo el signo de la integral y realizando la división como está señalado a continuación, obtendremos

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n\int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}}\,dt =$$
$$= \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n\int \frac{(t^2 + a^2) - a^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}}\,dt =$$
$$= \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n\left[\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} - a^2\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{n+1}}\right],$$

es decir, $I_n = \dfrac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$, de donde

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + \frac{2n - 1}{2na^2} I_n, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{24.6}$$

La integral $I_1$ se calcula fácilmente (véase en el p. 22.2 la fórmula 12); la fórmula (24.6) permite calcular $I_2$; conociendo $I_2$, por la misma fórmula se puede hallar $I_3$; continuando este proceso se puede hallar la expresión para cualquier integral $I_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

## 24.2. CASO GENERAL

De los resultados del p. 23.6 y del p. anterior 24.1 se deduce directamente el siguiente teorema.

**Teorema 1.** *La integral indefinida de cualquier fracción racional sobre cualquier intervalo, sobre el cual el denominador de la fracción no se anula, existe y se expresa* *a través de funciones elementales, y concretamente es la suma algebraica de las superposiciones de fracciones racionales, arcos tangentes y logaritmos naturales.*

El teorema 1 es una consecuencia directa de las fórmulas (23.24), (23.30), (22.6), (22.8), (24.1) — (24.6). Estas fórmulas dan un método concreto del cálculo de la integral de una función racional: primero, dividiendo el numerador por el denominador, se separa la "parte entera", es decir, la fracción racional dada se representa en forma de suma de un polinomio y una fracción racional propia (23.24), después la fracción racional propia obtenida se descompone en una suma de fracciones elementales (23.30), después de lo cual utilizando linealidad de la integral (22.6) se pueden calcular las integrales de cada sumando por separado, por las fórmulas (22.8) y (24.1) — (24.6).

Ejemplos. 1. Calculemos $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x-2)}$. Ya es conocido (véase (23.32)) que

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)},$$

por lo que

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C.$$

2. Calculemos $\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx$. Por la regla general, separemos la parte entera, dividiendo el numerador entre el denominador obtendremos

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

Para la fracción racional propia obtenida está hallada su descomposición en fracciones elementales (véase la fórmula (23.33)):

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1},$$

por lo que

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} +$$

$$+ \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Se debe tener en cuenta, que el método de cálculo señalado de la integral indefinida de una fracción racional es general; con su ayuda se puede calcular la integral indefinida de cualquier fracción racional, si se puede obtener una descomposición concreta del denominador en factores del tipo (23.10). No obstante, naturalmente en casos particulares aislados resulta más conveniente para una reducción esencial de los cálculos utilizar otros caminos.

Por ejemplo, para el cálculo de la integral

$$I = \int \frac{x^2 dx}{(1 - x^2)^3}$$

es más sencillo no descomponer la función subintegral en fracciones elementales, sino utilizar la regla de integración por partes. Haciendo

$$u = x, \quad dv = \frac{x dx}{(1 - x^2)^3} \text{ y por consiguiente } du = dx, \quad v = \frac{1}{4(1 - x^2)^2}$$

obtendremos

$$I = -\frac{1}{2} \int x \frac{d(1 - x^2)}{(1 - x^2)^3} = \frac{x}{4(1 - x^2)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{(1 - x^2)^2} dx.$$

Agregando y restando $x^2$ del numerador de la función subintegral obtenida, realizando la división, obtenemos dos integrales de las cuales la primera es de tabla y la segunda se calcula fácilmente integrando por partes:

$$I = \frac{x}{4(1 - x^2)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{(1 - x^2) + x^2}{(1 - x^2)^2} dx =$$
$$= \frac{x}{4(1 - x^2)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1 - x^2} - \frac{1}{4} \int \frac{x^2 dx}{(1 - x^2)^2} =$$
$$= \frac{x}{4(1 - x^2)^2} - \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + \frac{1}{8} \int x \frac{d(1 - x^2)}{(1 - x^2)^2} =$$
$$= \frac{x}{4(1 - x^2)^2} - \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| - \frac{x}{8(1 - x^2)} +$$
$$+ \frac{1}{8} \int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{x}{4(1 - x^2)^2} - \frac{1}{16} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| - \frac{x}{8(1 - x^2)} + C.$$

## 24.3*. MÉTODO DE OSTROGRADSKI

En el punto (24.1) fue demostrado que cualquier fracción racional propia puede ser presentada en forma de suma de fracciones elementales. Pero del p. 24.1 se deduce que las primitivas de las fracciones elementales $\frac{1}{x - a}$ y $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \left( \frac{p^2}{4} - q < 0 \right)$ son funciones trascendentes de tipo

$A \operatorname{arctg}(a_1x + a_2) + B \ln(b_1x + b_2) + C$ (véase (24.1) y (24.3)); la primitiva de la fracción elemental

$$A/(x - a)^\alpha, \quad \alpha = 2, 3, \ldots,$$

es una fracción racional; la primitiva de la fracción elemental $(Mx + N)/(x^2 + px + q)^\beta$, $\beta = 2, 3, \ldots$, en virtud de las fórmulas (24.4), (24.5), (24.6) y la fórmula 12 del p. 22.2 puede ser, en general, representada en forma de suma de una fracción racional propia y una función trascendente del tipo $A \operatorname{arctg}(a_1x + a_2) + C$, que es la primitiva de la fracción del tipo $\dfrac{B}{x^2 + px + q}$ $\left(\dfrac{p^2}{4} - q < 0\right)$. Por esto, cualquier primitiva de cualquier fracción racional es representable, en general, en forma de suma de una fracción racional (parte algebraica) y una función trascendente que es la primitiva de la suma de las fracciones del tipo

$$\frac{A}{x - a} \text{ y } \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}, \quad \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

De esta manera, si $P(x)/Q(x)$ es fracción racional propia y

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}$$

- es la descomposición de su denominador en la forma (23.10), entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \left[\sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{x - a_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{M_jx + N_j}{x^2 + p_jx + q_j}\right]dx; \quad (24.7)$$

de aquí, realizando bajo el signo de la integral la adición de las fracciones, tenemos

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx, \quad (24.8)$$

donde $Q_2(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_r)(x^2 + p_1x + q_1) \ldots (x_2 + p_sx + q_s)$. De las fórmulas (24.2) y (24.6) se deduce que el polinomio $Q_1(x)$ tiene la forma

$$Q_1(x) = (x - a_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (x - a_r)^{\alpha_r - 1}(x^2 + {} + p_1x + q_1)^{\beta_1 - 1} \ldots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s - 1},$$

es decir, el polinomio $Q_1(x)$ es el máximo común divisor del polinomio $Q(x)$ y su derivada $Q'(x)$ (vease (23.23)).

La fórmula (24.8) se llama fórmula *de Ostrogradski* *). El segundo sumando de la parte derecha de la fórmula (24.8) se llama parte trascendente de la integral $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$; esto es natural ya que de lo dicho anteriormente se deduce que cualquier primitiva de la fracción $P_2(x)/Q_2(x)$ salvo un sumando constante representa

*) M. V. Ostrogradski (1801 — 1861), matemático ruso.

una combinación lineal de logaritmos y arcos tangentes de funciones racionales y esto significa, como se puede mostrar, que será en general una función trascendente. El primer sumando denominado parte algebraica puede ser hallado de manera completamente algebraica, si son conocidos los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ (y por lo tanto $Q'(x)$, es decir, sin integrar ninguna función). En realidad el polinomio $Q_1(x)$, siendo el máximo común divisor de los polinomios $Q(x)$ y $Q'(x)$, siempre puede ser hallado con ayuda del algoritmo de Euclides (véase el p. 23.5*), así mismo para hallar el polinomio $Q_1(x)$ no se exige el conocimiento de las raíces del polinomio $Q(x)$; no obstante, si las raíces del polinomio $Q(x)$ son conocidas, y por lo tanto se conoce su descomposición del tipo (23.17), entonces el polinomio $Q_1(x)$ se escribe directamente por la fórmula (23.23). El polinomio $Q_2(x)$ se halla como cociente de la división de $Q(x)$ entre $Q_1(x)$.

Para la búsqueda de los polinomios $P_1(x)$ y $P_2(x)$ se puede aplicar el método de los coeficientes indeterminados. Aclarémoslo. Denotemos el grado del polinomio $Q_1(x)$ por $n_1$, el grado del polinomio $Q_2(x)$ por $n_2$, entonces de la igualdad

$$Q(x) = Q_1(x)Q_2(x) \tag{24.9}$$

obtendremos $n = n_1 + n_2$. Puesto que las fracciones $P_1(x)/Q_1(x)$ y $P_2(x)/Q_2(x)$ son propias, los grados de los polinomios $P_1(x)$ y $P_2(x)$ respectivamente no son superiores a $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$ y por eso en estos polinomios la cantidad de coeficientes distintos de cero respectivamente no supera a $n_1$ y $n_2$; de esta manera, la cantidad de coeficientes desconocidos es igual a $n_1 + n_2 = n$. Diferenciando las primitivas que aparecen en ambas partes de la fórmula (24.8), tendremos (omitiendo, para mayor brevedad, la notación del argumento) la relación

$$\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)' + \frac{P_2}{Q_2}.$$

Realizando la diferenciación, tendremos

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1' Q_1 - P_1 Q_1'}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2}. \tag{24.10}$$

Observemos que

$$\frac{P_1' Q_1 - P_1 Q_1'}{Q_1^2} = \frac{P_1' Q_2 - P_1 R}{Q_1 Q_2}, \tag{24.11}$$

donde $R = Q_1' Q_2/Q_1$ es un polinomio. En realidad si $z$ es una raíz del polinomio $Q_1$ de multiplicidad $\lambda$, entonces como conocemos (vease el p. 23.4), $z$ es una raíz de multiplicidad $\lambda - 1$ para la derivada $Q_1'$ y la raíz de multiplicidad uno del polinomio $Q_2$, por eso en este caso $z$ es también una raíz de multiplicidad $\lambda$ para el polinomio $Q_1' Q_2$. De aquí por la fórmula (23.7) directamente se deduce que el polinomio $Q_1' Q_2$ se divide, sin residuo, entre el polinomio $Q_1$, es decir, que $R$ es también un polinomio. Así, de (24.9), (24.10) y (24.11) tenemos

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1' Q_2 - P_1 R}{Q} + \frac{P_2}{Q_2}.$$

de donde

$$P = P_1' Q_2 - P_1 R + P_2 Q_1. \tag{24.12}$$

El polinomio $P$ tiene grado no superior a $n - 1$ (ya que la fracción $P/Q$ es propia). Igualando los coeficientes de las potencias iguales $k$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, de la variable $x$ en ambos miembros de la igualdad (24.12), tendremos $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas. Anteriormente se demostró (véase (24.8)), que los polinomios $P_1$ y $P_2$ siempre (en particular, para algún polinomio dado $Q$ y para cualquier polinomio $P$ de grado que no supera a $n - 1$) existen; por eso el sistema obtenido de ecuaciones lineales tiene solución para cualquier segundo miembro *). De aquí se deduce que el determinante de este sistema no es igual a cero, y esto significa que del sistema estudiado se puede decir no sólo que tiene solución sino que la solución es única. Con esto no sólo hemos obtenido un método para la definición de los coeficientes desconocidos en la fórmula (24.8), sino que además queda demostrada la unicidad de esta suposición.

La fórmula (24.8) reduce, en general, el problema de la integración de cualquier fracción racional propia, al problema de integración de una fracción racional propia en la cual el denominador $Q(x)$ tiene sólo raíces reales. Con ayuda de esta fórmula, integrando una fracción racional propia, se puede hallar por el método señalado anteriormente la parte algebraica de la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, y después integrar una fracción racional más sencilla $P_2(x)/Q_2(x)$, si claro no resulta casualmente que $P_2(x)$ es un cero idéntico: en este caso el problema ya está resuelto.

El método aquí descrito de integración de fracciones racionales lleva el nombre de *método de Ostrogradski*.

Al utilizar el método de Ostrogradski para la integración de fracciones racionales con frecuencia resulta más conveniente escribir la fórmula de Ostrogradski (24.8) en la forma (24.7), ya que en este caso después de hallar los coeficientes desconocidos en la función subintegral, ella se puede integrar directamente.

Los coeficientes desconocidos en la fórmula (24.7) se hallan por el mismo método que fue descrito para la fórmula (24.8): se deben diferenciar ambos miembros de la igualdad (24.7) y reducir a un denominador común todas las fracciones racionales obtenidas en ambos miembros de la igualdad, igualar los coeficientes de los mismos grados de la variable $x$ en los polinomios que se encuentran en los numeradores y resolver el sistema de ecuaciones lineales obtenido.

Ejemplo. Apliquemos el método de Ostrogradski para el cálculo de la integral $\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1 - x)^3(1 + x^2)^2}\,dx$. Según la fórmula (24.8),

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1 - x)^3(1 + x^2)^2}\,dx = \frac{Kx^3 + Lx^2 + Mx + N}{(1 - x)^2(1 + x^2)} + \int \frac{kx^2 + lx + m}{(1 - x)(1 + x^2)}\,dx,$$

---

*) Como es usual se supone que todos los términos de las ecuaciones que contienen incógnitas y sólo ellos se trasladan al primer miembro de la igualdad.

por eso

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} = \left[\frac{Kx^2 + Lx^2 + Mx + N}{(1-x)^2(1+x^2)}\right]' + \frac{kx^2 + lx + m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

Diferenciando, obtendremos

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{\begin{matrix}(3Kx^2 + 2Lx + M)(1-x)(x^2+1) - (Kx^3 + Lx^2 + Mx + N) \times \\ \times [-2(1+x^2) + (1-x)2x]\end{matrix}}{(1-x)^3(1+x^2)^2} +$$

$$+ \frac{kx^2 + lx + m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

De aquí tenemos:

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x = (3Kx^2 + 2Lx + M)(-x^3 + x^2 - x + 1) -$$
$$- (Kx^3 + Lx^2 + Mx + N)(-4x^2 + 2x - 2) + (kx^2 + lx +$$
$$+ m)(x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 1).$$

Igualando los coeficientes con iguales exponentes de $x$, obtendremos

$$M + 2N + m = 0,$$
$$-M + 2L + 2M - 2N - 2m + l = 1,$$
$$3K - 2L + M + 2L - 2M + 4N + k - 2l + 2m = -2,$$
$$-M + 2L - 3K + 2K - 2L + 4M - 2K + 2l - 2m = 2,$$
$$3K - 2L - 2K + 4L + 2k - 2l + m = 1,$$
$$-3K + 4K - 2k + l = 0,$$
$$k = 0,$$

6

$$M + 2N + m = 0,$$
$$2L + M - 2N + l - 2m = 1,$$
$$3K - M + 4N + k - 2l + 2m = -2,$$
$$-K + 3M - 2k + 2l - 2m = 2,$$
$$K + 2L + 2k - 2l + m = 1,$$
$$K - 2k + l = 0,$$
$$k = 0.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, hallaremos

$$K = \frac{1}{2}, \quad L = -\frac{1}{2}, \quad M = \frac{3}{2}, \quad N = -1,$$
$$k = 0, \quad l = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2};$$

por eso

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{(1-x)^2(1+x^2)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{-x+1}{(1-x)(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{(1-x)^2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

# § 25. INTEGRACIÓN DE ALGUNAS IRRACIONALIDADES

## 25.1. OBSERVACIONES PREVIAS

Las funciones del tipo

$$R(u_1, \dots, u_n) = \frac{P(u_1, \dots, u_n)}{Q(u_1, \dots, u_n)}, \tag{25.1}$$

donde $P$ y $Q$ son polinomios de las variables $u_1, \dots, u_n$, es decir, funciones del tipo

$$\sum_{k_1 + \dots + k_n \leq k} a_{k_1, \dots, k_n} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n}$$

se llaman *funciones racionales de* $u_1, \dots, u_n$.

Si en la fórmula (25.1) las variables $u_1, \dots, u_n$ a su vez son funciones de la variable $x$: $u_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces la función

$$R[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)]$$

se llama *función racional* de las funciones $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$.

Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{x + \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2+1}}$$

es una función racional de $x$ y de los radicales $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2-1}$, y $\sqrt{x^2+1}$:

$$f(x) = R(x,\ \sqrt{x},\ \sqrt[3]{x^2-1},\ \sqrt{x^2+1});$$

aquí $R(u_1, u_2, u_3, u_4) = \dfrac{u_1 + u_3^2}{u_2 - u_4}$, $u_1 = x$, $u_2 = \sqrt{x}$, $u_3 = \sqrt[3]{x^2-1}$, $u_4 = \sqrt{x^2+1}$.

Si en la fórmula (25.1) las variables $u_1, \dots, u_n$ son funciones trigonométricas elementales, entonces la función compleja obtenida se llama función racional con relación a las funciones trigonométricas elementales. Un ejemplo de esta función es la siguiente:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x + \cos x} = R(\operatorname{sen} x, \cos x).$$

Pasemos ahora a las integrales de funciones de los tipos analizados y mostremos, que en una serie de casos, ellas se reducen a las integrales de funciones racionales.

## 25.2. INTEGRALES DEL TIPO $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx$

Analicemos las integrales señaladas en el título del punto con la condición de que las constantes $r_1, \dots, r_s$ son racionales y $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ ($a$, $b$, $c$, $d$ son constantes). La última suposición es natural, ya que si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, entonces los coeficientes $a$, $b$ serían proporcionales a los coeficientes $c$, $d$ y por eso la relación $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ no dependería de $x$. La función subintegral en este caso sería una fracción racional ordinaria de una variable, el problema sobre la integración de la cual fue analizado anteriormente.

Sea $m$ el denominador común de los numeros $r_1, \dots, r_s$:

$$r_i = \frac{p_i}{m}, \quad p_i \text{ es entero}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Hagamos

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{25.2}$$

de donde

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t); \tag{25.3}$$

$\rho(t)$ es una función racional, por eso $\rho'(t)$ es también una función racional, y más adelante

$$dx = \rho'(t)dt, \tag{25.4}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s. \tag{25.5}$$

Sustituyendo (25.3), (25.4) y (25.5) en la expresión subintegral analizada obtendremos

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx =$$
$$= \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \dots, t^{p_s}\right)\rho'(t)dt = \int R^*(t)dt$$

donde $R^*(t) = R\left(\dfrac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \dots, t^{p_s}\right)\rho'(t)$, evidentemente es una función racional de la variable $t$. De esta forma el cálculo de la integral

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx \tag{25.6}$$

se reduce a la integración de fracciones racionales.

Claro, para hallar la expresión de la integral inicial, es necesario, después del cálculo de la integral $\int R^*(t)dt$, haciendo el cambio inverso de la variable $t = ((ax + b)/(cx + d))^{1/m}$, regresar a la variable $x$ inicial. En el futuro en situaciones análogas, no haremos cada vez la explicación de la necesidad del paso inverso a la variable inicial $x$.

Señalemos que en particular, al tipo de integrales analizado pertenecen las integrales del tipo

$$\int R[x, (ax + b)^{r_1}, \dots , (ax + b)^{r_s}]dx, \text{ en particular } \int R(x, x^{r_1}, \dots , x^{r_s})dx.$$

Ejemplo. Calculemos la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$. Suponiendo por la regla general, $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$, obtendremos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6 \int \frac{t^3}{t+1}\, dt = 6\left[\int (t^2 - t + 1)dt - \int \frac{dt}{t+1}\right] =$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t + 1|\right] + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln (\sqrt[6]{x} + 1) + C.$$

Integrales de otros tipos a veces se reducen a las integrales del tipo (25.6) con ayuda de transformaciones elementales, por ejemplo,

$$\int \sqrt{(x - a)(x - b)}\, dx.$$

Mostremos el método de cálculo de integrales semejantes en el ejemplo de la integral

$$\int \sqrt{(x - 1)(x - 2)}\, dx. \tag{25.7}$$

Sacando en la función subintegral el factor $(x - 1)$ fuera del signo del radical, obtendremos una integral de tipo (25.6): precisamente cuando $x \geqslant 2$

$$\int \sqrt{(x - 1)(x - 2)}\, dx = \int (x - 1)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\, dx$$

y cuando $x < 1$

$$\int \sqrt{(x - 1)(x - 2)}\, dx = \int (1 - x)\sqrt{\frac{x-2}{k-1}}\, dx.$$

Cuando $1 < x < 2$ la expresión subintegral es imaginaria pura.

Veamos, por ejemplo, el caso $x \geqslant 2$. Hagamos aquí (véase (25.2)) $t^2 = \frac{x-2}{x-1}$, entonces

$$x = \frac{2 - t^2}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{2t\, dt}{(1 - t^2)^2},$$

por eso

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{2-t^2}{1-t^2} - 1\right)\frac{2t^2\,dt}{(1-t^2)^2} = 2\int \frac{t^2\,dt}{(1-t^2)^3},$$

o sea, se obtuvo una integral de una fracción racional que fue calculada anteriormente (véase el p. 24.2).

## 25.3. INTEGRALES DEL TIPO $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$. SUSTITUCIONES DE EULER

Las integrales indicadas pueden ser reducidas con ayuda de un cambio de variable a las funciones racionales. Analicemos tres cambios de variable que llevan el nombre de *sustituciones de Euler* *). Así pues, sea dada la integral

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx, \quad a \neq 0. \tag{25.8}$$

Primer caso: $a > 0$.

Hagamos el cambio de $x$ por $t$ de la siguiente manera:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t \tag{25.9}$$

(los signos se pueden tomar en cualquier combinación). Elevemos ambas partes de la igualdad escrita al cuadrado:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}\,xt + t^2$$

de donde

$$x = \frac{t^2 - c}{b \pm 2t\sqrt{a}} = R_1(t),$$

$R_1(t)$ es una función racional de $t$ y esto significa que $R_1'(t)$ es también una función racional.

Más adelante, $dx = R_1'(t)dt$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm R_1(t)\sqrt{a} \pm t = R_2(t)$, donde, evidentemente, $R_1(t)$ es una función racional. Finalmente

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = \int R(R_1(t), R_2(t))R_1'(t)dt = \int R^*(t)dt$$

donde $R^*(t) = R(R_1(t), R_2(t))R_1'(t)$ es una fracción racional. □

Segundo caso: las raíces del trinomio $ax^2 + bx + c$ son reales.

Sean $x_1$ y $x_2$ reales y son las raíces del trinomio $ax^2 + bx + c$. Si $x_1 = x_2$, entonces

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)^2} = |x - x_1|\sqrt{a}.$$

De aquí se deduce que en este caso o bien bajo la raíz está una magnitud negativa para todos los valores $x \neq x_1$, es decir, la raíz toma sólo expresiones imaginarias, este caso tiene lugar cuando $a < 0$ y no lo analizamos, o bien cuando $a \geqslant 0$ después de la transformación elemental señalada obtenemos que la varialbe $x$ no apare-

---

*) L. Euler (1707 — 1783), matemático suizo.

ce bajo el signo de la raíz, es decir, bajo la integral está solamente una función racional de $x$, en general, diferente para cada uno de los segmentos $(-\infty, x_1)$ y $(x_1, +\infty)$.

Analicemos ahora el caso cuando $x_1 \neq x_2$. Observando que $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ y sacando $x - x_1$ fuera del signo de la raíz obtenemos que

$$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) = R\left(x, |x - x_1| \sqrt{\frac{a(x - x_2)}{x - x_1}}\right) = \\ = R_3\left(x, \sqrt{\frac{a(x - x_2)}{x - x_1}}\right), \quad (25.10)$$

aquí $R_3(u, v)$ es una función racional de las variables $u$ y $v$.

Como es conocido (véase el p. 25.1) la integral de la función (25.10) puede ser calculada con ayuda de la sustitución (véase (25.2)) $t^2 = \dfrac{a(x - x_2)}{(x - x_1)}$, que en nuestro caso da

$$\pm(x - x_1)t = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)},$$

o, tomando $t > 0$ cuando $x \geqslant x_1$ y $t < 0$ cuando $x \leqslant x_1$, $(x - x_1)t = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. □

La integral (25.7) analizada en el punto anterior es un ejemplo del caso 2; esta integral fue reducida anteriormente a una fracción racional por el método que acabamos de examinar ahora en el caso general.

Los dos métodos de cálculo de la integral (25.8), estudiados por nosotros permiten siempre reducir esta integral a una integral de una fracción racional sobre cualquier intervalo, si sólo la raíz $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ sobre este segmento no toma valores imaginarios puros (es natural, estudiando el análisis en el campo real, excluir este caso). En realidad, supongamos que no tienen lugar ni el primero ni el segundo caso, es decir, $a < 0$ y las raíces $x_1$ y $x_2$ del trinomio $ax^2 + bx + c$ son esencialmente complejas: $x_1 = g + hi$, $x_2 = g - hi$, $h \neq 0$. Entonces

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = \\ = \sqrt{a(x - g - hi)(x - g + hi)} = \sqrt{a[(x - g)^2 + h^2]},$$

y ya que $a < 0$ y $h \neq 0$ entonces bajo la raíz para $x$ cualesquiera aparece una expresión negativa.

Tercer caso: $c > 0$.

En este caso se puede utilizar la sustitución

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$$

(la combinación de signos es arbitraria). Elevando al cuadrado obtendremos la igualdad

$$ax^2 + bx = \pm 2\sqrt{c}\,xt + x^2t^2$$

de donde

$$x = \frac{b \pm 2t\sqrt{c}}{t^2 - a} R_4(t), \quad dx = R_4'(t)dt,$$

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm R_4(t)t = R_5(t)$; donde $R_4(t)$, $R_4'(t)$ y $R_5(t)$ son funciones racionales de $t$. Por esto

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = \int R(R_4(t), \quad R_5(t))R_4'(t)dt = \int \tilde{R}(t)dt,$$

donde $\tilde{R}(t) = R(R_4(t), R_5(t))R_4'(t)$ es una fracción racional. □

Las integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d})\, dx$ se reducen mediante la sustitución

$$t^2 = ax + b \tag{25.11}$$

a las integrales analizadas del tipo (25.8).

En realidad, de (25.11) tenemos:

$$x = \frac{t^2 - b}{a}, \quad dx = \frac{2}{a}\, t\, dt, \quad \sqrt{cx + d} = \sqrt{\frac{c}{a}\, t^2 - \frac{cb}{a} + d} = \sqrt{At^2 + B},$$

donde $A = \dfrac{c}{a}$, $B = -\dfrac{cb}{a} + d$, por lo que

$$\int R(x, \quad \sqrt{ax + b}, \quad \sqrt{(cx + d})dx = \int R_6(t, \quad \sqrt{At^2 + B})dt,$$

donde $R_6(u, v)$ es una función racional de las variables $u$ y $v$. En el segundo miembro de la última igualdad aparece una integral del tipo (25.8). □

El cálculo de integrales con ayuda de las sustituciones de Euler a menudo nos lleva a expresiones muy voluminosas, por lo que se deben utilizar en general sólo cuando la integral analizada no se logra calcular con otro método más breve. Por ejemplo, observando que $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a}$, no es difícil convencerse de que la integral (25.8) en el caso, cuando la expresión subradical es positiva sobre cierto intervalo, con ayuda de una sustitución lineal puede ser reducida (compárese con el p. 22.3) a una de las tres integrales:

$$\int R(t, \quad \sqrt{1 - t^2})dt, \quad \int R(t, \quad \sqrt{t^2 - 1})dt, \quad \int R(t, \quad \sqrt{t^2 + 1})dt$$

(claro, aquí con el símbolo $R$ se denota, en general, otra función racional distinta a la de la fórmula (25.8)). Para el cálculo de las integrales obtenidas, a menudo resulta muy cómodo utilizar las sustituciones trigonométricas

$$t = \operatorname{sen} u, \quad t = \cos u, \quad t = \operatorname{tg} u,$$

y también las sustituciones hiperbólicas

$$t = \operatorname{st} h, \quad t = \operatorname{ch} u, \quad t = \operatorname{th} u.$$

## 25.4. INTEGRALES DEL BINOMIO DIFERENCIAL

La expresión $x^m(a + bx^n)^p\, dx (a \neq 0, b \neq 0)$ se llama *binomio diferencial*. Vamos a analizar el caso cuando $n$, $m$, y $p$ son racionales y $a$ y $b$ son números reales.

Hagamos

$$x = t^{1/n}, \tag{25.12}$$

entonces

$$dx = \frac{1}{n} t^{1/n - 1}\, dt \quad \text{y} \quad \int x^m (a + bx^n)^p\, dx = \frac{1}{n} \int (a + bt)^p\, t^{\frac{m+1}{n} - 1}\, dt.$$

De esta forma, la integral

$$\int x^m (a + bx^n)^p\, dx \tag{25.13}$$

se reduce mediante la sustitución (25.12) a la integral del tipo

$$\int (a + bt)^p\, t^q\, dt, \tag{25.14}$$

donde $q$ y $p$ son racionales. En el caso analizado

$$q = \frac{m + 1}{n} - 1.$$

Primer caso: $p$ es un número entero.

Sea $q = \frac{r}{s}$, donde $r$ y $s$ son números enteros; por los resultados del p. 25.2 en este caso la sustitución $z = t^{1/s}$ reduce la integral (25.14) a una integral de una fracción racional.

Segundo caso: $q$ es un número entero.

Sea ahora $p = r/s$, $r$ y $s$ son números enteros. Por los resultados del punto 25.2 la integral (25.14) se reducen en este caso, con la sustitución $z = (a + bt)^{1/s}$, a la integral de una fracción racional.

Tercer caso: $p + q$ es un entero.

Sean $p = r/s$ y $s$ enteros. Escribamos, para mayor claridad, la integral (25.14) en una forma algo diferente:

$$\int (a + bt)^p\, t^q\, dt = \int \left(\frac{a + bt}{t}\right)^p t^{p+q}\, dt.$$

De nuevo tenemos una integral del tipo analizado en el mismo punto 25.2. Esta vez a la integral de una fracción racional la reduce la sustitución

$$z = \left(\frac{a + bt}{t}\right)^{1/s}.$$

Así, en los tres casos, cuando uno de los números $p$, $q$ o $p + q$ es entero, la integral (25.14), con ayuda de las sustituciones señaladas anteriormente, se reduce a la integral de una fracción racional.

Este resultado, aplicado a la integral (25.13), toma la siguiente forma: cuando uno de los números $p$, $\frac{m + 1}{n}$ o $\frac{m + 1}{n} + p$ es entero, la integral (25.13) puede ser reducida a la integral de una fracción racional. Además, en el caso cuando $p$ es un entero, esta reducción la realiza la sustitución

$$z = x^{n/s},$$

donde el número $s$ es el denominador de la fracción $\frac{m+1}{n}$, es decir, $\frac{m+1}{n} = \frac{r}{s}$, en el caso cuando $\frac{m+1}{n}$ es entero, la sustitución

$$z = (a + bx^n)^{1/s},$$

donde el número $s$ es el denominador de la fracción $p$, es decir, $p = r/s$; y en el caso cuando $\frac{m+1}{n} + p$ es entero la sustitución

$$z = (ax^{-n} + b)^{1/s}$$

donde el número $s$ es también el denominador de la fracción $\rho$.

P. L. Chebishev [*] mostró que para los exponentes $m$, $n$ y $p$, que no satisfacen las condiciones antes señaladas, la integral (25.13) no se expresa a través de funciones elementales.

Ejemplo. Analicemos la integral

$$I = \int \sqrt{x}\sqrt[4]{1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}}\,dx = \int x^{1/2}\left(1 - x^{-\frac{3}{2}}\right)^{1/4}dx.$$

Aqui $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{3}{2}$, $p = \frac{1}{4}$ y $\frac{(m+1)}{n} = -1$; tenemos el segundo caso.

Hagamos la sustitución indicada anteriormente:

$$z = (1 - x^{-3/2})^{1/4}, \tag{25.15}$$

de donde

$$x = (1 - z^4)^{-\frac{2}{3}}, \quad dx = \frac{8}{3}(1 - z^4)^{-\frac{5}{3}} z^3\,dz,$$

y por esto

$$I = \frac{8}{3}\int \frac{z^4}{(1-z^4)^2}dz = \frac{2}{3}\int zd\,\frac{1}{1-z^4} = \frac{2}{3}\left(\frac{z}{i - z^4} - \int \frac{dz}{1-z^4}\right) =$$
$$= \frac{2z}{3(1-z^4)} - \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{1+z^2}\right)dz =$$
$$= \frac{2z}{3(l - z^4)} - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} z + C,$$

donde $z$ se expresa a través de $x$ por la fórmula (25.15).

## 25.5. INTEGRALES DEL TIPO $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Analicemos la integral

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \quad a \neq 0,$$

[*] P. L. Chebishev (1821 — 1894), matemático ruso.

donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado $n \geqslant 1$. En principio esta integral se puede reducir siempre a la integral de una fracción racional con ayuda de una de las sustituciones de Euler (véase el p. 25.3). No obstante, en el caso concreto dado, generalmente, nos lleva al objetivo mucho más rápido otro método.

Mostremos precisamente que es válida la fórmula

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (25.16)$$

donde $P_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado no superior a $n-1$ y $\alpha$ es cierto número.

Así, sea dado el polinomio

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0. \quad (25.17)$$

Si existe el polinomio

$$P_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0 \quad (25.18)$$

que satisface la condición (25.16), entonces diferenciando esta igualdad obtendremos:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= P'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{P_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\alpha}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

o

$$2P_n(x) = 2P'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + P_{n-1}(x)(2ax+b) + 2\alpha. \quad (25.19)$$

Aquí a la izquierda aparece un polinomio de grado $n$ y a la derecha cada sumando es también un polinomio de grado no mayor que $n$.

Observando que

$$P'_{n-1}(x) = (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + kb_kx^{k-1} + \ldots + b_1 \quad (25.20)$$

y sustituyendo (25.17), (25.18) y (25.20) en (25.19) tenemos las igualdades

$$2(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0) =$$
$$= 2(ax^2+bx+c)[(n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + kb_kx^{k-1} + \ldots + b_1] +$$
$$+ (2ax+b)(b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_kx^k + \ldots + b_0) + 2\alpha.$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de $x$ obtendremos el siguiente sistema de $n+1$ ecuaciones lineales con $n+1$ incógnitas $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, \alpha$:

$$2a_0 = 2cb_1 + bb_0 + 2\alpha,$$
$$2a_1 = 2bb_1 + 4cb_2 + 2ab_0 + bb_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2a_k = 2(k-1)ab_{k-1} + 2kbb_k + 2(k+1)cb_{k+1} + 2ab_{k-1} + bb_k, \quad (25.21)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2a_{n-1} = 2(n-2)ab_{n-2} + 2(n-1)bb_{n-1} + 2ab_{n-2} + bb_{n-1},$$
$$2a_n = 2(n-1)ab_{n-1} + 2ab_{n-1}.$$

De la última ecuación se halla inmediatamente $b_{n-1}$:

$$b_{n-1} = \frac{a_n}{n\alpha}.$$

Sustituyendo esta expresión en la penúltima ecuación y observando que en esta ecuación el coeficiente de la incógnita $b_{n-2}$ es igual a $2a(n-1) \neq 0$ hallaremos el valor de $b_{n-2}$. Sustituyendo a continuación los valores de $b_{n-1}$ y $b_{n-2}$ en la ecuación anterior hallaremos el valor $b_{n-3}$, etc. Sucesivamente obtendremos todos los valores de las incógnitas $b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Después de esto, de la primera ecuación se halla inmediatamente la incógnita $\alpha$.

De esta forma, el sistema (25.21) tiene solución para cualesquiera valores $a_0$, $a_1, \ldots, a_n$, por eso el determinante de este sistema es diferente de cero y la solución indicada es única.

En la práctica el polinomio $P_{n-1}(x)$ en la fórmula (26.16) se escribe con coeficientes indeterminados, los cuales se hallan resolviendo el sistema (25.21). Después de esto, el cálculo de la integral dada se reduce al cálculo de la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

la cual en el caso en que la expresión subradical es positiva en cierto intervalo se reduce fácilmente a una de tabla (véase el p. 22.3).

Las integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{(x-\lambda)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

con la sustitución

$$t = \frac{1}{x - \lambda}$$

se reducen fácilmente a integrales del tipo (25.16) analizado.

## § 26. INTEGRACIÓN DE ALGUNAS FUNCIONES TRASCENDENTES

### 26.1. INTEGRALES DEL TIPO $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$

La sustitución

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi$$

reduce la integral indicada en el título a la integral de una función racional. En realidad, tenemos

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1 + u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \tag{26.1}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} u, \quad dx = \frac{2\,du}{1 + u^2},$$

por lo que

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx = 2 \int R\left(\frac{2u}{1 + u^2}, \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right)\frac{du}{1 + u^2}.$$

De esta forma se obtuvo la integral de una función racional.

Calculemos por el método indicado la integral $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$. Utilizando las fórmulas (26.1) obtendremos:

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x} = 2 \int \frac{du}{(1 + u)^2} = -\frac{2}{1 + u} + C = -\frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

Es necesario, no obstante, tener en cuenta que aunque por principio las integrales analizadas siempre se pueden reducir a la integral de una función racional con el método indicado, en su aplicación práctica a menudo nos lleva a cálculos muy voluminosos; mientras que otros métodos, en particular las sustituciones del tipo

$$u = \operatorname{sen} x, \quad u = \cos x, \quad u = \operatorname{tg} x \tag{26.2}$$

a veces permiten calcular la integral necesaria, sustancialmente más rápido.

Ejemplos. 1. Analicemos la integral $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. Representémosla en la forma $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x}$. Inmediatamente se ve, que en este caso es muy cómoda la sustitución $u = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)d \operatorname{tg} x = \int (1 + u^2)du =$$

$$= u + \frac{u^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

2. Representando la integral $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos x}$ de la forma $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos x} = \int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\operatorname{sen}^4 x \cos x}$ nos convencemos de lo conveniente que es la sustitución $u = \cos x$. En efecto,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos x} = -\int \frac{d \cos x}{\operatorname{sen}^4 x \cos x} = -\int \frac{du}{(1 - u^2)^2 u} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du^2}{(1-u^2)^2u^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dv\ ^{*)}}{(1-v)^2v} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(1-v)+v}{(1-v)^2v}\,dv = -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1-v)v} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1-v)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(1-v)+v}{(1-v)v}\,dv - \frac{1}{2}\frac{1}{1-v} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{1-v} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-v} = -\frac{1}{2}\ln|v| +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln|1-v| - \frac{1}{2}\frac{1}{1-v} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + C.$$

Claro está, las integrales analizadas en los ejemplos 1 y 2 pueden ser calculadas también con ayuda de la sustitución (26.1), por ejemplo,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos x} = \frac{1}{4}\int \frac{(1+u^2)^3\,du}{u^3(1-u^2)};$$

no obstante, con este método hubiera sido necesario integrar una fracción racional más compleja que la del resultado de la aplicación de la sustitución $u = \cos x$.

3. A veces en el cálculo de integrales cuya expresión subintegral contiene $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, suele ser útil recurrir a otros métodos artificiales utilizando las fórmulas trigonométricas conocidas, como, por ejemplo, la fórmula $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Mostremos en el ejemplo que acabamos de analizar el método de aplicación de esta fórmula:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x \cos x}\,dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} =$$

$$= \int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^3 x} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} + \int \frac{d\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \int \frac{du}{u} + \int \frac{dv\ ^{*)}}{v^3} =$$

$$= \ln|u| - \frac{1}{2}\frac{1}{v^2} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + C.$$

Como era de esperar, se obtuvo el mismo resultado que anteriormente obtuvimos.

## 26.2. INTEGRALES DEL TIPO $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$

Sean $n$ y $m$ números racionales. La integral $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ con ayuda de las sustituciones $u = \operatorname{sen} x$ ó $u = \cos x$ se reduce a la integral de un binomio diferencial.

En efecto, suponiendo, por ejemplo, $u = \operatorname{sen} x$, obtendremos

$$\cos x = (1-u^2)^{1/2}, \quad du = \cos x\,dx, \quad dx = (1-u^2)^{-1/2}\,du$$

*) Aquí fue hecha la sustitución $v = u^2$.

y por eso

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \int u^m (1 - u^2)^{\frac{n-1}{2}} \, du.$$

De esta forma, la integral $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$ se expresa o no a través de funciones elementales en dependencia de si posee o no esta propiedad la integral obtenida del binomio diferencial.

En el caso cuando $m$ y $n$ son números enteros (no obligatoriamente positivos), la integral $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$ pertenece al tipo de integrales analizadas en el punto anterior, para su cálculo, en particular, es conveniente aplicar la sustitución (26.2).

Por ejemplo, si $m = 2k + 1$ (respectivamente $n = 2k + 1$) es un número impar, entonces se puede hacer la sustitución $u = \cos x$ (respectivamente $u = \operatorname{sen} x$):

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x \, dx = -\int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d \cos x = \\ = -\int (1 - u^2)^k u^n \, du.$$

La integral analizada está reducida a la integral de una fracción racional.

Un resultado análogo se puede obtener también para la integral $\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x \, dx$ con ayuda de la sustitución $u = \operatorname{sen} x$.

Si $m = 2k + 1$, $n = 2l + 1$, entonces suele ser útil la sustitución $t = \cos 2x$:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^{2l+1} x \, dx = \int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^{2l} x \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \\ = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} d \cos 2x\right) = \\ = -\frac{1}{2^{k+l+1}} \int (1 - t)^k (1 + t)^l \, dt,$$

es decir, de nuevo se obtuvo la integral de una fracción racional.

Si ambos exponentes $m$ y $n$ son positivos y pares (o uno de ellos es cero), entonces es conveniente aplicar las fórmulas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

que evidentemente llevan la integral analizada a integrales del mismo tiempo, pero con exponentes menores, también no negativos. Por ejemplo,

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C.$$

### 26.3. INTEGRALES DEL TIPO $\int \operatorname{sen} \alpha x \cos \beta x \, dx$

Las integrales indicadas en el título del punto se calculan directamente si transformamos las funciones subintegral por las fórmulas

$$\operatorname{sen} \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} (\alpha + \beta)x + \operatorname{sen} (\alpha - \beta)x],$$

$$\operatorname{sen} \alpha x \, sen \, \beta x = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta)x - \cos (\alpha + \beta)x],$$

$$\cos \alpha x \, cos \, \beta x = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta)x + \cos (\alpha - \beta)x].$$

Por ejemplo,

$$\int \operatorname{sen} 2x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x) dx = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x = C.$$

## 26.4. INTEGRALES DE FUNCIONES TRASCENDENTES CALCULABLES INTEGRANDO POR PARTES

A las integrales indicadas en el título de este punto pertenecen, por ejemplo, las integrales

$\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx$, $\int e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \, dx$, $\int x^n \cos \alpha x \, dx$,

$\int x^n \operatorname{sen} \alpha x \, dx$, $\int x^n e^{\alpha x} \, dx$, $\int x^n \arcsen x \, dx$,

$\int x^n \arccos x \, dx$, $\int x^n \operatorname{arctg} x \, dx$, $\int x^n \operatorname{arcctg} x \, dx$,

$\int x^n \ln x \, dx$ ($n$ es un entero no negativo).

Todas estas integrales se calculan, en general, con ayuda de la integración reiterada por partes.

En efecto, tenemos:

$$I = \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \int e^{\alpha x} d \, \frac{\operatorname{sen} \beta x}{\beta} = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \, dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} d \left( -\frac{\cos \beta x}{\beta} \right) =$$

$$= \frac{e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x}{\beta} + \frac{\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\beta \operatorname{sen} \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} i,$$

de donde

$$I = \frac{e^{\alpha x}(\beta \operatorname{sen} \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C. \tag{26.3}$$

De forma análoga también se calcula la integral $\int e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \, dx$.

En las integrales $\int x^n \cos \alpha x \, dx$, $\int x^n \operatorname{sen} \alpha x \, dx$, $\int x^n e^{\alpha x} \, dx$, haciendo $u = x^n$ y respectivamente $dv = \cos \alpha x \, dx$, $dv = \operatorname{sen} \alpha x \, dx$, $dv = e^{\alpha x} \, dx$, después de la integración por partes de nuevo llegaremos a una integral de uno de los tipos señalados, pero ya con un exponente menor en uno. Aplicando este método $n$ veces llegaremos a una integral del tipo analizado con $n = 0$, la cual evidentemente se calcula inmediatamente. Por ejemplo,

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = \int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x d \operatorname{sen} x = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x -$$

$$- 2\int \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C.$$

Utilizando las integrales analizadas anteriormente se pueden calcular también integrales más complejas. Calculemos, por ejemplo, la integral

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx.$$

Integrando por partes y aplicando (26.3) tenemos:

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \int x^n d \left[ \frac{e^{\alpha x} (\beta \operatorname{sen} \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} \right] =$$

$$= x^n e^{\alpha x} \frac{\beta \operatorname{sen} \beta x + \alpha \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{n\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \, dx -$$

$$- \frac{n\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx.$$

Las integrales obtenidas en la parte derecha son del mismo tipo que la inicial, sólo que el exponente de $x$ es menor en uno. Aplicando sucesivamente el método analizado llegaremos a integrales del tipo

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \, dx \quad \text{y} \quad \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx,$$

las cuales fueron analizadas anteriormente.

Finalmente, las integrales

$$\int x^n \operatorname{arcsen} x \, dx, \quad \int x^n \operatorname{arccos} dx, \quad \int x^n \operatorname{arctg} x \, dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arcctg} x \, dx \quad \text{y} \quad \int x^n \ln x \, dx$$

con la integración por partes se reducen a la integral de una función algebraica, si en ellas hacemos $dv = x^n \, dx$ y como función $u$ tomamos la función trascendente restante, es decir, una de las funciones: arcsen $x$, arccos $x$, arctg $x$, arcctg $x$, ln $x$. Por ejemplo,

$$\int x \ln x\, dx = \int \ln x d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{2} + C.$$

## 26.5. INTEGRALES DEL TIPO $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx$

La sustitución

$$u = \operatorname{th}\frac{x}{2}$$

reduce la integral $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx$ a la integral de una fracción racional.

En efecto, para la sustitución indicada tenemos

$$\operatorname{sh} x = \frac{2u}{1 - u^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1 + u^2}{1 - u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1 - u^2},$$

por eso

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1 - u^2}, \frac{1 + u^2}{1 - u^2}\right)\frac{du}{1 - u^2}.$$

En ejemplos concretos a veces resulta cómodo utilizar la sustitución del tipo $u = \operatorname{sh} x$, $u = \operatorname{ch} x$ ó $u = \operatorname{th} x$, que permiten calcular la integral de una forma sustancialmente más simple (compárese con el p. 26.1).

Las integrales del tipo

$$\int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x\, dx,$$

donde $m$ y $n$ son números racionales, con ayuda de la sustitución $v = \operatorname{sh} x (u = \operatorname{ch} x)$ se reducen a la integral de un binomio diferencial (compárese con el p. 26.2).

## 26.6. OBSERVACIONES SOBRE LAS INTEGRALES NO EXPRESABLES A TRAVÉS DE FUNCIONES ELEMENTALES

Hemos analizado diferentes clases de funciones elementales y hemos hallado sus primitivas, que también son funciones elementales. Sin embargo, no toda función elemental tiene en calidad de primitiva una función también elemental. Con una situación semejante ya nos hemos encontrado en el análisis de la integral de un binomio diferencial: en este caso la función subintegral es elemental (irracional) y su integral, como se señaló, no siempre se calcula.

Se puede mostrar que las integrales

$$\int \frac{e^x}{x^n}\, dx, \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x^n}\, dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n}\, dx$$

($n$ es un número natural) tampoco se expresan a través de funciones elementales.

Existe una serie de integrales de funciones elementales que no se expresan a través de funciones elementales y que juegan un gran papel tanto en el propio análisis matemático como en sus diversas aplicaciones. A tales integrales pertenece, por ejemplo, la integral

$$\int e^{-x^2}\,dx,$$

y también las así llamadas *integrales elípticas*

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx,$$

donde $P(x)$ es un polinomio de tercer o cuarto grado. En el caso general estas integrales no se expresan a través de funciones elementales. Muy a menudo aparecen las integrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{y} \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0 < k < 1,$$

que con la sustitución $x = \operatorname{sen}\varphi$ se reducen a combinaciones lineales de las integrales

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \quad \text{y} \quad \int \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi;$$

llamadas respectivamente integrales elípticas *de primero y segundo género en la forma de Legendre**).

Ejercicios. Calcúlense las integrales:

1. $\int |x|\,dx$.
2. $\int (2x-5)^2\,dx$.
3. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$.
4. $\int \left(2x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right) dx$.
5. $\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.
6. $\int x^2\sqrt[5]{2x^3-1}\,dx$.
7. $\int \frac{dx}{\cos x}$.
8. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.
9. $\int xe^{-x}\,dx$.
10. $\int \ln x\,dx$.
11. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.
12. $\int x^2 \ln x\,dx$.
13. $\int \sqrt{x^2+3}\,dx$.
14. $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$.
15. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$.
16. $\int \frac{x^4+1}{x^2(x-1)(x+1)^2}\,dx$.
17. $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx$.
18. $\int \frac{dx}{(1-x)(1+x^3)}$.

*) A. Legendre (1752—1832), matemático francés.

19. $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$

20. $\displaystyle\int \frac{x^7\,dx}{x^{16}+1}.$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}.$

22. $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx.$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}.$

24. $\displaystyle\int \frac{1 - \sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$

25. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx.$

26. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+2x+4}}.$

28. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^8 x\,dx.$

29. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\,dx.$

30. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\,dx.$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x \operatorname{sen}^2 x}.$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}.$

33. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\,dx.$

34. $\displaystyle\int \arccos^2 x\,dx.$

35. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arcsen}^2 x\,dx.$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x - 2\operatorname{ch} x}.$

37. $\displaystyle\int x^3 \ln^3 x\,dx.$

38. $\displaystyle\int xe^x \operatorname{sen} x\,dx.$

39. $\displaystyle\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}.$

# § 27. INTEGRAL DEFINIDA

## 27.1. DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL SEGÚN RIEMANN

Recordemos (véase el p. 16.5) que se llama *partición* $\tau$ del segmento $[a, b]$ cualquier sistema finito de sus puntos $x_i$, $i = 0, 1, \dots, k$, tal que

$$a = x_0 < x_1 \dots < x_{k-1} < x_k = b.$$

Además se escribe $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$. Cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$ se llama *segmento de la partición* $\tau$, si longitud se denota por $\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

La magnitud

$$\delta_\tau = \max_{i=1,2,\dots,k} \Delta x_i$$

la llamaremos *finura de la partición* $\tau$ (en inglés, *mesh o finesse of a partition*).

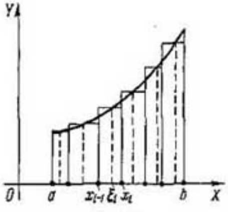



FIG. 110

La partición $\tau'$, del segmento $[a, b]$ se llama posterior a la partición $\tau$ (o continuadora de la partición $\tau$) del mismo segmento, y también inscrita en la partición $\tau$ si cada punto de la partición $\tau'$ es también un punto de la partición $\tau$, dicho de otro modo, que cada segmento de la partición $\tau'$ se contiene en cierto segmento de la partición $\tau$ (se dice además que $\tau'$ es un refino de la partición $\tau$; en inglés *refinement of a partition*). En este caso se escribe $\tau' \rightarrow \tau_0$ lo que es lo mismo, $\tau \rightarrow \tau'$.

El conjunto de todas las particiones de un segmento dado posee las siguientes propiedades.

1°. Si $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ y $\tau_2 \rightarrow \tau_3$, entonces $\tau_1 \rightarrow \tau_3$.

2°. Para cualesquiera $\tau_1$ y $\tau_2$ existe $\tau$ tal que $\tau \leftarrow \tau_1$ y $\tau \leftarrow \tau_2$.

En realidad, la primera propiedad se deduce simplemente sólo de que por la condición $\tau_3 \leftarrow \tau_2$, cada segmento de la partición $\tau_3$ se contiene en cierto segmento de la partición $\tau_2$, el cual a su vez por la condición $\tau_2 \leftarrow \tau_1$ se contiene en algún segmento de la partición $\tau_1$, de esta forma cualquier segmento de la partición $\tau_3$ está sobre un determinado segmento de la partición $\tau_1$ y esto significa que $\tau_3 \leftarrow \tau_1$.

Para la demostración de la segunda propiedad de las particiones observemos sólo que si están dadas dos particiones $\tau_1$ y $\tau_2$, entonces la partición $\tau$ compuesta por todos los puntos que aparecen tanto en la partición $\tau_1$ como en la partición $\tau_2$, evidentemente continuará a $\tau_1$ y a $\tau_2$.

Supongamos ahora que sobre segmento $[a, b]$ está definida la función $f$ y sea $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ alguna partición de este segmento

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

y $\delta_\tau$ la finura de esta partición.

Fijemos de forma arbitraria los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, y formemos la suma

$$\delta_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Las sumas del tipo $\sigma_\tau(f; \xi_1 \dots \xi_k)$ se llaman *sumas integrales de Riemann**) de la función $f$ (fig. 110). A veces para abreviar las denotaremos por $\sigma_\tau(f)$, $\sigma_\tau(\xi_1, \dots, \xi_k)$ o incluso simplemente por $\sigma_\tau$.

*) B. Riemann (1826—1866), matemático alemán.

Geométricamente en el caso cuando la función $f$ es no negativa (fig. 110) cada sumando de la suma integral de Riemann $\sigma_\tau$ es igual al área del rectángulo con base de longitud $\Delta x_i$ y con altura $f(\xi_i)$. Toda la suma $\sigma_\tau$ es igual al área de la "figura escalonada" que se obtiene con la unión de todos los rectángulos indicados.

**Definición 1.** *La función $f$ se llama integrable (según Riemann) sobre el segmento $[a, b]$ si existe un número $A$ tal que para cualquier sucesión de particiones del segmento $[a, b]$*

$$\tau_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{i=k_n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

*para la cual $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$ y para cualquier elección de los puntos*

$$\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}], \quad i = 1, 2, \dots, k_n, n = 1, 2, \dots,$$

*existe e límite de la sucesión de sumas integrales $\sigma_{\tau_n}(f; \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)})$ y es igual a $A$.*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}) \Delta x_i^{(n)} = A \tag{27.1}$$

*donde*

$$\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}; \quad i = 1, 2, \dots, k_n; \quad n = 1, 2, \dots .$$

*Cuando se cumplen estas condiciones el número $A$ se llama integral definida (de Riemann) de la función $f$ sobre el segmento $[a, b]$ y se denota por $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.*

La expresión $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ se lee "integral de la función $f(x)\,dx$ entre los límites $a$ y $b$; $x$ se llama *variable de integración*; $f$, *función subintegral*; $a$, *límite inferior de la integral*; $b$, *superior*; y el segmento $[a, b]$ se llama *intervalo de integración*.

De esta forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n}(f; \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)}),$$

donde la sucesión $\tau_n$ es tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$

Para abreviar la escritura, en este caso escribiremos simplemente

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_\tau\to\infty} \sigma_\tau(f).$$

De forma semejante a como la definición de límite de una función se puede enunciar de dos formas equivalentes, con ayuda de los límites de las sucesiones y con ayuda "lenguaje $\varepsilon - \delta$", así la definición de untegral se puede enunciar de otro modo.

**Definición 2.** *El número $A$ se llama integral definida de la función $f$ sobre el segmento $[a, b]$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que cualquiera que sea*

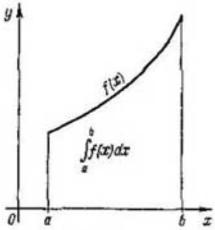



FIG. 111

*la partición* $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ *del segmento* $[a, b]$, *la finura de la cual es menor que* $\delta$: $\delta_\tau < \delta$ *y cualesquiera que sean los puntos* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *se cumple la desigualdad*

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i - A\right| < \varepsilon,$$

donde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Ejercicio 1. Demuéstrese que las dos definiciones de integral definida dadas anteriormente son equivalentes.

De la definición 1 se deduce que para las funciones no negativas la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es el límite, cuando $\delta_\tau \to 0$, de la sucesión de las áreas de las correspondientes figuras escalonadas, por lo que naturalmente está relacionada con el concepto de área y precisamente es igual al área de la figura*) (llamada "trapecio curvilíneo") cuya frontera es la gráfica de la función $f$, el segmento $[a, b]$ del eje de las $x$ y, podría ser, los segmentos de las rectas $x = a$, $x = b$, las ordenadas de los puntos de los cuales varían respectivamente desde cero hasta $f(a)$ y hasta $f(b)$ (fig. 111). Para demostrar esto es necesario ante todo precisar el propio concepto de área de las figuras analizadas. Todo esto se hará más adelante en el § 31.

Observemos que el concepto de límite de las sumas integrales de Riemann introducido aquí es un concepto nuevo no contenido ni en el concepto de límite de una sucesión ni en el concepto de límite de una función.

En el futuro será necesario utilizar un concepto análogo de límite no sólo para las sumas integrales de Riemann sino también para otros objetos. Por esto enunciemos la definición general del límite de este tipo.

---

*) El término "figura" conocido de la geometría elemental se utiliza aquí siempre en el sentido de "conjunto plano".

**Definición 3.** *Analicemos el conjunto* $\mathfrak{T} = \{\tau\}$ *de todas las particiones del segmento* $[a, b]$. *Supongamos que sobre este conjunto está definida una función numérica, en general, multiforme* $\Phi(\tau)$, $\tau \in \mathfrak{T}$. *Diremos que la función* $\Phi(\tau)$ *tiene límite igual a* $A$ *cuando* $\delta_\tau \to 0$ *y escribiremos*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \Phi(\tau) = A$$

*si para cualquier sucesión de particiones* $\tau_n \in \mathfrak{T}$, $n = 1, 2, \dots$, *tal que* $\lim_{n \to \infty} \delta_{\tau_n} = 0$ *y para cualquier elección de los valores* $\Phi(\tau_n)$, *la sucesión numérica* $\Phi(\tau_n)$ *converge al número* $A$, *es decir,*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \Phi(\tau_n) = A$$

Este concepto de límite está definido con ayuda del concepto de límite de una sucesión, por eso para él resultan válidas muchas propiedades análogas a las propiedades correspondientes del límite de una sucesión. Con los ejemplos correspondientes nos encontraremos en el futuro.

Como en el caso del límite de las sumas integrales de Riemann, el concepto de este límite se puede enunciar en el "lenguaje ($\varepsilon - \delta$")", lo que se le propone al lector.

Observemos como conclusión que la multiformidad de la función $\Phi$ sobre la cual se habla en la definición 3, en el caso de las sumas integrales de Riemann está relacionada con los diferentes métodos de elección de los puntos

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

## 27.2. ACOTACIÓN DE UNA FUNCIÓN INTEGRABLE

Establezcamos ante todo una condición necesaria que satisfacen las funciones integrales, su acotación.

**Teorema 1.** *Si una función es integrable sobre cierto segmento, entonces está acotada sobre este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función $f$ no acotada sobre el segmento $[a, b]$ y sea dada cierta partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ de este segmento. En virtud de la no acotación de la función $f$ sobre todo el segmento $[a, b]$, ella no está acotada al menos sobre un segmento de la partición $\tau$. Sea la función $f$ para mayor exactitud no acotada sobre el segmento $[x_0, x_1]$. Entonces, sobre este segmento existe una sucesión $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$, $n = 1, 2, \dots$, tal que*)

$$\lim_{n \to \infty} f(\xi_1^{(n)}) = \infty \tag{27.2}$$

Fijemos ahora de cualquier forma los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 2, 3, \dots, k$. Entonces la suma

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i), \Delta x_i$$

*) En efecto, en virtud de la no acotación de la función $f$ sobre el segmento $[x_0, x_1]$, por ejemplo, para cualquier natural $n = 1, 2, \dots$ existe un punto $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$ tal que $|f(\xi_1^{(n)})| > n$. Es evidente que la sucesión $\{\xi_1^{(n)}\}$ satisface la condición (27.2).

tendrá un valor enteramente determinado. Por esto, según (27.2)

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_\tau(f; \xi_1^{(n)}, \xi_2, \dots, \xi_k) = \lim_{n\to\infty} [f(\xi_1^{(n)})\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i] = \infty$$

y quiere decir que cualquiera que sea el número $M > 0$, siempre se puede escoger un número $n_0$ tal que si sobre el primer segmento $[x_0, x_1]$ tomamos el punto $\xi_1^{(n_0)}$, entonces

$$|\sigma_\tau(f; \xi_1^{(n_0)}, \xi_2, \dots, \xi_k| > M.$$

De aquí se deduce que las sumas $\sigma_\tau$ no pueden tender a ningún límite finito cuando $\sigma_\tau \to 0$.

En efecto, si existiera el límite finito $\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = A$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ se encontraría $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para todas las particiones $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ de finura $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$, para cualquier elección de los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$ se cumpliría la desigualdad $|\sigma_\tau - A| < \varepsilon$ y, por consiguiente,

$$|\sigma_\tau| = |(\sigma_\tau - A) + A| \leqslant |\sigma_\tau - A| + |A| < \varepsilon + |A|.$$

En nuestro caso, es decir, en el caso de la no acotación de la función $f$, para cualquier partición $\tau$ (y entre ellas para tal que $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$ si existiera el $\delta_\varepsilon$ indicado), para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo se pueden escoger los puntos $\xi_i$ de tal forma que se cumple la desigualdad

$$|\sigma_\tau| > |A| + \varepsilon.$$

La contradicción obtenida demuestra el teorema. □

La condición de acotación de la función $f$ siendo necesaria para su integrabilidad no es al mismo tiempo suficiente. De ejemplo que demuestra esta afirmación puede servir la así llamada *función de Dirichlet* (véase el p. 5.2)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Analicémosla sobre el segmento $[0, 1]$. Evidentemente ella es acotada sobre él. Mostremos que no es integrable. Fijemos una partición arbitraria $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[0, 1]$. Si escojemos los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$ racionales, entonces obtendremos

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = 1,$$

y si tomamos los $\xi_i$ irracionales, entonces

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = 0.$$

Ya que esto es cierto para cualquier partición $\tau$, entonces las sumas integrales $\sigma_\tau$ a ciencia cierta no tienden a ningún cuando $\delta_\tau \to 0$.

## 27.3. SUMAS SUPERIORES E INFERIORES DE DARBOUX. INTEGRALES SUPERIOR E INFERIOR DE DARBOUX

Sea la función $f(x)$ definida sobre el segmento $[a, b]$, $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ cierta partición y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Pongamos (fig. 112)

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$S_\tau = S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i. \tag{27.3}$$

$$s_\tau = s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i. \tag{27.4}$$

Evidentemente $s_\tau < S_\tau$.

La suma $S_\tau$ se llama suma *superior de Darboux* y $s_\tau$ *inferior*.

### Propiedades de las sumas de Darboux.

1°. *Si la función $f$ es acotada, entonces para cualquier partición las sumas $S_\tau$ y $s_\tau$ están definidas.*

En realidad, en este caso $M_i$ y $m_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, son finitos y por esto las expresiones (27.3) y (27.4) tienen sentido.

2°. *Si $\tau' \vdash \tau$, entonces $S_{\tau'} \leqslant S_\tau$ y $s_\tau \leqslant s_{\tau'}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ y $\tau' = \{x'_j\}_{j=0}^{j=k'}$ dos particiones del segmento $[a, b]$ tales que $\tau \dashv \tau'$ y

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$m'_j = \inf_{x'_{j-1} \leqslant x \leqslant x'_j} f(x), \quad j = 1, 2, \dots, k',$$

Si $[x'_{j-1}, x'_j] \subset [x_{i-1}, x_i]$, entonces evidentemente

$$m_i \leqslant m'_j \tag{27.5}$$

(la cota inferior cuando desminuye el conjunto sólo puede aumentar).

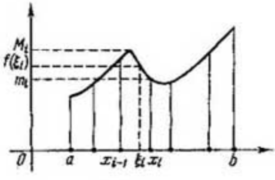



FIG. 112

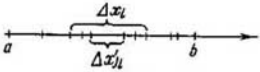


FIG. 113

En virtud de la condición $\tau \rightarrow \tau'$ cada segmento $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición $\tau$ es la unión de algunos segmentos de la partición $\tau'$; denotaremos estos segmentos por $[x'_{(j-1)_i}, x'_{j_i}]$. De esta forma, si

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{y} \quad \Delta x'_{j_i} = x'_{j_i} - x'_{(j-1)_i},$$

entonces (fig. 113)

$$\Delta x_i = \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i}.$$

Utilizando estas notaciones y la desigualdad (27.5) obtendremos:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} m_i \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m_i \Delta x'_{j_i} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m'_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{j=1}^{k'} m'_j \Delta x'_j = s_{\tau'}.$$

Hemos demostrado que $s_\tau \leqslant s_{\tau'}$.

De forma análoga se demuestra que $S_\tau \geqslant S_{\tau'}$ cuando $\tau \rightarrow \tau'$. □

**Corolario.** *Para dos particiones cualesquiera $\tau_1$ y $\tau_2$ del segmento $[a, b]$ se cumple la desigualdad*

$$s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}, \qquad (27.6)$$

*es decir, cualquier suma inferior de Darboux es menor que* cualquier suma superior.

En efecto, si están dadas dos particiones $\tau_1$ y $\tau_2$ del segmento $[a, b]$, entonces existe una partición $\tau$ de este segmento tal que $\tau \rightarrow \tau_1$ y $\tau \leftarrow \tau_2$ (véase el p. 27.1). Aplicando la propiedad 2° obtendremos

$$s_{\tau_1} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant S_{\tau_2}. \ \square$$

Es evidente que las sumas de Riemann y Darboux están relacionadas por las desigualdades

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau.$$

La siguiente propiedad es una especificación de esta afirmación.

3°. *Si $\sigma_\tau = \sigma(f; \xi_1, \ldots, \xi_k)$ es alguna suma integral de Riemann correspondiente a una partición $\tau$ dada, entonces*

$$s_\tau = \inf_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau, \quad S_\tau = \sup_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ una partición del segmento $[a, b]$ y $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Si están dados ciertos conjuntos numéricos $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, y las constantes $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces para el conjunto

$$X = \left\{x : x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i, x_i \in X_i, i = 1, 2, \ldots, k\right\},$$

como es fácil ver son válidas las desigualdades (¿por qué?)

$$\sup X = \sum_{i=1}^{k} a_i \sup X_i, \inf X = \sum_{i=1}^{k} a_i \inf X_i.$$

Por esto tenemos:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \inf_{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i} f(\xi_i)\Delta x_i = \inf_{\substack{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \\ i=1,2,\ldots,k}} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \inf_{\substack{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \\ i=1,2,\ldots,k}} \sigma(f; \xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Análogamente

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \sup_{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i} f(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \sup_{\substack{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \\ i=1,2,\ldots,k}} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = \sup_{\substack{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \\ i=1,2,\ldots,k}} \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k). \ \Box$$

4°. $S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i$, *donde* $\omega_i(f)$ *es la oscilación de la función f sobre el segmento* $[x_{i-1}, x_i]$ (véase el p. 19.6), $i = 1, 2, \ldots, k$.

DEMOSTRACIÓN. Señalemos primero que si para dos cunjuntos numéricos $X$ e $Y$ dados, ponemos,

$$Z = \{z : z = x - y, x \in X, y \in Y\}$$

entonces $\sup Z = \sup X - \inf Y$ (¿por qué?)

Utilizando esto obtendremos

$$M_i - m_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \leq x_i \leq x_i} f(x) =$$

$$= \sup_{\substack{x_{i-1} \leq x' \leq x_i \\ x_{i-1} \leq x'' \leq x_i}} [f(x'')] = \omega_i(f), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

por lo que

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i. \ \Box$$

Pongamos ahora

$$I_* = \sup_\tau s_\tau, \quad I^* = \inf_\tau S_\tau.$$

$I_*$ se llama *integral inferior de Darboux* de la función $f$ sobre el segmento $[a, b]$ e $I^*$ su *integral superior.*

De las propiedades 1° y 2° de las sumas de Darboux se deduce que la función $f$ es acotada ya que tanto su integral inferior de Darboux como la superior son finitas. En virtud del corolario de la propiedad 2° tendremos también.

$$I_* \leqslant I^*. \tag{27.7}$$

## 27.4. CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES DE INTEGRABILIDAD

**Teorema 2.** *Para que una función acotada sobre cierto segmento sea integrable sobre él es necesario y suficiente que*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{27.8}$$

La condición (27.8) significa (véase la definición 3 en el p. 27.1) que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tal que para cualquier partición $\tau$ de finura $\delta_\tau < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|S_\tau - s_\tau| < \varepsilon. \tag{27.9}$$

Por cuanto $s_\tau \leqslant S_\tau$, entonces (27.9) es equivalente a la desigualdad

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea la función $f$ acotada sobre el segmento $[a, b]$, integrable sobre él y sea $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$; entonces $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = I$. Por esto para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta_{(\varepsilon)} > 0$ tal que si $\delta_\tau < \delta$, entonces

$$|\sigma_\tau - I| < \varepsilon \quad \text{ó} \quad I - \varepsilon < \sigma_\tau < I + \varepsilon.$$

De aquí que para $\delta_\tau < \delta$ según la propiedad 3° de las sumas de Darboux (véase el p. 27.3) obtenemos la desigualdad

$$I - \varepsilon \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant I + \varepsilon.$$

De esta forma, si $\delta_\tau < \delta$, entonces

$$0 \leqslant S_\tau - s_\tau \leqslant 2\varepsilon$$

y esto significa el cumplimiento de la condición (27.8).

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos que la función $f$ es acotada y se cumple la condición (27.8). De la definición de integrales superior e inferior de Darboux y de la desigualdad (27.7) tenemos

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau \tag{27.10}$$

por lo que

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau,$$

de donde por (27.8) se deduce que $I^* - I_* = 0$. Denotando el valor común de las integrales superior e inferior de Darboux por $I$, es decir, haciendo $I = I_* = I^*$ de (27.10) obtendremos

$$s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau.$$

y por esto

$$0 \leqslant I - s_\tau \leqslant S_\tau - s_\tau, \quad 0 \leqslant S_\tau - I \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

De aquí, por (27.8) se deriva que

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (I - s_\tau) = \lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - I) = 0,$$

y esto significa que

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = I. \tag{27.11}$$

Pero según la propiedad 3° de las sumas integrales de Darboux (véase el p. 27.3)

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau \tag{27.12}$$

De (27.11) y (27.12) se deduce (compárese con las afirmaciones análogas en los p. 3.3 y 4.7) que

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = I,$$

y esto significa la integrabilidad de la función $f$. □

**Corolario 1.** *Si la función $f$ es integrable, entonces no sólo sus sumas integrales de Riemann, sino también sus sumas de Darboux tienden a su integral cuando la finura de la partición tiende a cero.*

En efecto, si la función $f$ es integrable, entonces se cumple la condición (27.8) y de ella, como vimos, se deduce la afirmación del corolario, es decir, la igualdad (27.11). □

**Corolario 2.** *Para que una función $f$ acotada sobre cierto segmento sea integrable sobre segmento es necesario y suficiente que*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f) \Delta x_i = 0$$

*donde $\omega_i(f)$ es la oscilación de la función $f$ sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$.*

Esto se deduce directamente de la propiedad 4° de las sumas de Darboux (véase el p. 27.3). □

**Problema 19.** Demuéstrese que para que una función sea integrable sobre un segmento es necesario y suficiente que sea acotada sobre él y que sus integrales superior e inferior de Darboux coincidan, además, el valor común de estas integrales es su integral.

## 27.5. INTEGRABILIDAD DE LAS FUNCIONES CONTINUAS Y MONÓTONAS

**Teorema 3.** *Una función definida y continua sobre cierto segmento es integrable sobre él.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función $f$ continua sobre el segmento $[a, b]$; entonces como es conocido, es acotada (véase el teorema 1 en el p. 6.1) y uniformemente continua (véase el teorema 5 en el p. 19.7) sobre este segmento. Fijamos arbitrariamente

$\varepsilon > 0$. En virtud de la continuidad uniforme existe $\delta > 0$ tal que para puntos cualesquiera $\xi \in [a, b]$ y $\eta \in [a, b]$ que satisfacen la condición $|\eta - \xi| < \delta$, se cumple la desigualdad

$$|f(\eta) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \tag{27.13}$$

Tomemos cualquier partición $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ de finura $\delta_\tau < \delta$. Sea como siempre $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, m_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), M_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), i = 1, 2, \ldots, k$. Por cuanto una función continua sobre un segmento alcanza sus cotas superior e inferior sobre este segmento, entonces existen los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tales que

$$f(\xi_i) = m_i, \quad f(\eta_i) = M_i.$$

Los puntos $\xi_i$ y $\eta_i$ pertenecen a un mismo segmento de la partición $\tau$, por lo que

$$|\eta_i - \xi_i| \leqslant \Delta x_i \leqslant \delta_\tau \leqslant \delta.$$

De aquí, en virtud de (27.13) se deriva la desigualdad

$$f(\eta_i) - f(\xi_i) = |f(\eta_i) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{b - a}, i = 1, 2, \ldots, k.$$

Por consiguiente para cualquier partición $\tau$ de finura $\delta_\tau < \delta$ se cumple la condición

$$0 \leqslant S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} [f(\eta_i) - f(\xi_i)]\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Esto significa que $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S'_\tau - s_\tau) = 0$. Por esto, según el teorema 2, la función $f$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$. □

**Teorema 4.** *Una función definida y monótona sobre el segmento $[a, b]$ es integrable sobre este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función $f(x)$ monótona sobre el segmento $[a, b]$, por ejemplo, crece sobre él. Entonces

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

De esta forma, la función $f$ es acotada sobre el segmento $[a, b]$. Más adelante, para cualquier partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ evidentemente tenemos

$$m_i = f(x_{i-1}), \quad M_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

por esto

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\Delta x_i \leqslant \delta_\tau \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = [f(b) - f(a)]\delta_\tau,$$

ya que en la suma $\sum\limits_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$ se eliminan mutuamente todos los suman-

De la desigualdad obtenida se deduce que

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [S_\tau(f) - s_\tau(f)] = 0.$$

Por esto, (véase el p. 27.4) la función $f$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$. □

Ejercicio 2. Demuéstrese que si una función es acotada y continua sobre cierto segmento, excepto, podría ser, un número finito de puntos, entonces es integrable sobre este segmento.

## § 28. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES INTEGRABLES

### 28.1. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Sistemáticamente utilizaremos las notaciones y terminología introducidas en el párrafo anterior sin hacer llamados especiales.

Ante todo observemos que por cuanto la integral de una función es un número que se le hace corresponder a una función dada por la definición enunciada anteriormente, entonces, claro está, este número no depende de la elección de la notación para el argumento de la función subintegral, es decir, de la notación de la *variable de integración*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi.$$

Pasemos ahora al análisis de las propiedades principales de la integral definida.

1°. $\int_a^b dx = b - a.$

En efecto, aquí la función subintegral es igual a la unidad por lo que para cualquier suma integral de Riemann $\sigma_\tau$ tenemos

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = b - a. \ \square$$

2°. *Si la función $f$ es integrable sobre el segmento* $[a, b]$, *entonces es integrable sobre cualquier segmento* $[a^*, b^*]$ *contenido en* $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, si la función $f$ es acotada sobre el segmento $[a, b]$, entonces evidentemente es acotada sobre $[a^*, b^*]$. Más adelante, cualquiera que sea la partición $\tau^* = \{x_i^*\}_{i=0}^{i=k^*}$ del segmento $[a^*, b^*]$ de finura $\delta_{\tau^*}$, siempre se puede prolongar en la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ de ese mismo diámetro $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$; para esto es suficiente agregar a los puntos $x_i^*$, $i = 1, 2, \dots, k^*$ un número finito de puntos elegidos de la forma correspondiente, pertenecientes al segmento $[a, b]$, pero no pertenecientes al segmento $[a^*, b^*]$.

Haciendo

$$m_i^* = \inf_{x_{i-1}^* \leq x \leq x_i^*} f(x), \quad M_i^* = \sup_{x_{i-1}^* \leq x \leq x_i^*} f(x),$$

$$\Delta x_i^* = x_i^* - x_{i-1}^*, \quad i = 1, 2, \dots, k^*$$

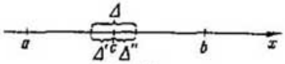


FIG. 114

y observando que cada sumando de la suma $\sum_{i=1}^{k}(M_i^* - m_i^*)\Delta x_i^*$ es sumando de la suma $\sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)\Delta x_i$ y que todos los sumandos de ambas sumas son no negativos tenemos

$$0 \leqslant S_{\tau^*} - s_{\tau^*} = \sum_{i=1}^{k^*}(M_i^* - m_i^*)\Delta x_i^* \leqslant \sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)\Delta x_i = S_\tau - s_\tau. \quad (28.1)$$

Si la función $f$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$ entonces, como sabemos (véase el p. 27.4),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0. \quad (28.2)$$

Por cuanto $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$, entonces de (28.2) y de la desigualdad (28.1) se deduce que

$$\lim_{\delta_{\tau^*} \to 0}(S_{\tau^*} - s_{\tau^*}) = 0, \quad (28.3)$$

es decir, (véase el p. 27.4) la función $f$ es integrable sobre el segmento $[a^*, b^*]$. □

3°. (Aditividad de la integral).

*Sea $a < c < b$. Si la función $f$ es integrable sobre los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y además*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \quad (28.4)$$

DEMOSTRACIÓN. Si la función $f$ es integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces es acotada sobre cada uno de estos segmentos y quiere decir que sobre todo el segmento $[a, b]$, es decir, existe la constante $A > 0$ tal que

$$|f(x)| \leqslant A, \quad a \leqslant x \leqslant b. \quad (28.5)$$

Sea $\tau$ cierta partición del segmento $[a, b]$. Si el punto $c$ no aparece en la posición $\tau$, entonces denotemos por $\tau'$ la partición del segmento $[a, b]$ obtenida de $\tau$ agregando el punto $c$; evidentemente

$$\tau' \succ \tau \quad (28.6)$$

Si el punto $c$ aparece en la partición $\tau$, entonces pondremos $\tau' = \tau$.

En el primer caso denotemos por $\Delta'$ y $\Delta''$ las longitudes de los dos segmentos de la partición $\tau'$ contiguos al punto $c$ por ambos lados. Evidentemente $\Delta = \Delta' + \Delta''$ es la longitud del segmento de la partición $\tau$ que contiene el punto $c$ (fig. 114). Las sumas superiores de Darboux $S_\tau$ y $S_{\tau'}$ de la función $f$ sobre el segmento $[a, b]$ se diferencian sólo en los sumandos correspondientes a los segmentos de las particiones $\tau$ y $\tau'$ que contienen el punto $c$.

Denotando por $M'$, $M''$ y $M$ la cota superior de la función $|f|$ sobre los segmentos analizados, las longitudes de los cuales están denotadas correspondientemente por $\Delta'$, $\Delta''$ y $\Delta$ obtendremos (véase también (28.5))

$$0 \leqslant S_\tau - S_{\tau'} \leqslant M'\Delta' + M''\Delta'' + M\Delta \leqslant A(\Delta' + \Delta'' + \Delta) = 2A\Delta \leqslant 2A\delta_\tau.$$

En el segundo caso, es decir, cuando $\tau' = \tau$ simplemente

$$S_{\tau'} = S_\tau, s_{\tau'} = s_\tau,$$

Por esto en ambos casos

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - S_{\tau'}) = 0 \tag{28.7}$$

y análogamente

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (s_\tau - s_{\tau'}) = 0. \tag{28.8}$$

El conjunto de puntos de la partición $\tau'$ que pertencen al segmento $[a, c]$ forma su partición que denotaremos $\tau'$ $[a, c]$; el conjunto de los puntos de la partición $\tau'$ que pertenecen al segmento $[c, b]$, forma una partición de este segmento que la denotaremos por $\tau'[c, b]$.

Evidentemente

$$S_{\tau'} = S_{\tau'[a,c]} + S_{\tau'[c,b]}, \quad s_{\tau'} = s_{\tau'[a,c]} + s_{\tau'[c,b]} \tag{28.9}$$

y por esto

$$S_{\tau'} - s_{\tau'} = (S_{\tau'[a,c]} - s_{\tau'[a,c]}) + (S_{\tau'[c,b]} - s_{\tau'[c,b]}) \tag{28.10}$$

y ya que la función $f$ por suposición es integrable sobre $[a, c]$ y sobre $[c, b]$, entonces

$$\lim_{\delta_{\tau'[a,c]} \to 0} (S_{\tau'[a,c]} - s_{\tau'[a,c]}) = 0, \quad \lim_{\delta_{\tau'[c,b]} \to 0} (S_{\tau'[c,b]} - s_{\tau'[c,b]}) = 0.$$

Observando que $\delta_{\tau'[a,c]} \leqslant \delta_{\tau'}$, $\delta_{\tau'[c,b]} \leqslant \delta_{\tau'}$ hallamos por (28.10)

$$\lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'} - s_{\tau'}) = \lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'[a,c]} - s_{\tau'[a,c]}) + \lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'[c,b]} - s_{\tau'[c,b]}) = 0. \tag{28.11}$$

Vimos anteriormente que el cumplimiento de semejante condición para cualesquiera particiones $\tau$ lleva consigo la integrabilidad de la función. Aquí las particiones $\tau'$ analizadas tienen un aspecto especial: necesariamente contienen el punto $c$. Para pasar a una partición $\tau$ arbitraria representemos la diferencia $S_\tau - s_\tau$ de la forma

$$S_\tau - s_\tau = (S_\tau - S_{\tau'}) + (S_{\tau'} - s_{\tau'}) + (s_{\tau'} - s_\tau).$$

Ahora de (28.7), (28.8) y (28.11) tenemos

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0; \tag{28.12}$$

y como $\tau$ era una partición arbitraria del segmento $[a, b]$ entonces de la acotación de la función $f$ sobre el segmento $[a, b]$ y el cumplimiento de la condición (28.12) se deduce su integrabilidad sobre este segmento.

De la integrabilidad de la función $f$ sobre los segmentos $[a, c]$, $[c, b]$ y $[a, b]$ se deduce (véase el p. 27.4) que

$$\lim_{\delta_{\tau'[a,c]} \to 0} s_{\tau'[a,c]} = \int_a^c f(x)\,dx, \quad \lim_{\delta_{\tau[c,b]} \to 0} S_{\tau'[c,b]} = \int_c^b f(x)\,dx, \quad \lim_{\delta_{\tau'} \to 0} S_{\tau'} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por esto pasando al límite cuando $\delta_{\tau'} \to 0$ en la primera igualdad, de (28.9) obtenemos la fórmula (28.4). □

4°. *Si las funciones $f$ y $g$ son integrables sobre el segmento $[a, b]$, entonces su suma $f + g$ también es integrable sobre él y además*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.13}$$

DEMOSTRACIÓN. En realidad, cualesquiera que sean la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ y los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, tenemos

$$\sigma_\tau(x + g) = \sum_{i=1}^{k} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\Delta x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{k} g(\xi_i)\Delta x_i = \sigma_\tau(f) + \sigma_\tau(g). \tag{28.14}$$

Por cuanto en virtud de la integrabilidad de las funciones $f$ y $g$ existen los límites de las sumas integrales $\sigma_\tau(f)$ y $\sigma_\tau(g)$ cuando $\delta_\tau \to 0$, entonces de (28.14) se deduce que existe también el límite (¿por qué?) de la suma integral $\sigma_\tau(f + g)$ y además

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f + g) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) + \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(g), \tag{28.15}$$

lo que significa la integrabilidad de la función $f + g$ sobre el segmento $[a, b]$.

De nuevo por la definición de integral

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f + g) = \int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx,$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(g) = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (28.15) obtendremos (28.13). □

5°. *Sean $f$ una función integrable sobre el segmento $[a, b]$ y $c$ una constante; entonces la función $cf$ también es integrable sobre este segmento y*

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Cualesquiera que sean la partición $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ y los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, tenemos

$$\sigma_\tau(cf) = \sum_{i=1}^{k} cf(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = c\sigma_\tau(f),$$

de donde realizando los razonamientos por el mismo esquema que en la demostración de la propiedad anterior obtendremos

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(cf) = \lim_{\delta_\tau \to 0} c\sigma_\tau(f) = c\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) = c\int_a^b f(x)\,dx. \ \square$$

De las dos últimas propiedades se deriva el corolario: *si cada una de las funciones $f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$* y $\lambda_i$ *son constantes arbitrarias, entonces la función* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ *es integrable sobre $[a, b]$ y además*

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_a^b f_i(x)\,dx.$$

Esta propiedad de la integral definida se llama su *linealidad*.

6°. *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ integrables sobre el segmento $[a, b]$. Entonces su producto $f(x)g(x)$ también es integrable sobre él.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la integrabilidad de las funciones $f$ y $g$ sobre el segmento $[a, b]$, son acotadas sobre este segmento, es decir, existen las constantes $A > 0$ y $B > 0$ tales que

$$|f(x)| \leqslant A, \quad |g(x)| \leqslant B \tag{28.16}$$

para todos los $x \in [a, b]$. Por esto, el producto $f(x)g(x)$ también es acotado: para todos los puntos $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad

$$|f(x)g(x)| \leqslant AB.$$

Sea $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ cualquier partición del segmento $[a, b]$. Estimemos la expresión $f(x'')g(x'') - f(x')g(x')$, para esto agreguemos y restemos de ella $f(x')g(x'')$:

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') = [f(x'') - f(x')]g(x'') + [g(x'') - g(x')]f(x'). \tag{28.17}$$

Para los puntos $x' \in [x_{i-1}, x_i]$ y $x'' \in [x_{i-1}, x_i]$, de (28.16) y (28.17) se deduce que

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leqslant B\omega_i(f) + A\omega_i(g), \tag{28.18}$$

donde $\omega_i(f)$ y $\omega_i(g)$ son las oscilaciones de las funciones $f$ y $g$ sobre los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, 2, \ldots, k$.

De la desigualdad (28.18) para la oscilación $\omega_i(fg)$ del producto $fg$ sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ se deriva la estimación

$$\omega_i(fg) \leqslant B\omega_i(f) + A\omega_i(g), \tag{28.19}$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i(fg)\Delta x_i \leqslant B\sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i + A\sum_{i=1}^{k} \omega_i(g)\Delta x_i. \tag{28.20}$$

En virtud de la integrabilidad de las funciones $f$ y $g$ (véase el corolario 2 del teorema 2 en el p. 27.4)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(g)\Delta x_i = 0.$$

Por esto de la estimación (28.20) se deduce la igualdad

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(fg)\Delta x_i = 0,$$

que lleva consigo la integrabilidad del producto $fg$ sobre el segmento $[a, b]$. □

Con el método de inducción matemática es fácil demostrar que si cada una de las funciones $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, es integrable sobre el segmento $[a, b]$, entonces también su producto será integrable sobre $[a, b]$. En particular, junto con la función $f(x)$ es integrable también $[f(x)]^n$ para cualquier natural $n$.

7°. *Si la función* $f(x)$ *es integrable sobre el segmento* $[a, b]$ *y la cota inferior de la función* $f(x)$ *sobre* $[a, b]$ *es positiva, entonces* $1/f(x)$ también es integrable sobre $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN. Si en todos los puntos sobre $[a, b]$: $|f(x)| \geqslant m > 0$, entonces $\dfrac{1}{|f(x)|} \leqslant \dfrac{1}{m}$ para todos los $x \in [a, b]$; por esto, $\left|\dfrac{1}{f(x_2)} - \dfrac{1}{f(x_1)}\right| \leqslant$ $\leqslant \dfrac{|f(x_1) - f(x_2)|}{m^2}$ para cualesquiera $x_1, x_2 \in [a, b]$. De aquí se deduce que si $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ es una partición arbitraria del segmento $[a, b]$, entonces $\omega_i\left(\dfrac{1}{f}\right) \leqslant \dfrac{1}{m^2}\omega_i(f)$, por consiguiente

$$0 \leqslant \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i\left(\frac{1}{f}\right)\Delta x_i \leqslant \frac{1}{m^2} \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i = 0. \ \square$$

**Corolario.** *Si las funciones f y g son integrables sobre el segmento* $[a, b]$ *y la cota inferior de la función* $|g|$ *es positiva, entonces* $f/g$ *también es integrable sobre* $[a, b]$.

Esto se deriva de las propiedades 6° y 7° y de que $\dfrac{f}{g} = f\dfrac{1}{g}$. □

8°. *Si la función f es no negativa y es integrable sobre el segmento* $[a, b]$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0. \tag{28.21}$$

DEMOSTRACIÓN. En realidad, cualesquiera que sean la partición $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ y los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, para la función $f \geqslant 0$ tenemos

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0. \tag{28.22}$$

Si la función $f$ es integrables sobre el segmento $[a, b]$, entonces pasando al límite en (28.22) cuando $\delta_\tau \to 0$ obtendremos la desigualdad (28.21). □

**Corolario.** *Si las funciones f y g son integrables sobre* $[a, b]$ *y para todos los* $x \in [a, b]$

$$f(x) \geqslant g(x), \tag{28.23}$$

*entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.24}$$

Si las funciones $f$ y $g$ satisfacen la condición (28.23), entonces

$$f(x) - g(x) \geqslant 0, \quad x \in [a, b];$$

por eso observando que sobre la base del corolario de las propidades 4° y 5° la función $f - g$ es integrable, en virtud de la desigualdad (28.21) tenemos

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geqslant 0.$$

Pero (véase el corolario indicado anteriormente)

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

y quiere decir que

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0. \square$$

El corolario demostrado afirma que ambos miembros de la desigualdad del tipo (28.23) se pueden integrar respecto a un mismo intervalo. (En relación con esto observemos que la diferenciación de ambos miembros de la desigualdad sin suposiciones especiales complementarias no es admisible).

9°. *Sea la función $f$ integrable sobre el segmento $[a, b]$. Si es no negativa sobre él: $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, y existe el punto $x_0 \in [a, b]$ en el cual la función $f$ es continua y positiva: $f(x_0) > 0$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Según el corolario de la propiedad 2 de los límites de las funciones en el p. 5.10, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$ para todos los $x \in U(x_0, \delta) \cap [a, b]$. Sea $[\alpha, \beta] \subset U(x_0, \delta) \cap [a, b]$, $\alpha < \beta$; entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqslant \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > 0. \square$$

Señalemos que si renunciamos a la condición de continuidad de la función $f$ en el punto $x_0$, entonces puede ocurrir que para una función integrable no negativa sobre un segmento, positiva en cierto punto, la integral respecto a todo el segmento es igual a cero. Así, por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{cuando} \quad x = 0 \end{cases}$$

es integrable y no negativa, $f(0) > 0$, pero $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Esta igualdad se deduce fácilmente de la definición de integral.

10°. Fue introducido el concepto de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función $f$ respecto a un segmento $[a, b]$, donde por la notación habitual, $a < b$.

*Para cualquier función $f$ definida en el punto $a$ pongamos por definición*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{28.25}$$

*y para una función $f$ integrable sobre el segmento $[a, b]$,*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad a < b. \tag{28.26}$$

Estas definiciones en cierta medida son naturales. En el primer caso, cuando $a = b$ se debe considerar que todos los intervalos de la partición del segmento $[a, b]$ se convierten en puntos y sus longitudes $\Delta x_i$ se anulan. Por esto, todas las sumas integrales $\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$ en este caso también son iguales a cero y junto con ellas se anula la integral que aparece en el primer miembro de (28.25).

En el segundo caso se debe considerar que los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ están orientados en el sentido negativo del eje $Ox$ (el concepto de segmento orientado le es conocido al lector de la geometría analítica) y por esto sus longitudes $\Delta x_i$ son negativas. De aquí se deduce que todas las sumas integrales formadas para la integral $\int_b^a f(x)\,dx$ se diferencian sólo en el signo de las sumas integrales correspondientes de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ lo que hace natural la fórmula (28.26).

A estos razonamientos intuitivos se les puede dar una forma lógica estricta introduciendo las definiciones correspondientes, no obstante, es mucho más simple y breve introducir las igualdades (28.25) y (28.26) por definición.

11°. *Si la función $f$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$, entonces la función $|f|$ es integrable sobre él y*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad a < b. \tag{28.27}$$

En efecto, en primer lugar, de la acotación de $f$ evidentemente se deduce la acotación de la función $|f|$ y en segundo lugar, para dos puntos cualesquiera $\xi \in [a, b]$ y $\eta \in [a, b]$ tiene lugar la desigualdad

$$\big||f(\xi)| - |f(\eta)|\big| \leqslant |f(\xi) - f(\eta)|,$$

de donde se deduce que cualquiera que sea la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$, denotando por $\omega_i(f)$ y $\omega_i(|f|)$ respectivamente las oscilaciones de las funciones $f$ y $|f|$ sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ obtendremos $\omega_i(|f|) \leqslant \omega_i(f)$; $i = 1, 2, \ldots, k$, por eso

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{k} \omega_i(|f|)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

De aquí se deduce que si

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i = 0, \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(|f|)\Delta x_i = 0.$$

Esto significa (véase el p. 27.4) que de la integrabilidad de la función se deduce la integrabilidad de la función $|f|$.

Sea ahora $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces

$$|\sigma_\tau(f)| = \left| \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |f(\xi_i)|\Delta x_i = \sigma_\tau(|f|).$$

Pasando en esta desigualdad al límite cuando $\delta_\tau \to 0$ y observando que

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} |\sigma_\tau(f)| = |\lim_{\delta_\tau \to 0} \delta_\tau(f)| = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|,$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(|f|) = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

obtendremos la desigualdad (28.27). □

Si renunciamos a la restricción $a < b$, es decir, aceptamos los casos $a = b$ y $a > b$, entonces el análogo de la desigualdad (28.27) tiene el aspecto

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|. \tag{28.28}$$

En efecto, sea $a < b$. Por cuanto (véase la propiedad 8°)

$$\left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right| = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

entonces la desigualdad (28.28) coincide en este caso con la desigualdad (28.27). Si $a > b$, entonces utilizando la propiedad (28.26) y la desigualdad (28.27) obtendremos

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_b^a f(x)\,dx \right| \leqslant \int_b^a |f(x)|\,dx = \left| \int_b^a |f(x)|\,dx \right| = \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|.$$

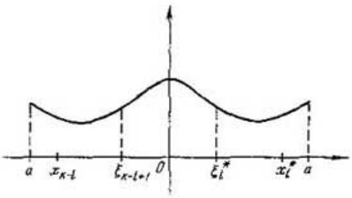



FIG. 115

Finalmente, para $a = b$ la desigualdad (28.28) es evidente.

Ejemplos. 1. Sea la función $f$ par sobre el segmento $[-a, a]$ e integrable sobre el segmento $[0, a]$. Entonces es integrable sobre $[-a, a]$ y además

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \tag{28.29}$$

Demostremos que la función $f$ es integrable sobre el segmento $[-a, 0]$ y que

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx, \tag{28.30}$$

de donde por la aditividad de la integral (propiedad 3°) se derivará inmediatamente la fórmula (28.29) ya que (eliminando la notación de la función subintegral):

$$\int_{-a}^{a} = \int_{-a}^{0} + \int_{0}^{a} = 2\int_{0}^{a}.$$

Esto se deduce de que si $f$ es una función par, entonces la transformación de simetría del eje numérico con respecto al cero convierte sus sumas integrales sobre el segmento $[0, a]$ en sumas integrales iguales respecto al segmento $[-a, 0]$ y viceversa. En realidad, si $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ es una partición del segmento $[-a, 0]$, entonces $\tau^* = \{x_i^*\}_{i=0}^{i=k}$ donde $x_i^* = -x_{k-i}$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, es una partición del segmento $[0, a]$ y además las finuras de ambas particiones evidentemente coinciden: $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$. Si para cada punto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ponemos $\xi_i^* = -\xi_{k-i+1}$, $i = 1, 2, \dots, k$, entonces en virtud de la paridad de la función $f$ obtendremos $f(\xi_i^*) = f(\xi_{k-i+1})$ (fig. 115) y por consiguiente, a cualquier suma integral de Riemann $\sigma_\tau = \sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$ de la función $f$ sobre el segmento $[-a, 0]$ le corresponderá una suma integral igual a ella $\sigma_{\tau^*} = \sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i^*)\Delta x_i^* = \sigma_\tau$ de la misma función $f$, pero sobre el segmento $[0, a]$ (aquí

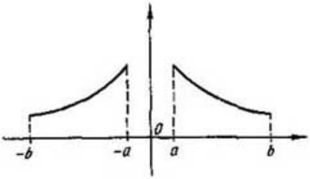



FIG. 116

como siempre $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta x_i^* = x_i^* - x_{i-1}^*$ y es fácil ver que $\Delta x_i = \Delta x^*_{k-i+1}$, $i = 1, 2, \dots, k$). Por esto

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_{\tau^*} \to 0} \sigma_{\tau^*} = \int_0^a f(x)\, dx.$$

De esta forma, el límite que aparece en el primer miembro de esta igualdad existe y esto significa que la función $f$ es integrable sobre el segmento $[-a, 0]$. Por cuanto el límite indicado es también igual a la integral $\int_{-a}^{0} f(x)\, dx$, entonces la igualdad (28.30) queda demostrada. □

El ejemplo analizado se puede generalizar algo. Si la función $f$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y

$$f^*(x) \overset{\text{def}}{=} f(-x), \quad -b \leqslant x \leqslant -a,$$

(fig. 116), entonces la función $f^*$ es integrable sobre el segmento $[-b, -a]$ y

$$\int_{-b}^{-a} f^*(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{28.31}$$

Esta afirmación se demuestra análogamente al caso analizado anteriormente.

2. Analicemos ahora las funciones periódicas.

La función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}$ se llama periódica sobre el conjunto $X$ con periodo $T > 0$ si para cualquier $x \in X$ se cumple la inclusión $x + T \in X$ y la igualdad

$$f(x + T) = f(x).$$

Por ejemplo, para la función sen $x$ el período es cualquier número múltiplo entero de $2\pi$, es decir, un número del tipo $2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Para una función constante cualquier número positivo es su período.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que para la función de Dirichlet (véase el p. 5.2) cualquier número racional positivo es periodo y cualquier irracional positivo no lo es.

2. Demuéstrese que la función sen $x$ + tg $x$ tiene periodo mínimo y hállese.

3. Cítese un ejemplo de dos funciones que tienen periodo mínimo y la suma de las cuales no tiene periodo mínimo.

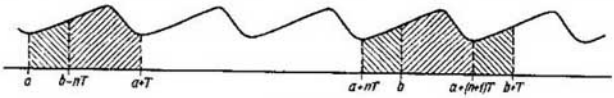



FIG. 117

4. Demuéstrese que cualquier función continua y periódica sobre todo el eje numérico $R$ es acotada sobre $R$.

5. Demuéstrese que cualquier función continua y periódica sobre todo el eje numérico $R$ es uniformemente continua sobre $R$. Véase también el problema 6 en el p. 6.2.

Si para $x \geqslant a$ la función $f$ tiene período $T > 0$ y es integrable sobre el segmento $[a, a + T]$, entonces para cualquiera que sea $b \geqslant a$, es integrable sobre el segmento $[b, b + T]$ y tiene lugar la igualdad

$$\int_b^{b+T} f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx, \tag{28.32}$$

es decir, la integral de una función periódica respecto a un segmento igual por su longitud al período no depende de la ubicación de este segmento sobre el rayo $x \geqslant a$ (fig. 117).

Demostremos esto. Cualquiera que sea $b \geqslant a$ existe el número no negativo $n$ tal que

$$a + nT \leqslant b < a + (n + 1)T$$

y, por consiguiente,

$$a + (n + 1)T \leqslant b + T < a + (n + 2)T,$$
$$a \leqslant b - nT < a + T$$

(ver la fig. 117).

Observemos que si para cierto $b \geqslant a$ la función $f$ es integrable sobre el segmento $[b, b + c]$, $c > 0$, entonces para cualquier $n$ entero no negativo la función $f$ es integrable sobre el segmento $[b + nT, b + c + nT]$ y es válida la igualdad

$$\int_b^{b+c} f(x)\,dx = \int_{b+nT}^{b+c+nT} f(x)\,dx. \tag{28.33}$$

En efecto, por la periodicidad de la función $f$ en la traslación del segmento $[b, b + c]$ al segmento $[b + nT, b + c + nT]$, es decir, en la trasformación del argumento $x' = x + nT$, en los puntos correspondientes unos a otros de estos segmentos la función $f$ toma valores iguales. A base de esto se puede mostrar fácilmente por el mismo método que fue aplicado en el ejemplo anterior utilizando sólo en lugar de una simetría una traslación, que la función $f$ es integrable sobre el segmento $[b + nT, b + c + nT]$ y que tiene lugar la igualdad (28.33).

Aplicando este resultado a los segmentos $[a, b - nT]$ y $[b - nT, a + T]$ y agregando en el primer caso a ambos extremos del segmento el número $(n + 1)T$ y en el segundo el número $nT$ obtendremos, en primer lugar, que la función $f$ es integrable sobre los segmentos $[a + (n + 1)T, b + T]$ y $[b, a + (n + 1)T]$ y en segundo lugar que

$$\int_a^{b-nT} f(x)\,dx = \int_{a+(n+1)T}^{b+T} f(x)\,dx, \quad \int_{b-nT}^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{a+(n+1)T} f(x)\,dx. \tag{28.34}$$

Sumando estas igualdades, en virtud de la propiedad de aditividad de la integral (véase la propiedad 3°) obtendremos la fórmula (28.32). □

Señalemos que es válida en cierto sentido la afirmación inversa: si para algún $b \geqslant a$ la función $f$ es integrable sobre el segmento $[b, b + T]$, entonces es integrable sobre el segmento $[a, a + T]$. Esto también se deduce de las fórmulas (28.34) sólo que en ellas esta vez están dadas las partes derechas.

## 28.2. PRIMER TEOREMA SOBRE EL VALOR MEDIO PARA LA INTEGRAL DEFINIDA

**Teorema 1.** *Supongamos que*

1) *las funciones $f$ y $g$ son integrables sobre el segmento $[a, b]$;*

2) $m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a, b];$ (28.35)

3) *la función $g$ no cambia de signo sobre el segmento $[a, b]$, es decir, o bien es no negativa o bien es no positiva sobre él;*

*entonces existe el número $\mu$ tal que*

$$m \leqslant \mu \leqslant M \tag{28.36}$$

*y*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.37}$$

**Corolario.** *En la suposición complementaria de la continuidad de la función $f$ sobre el segmento $[a, b]$ existe un punto $\xi$ sobre el intervalo $(a, b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.38}$$

*En particular para $g(x) = 1$ sobre $[a, b]$:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a). \tag{28.39}$$

La última fórmula en el caso de una función $f$ no negativa sobre el segmento $[a, b]$ tiene un sentido geométrico simple: el área del trapecio curvilíneo engendrado por la gráfica de la función $f$ es igual al área del rectángulo con base de longitud $b - a$ y altura de longitud $f(\xi)$ (fig. 118).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Multiplicando la desigualdad (28.35) por $g(x)$ obtenemos para $g(x) \geqslant 0$

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$$

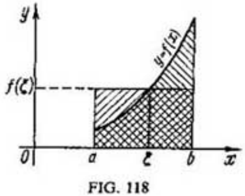



FIG. 118

y para $g(x) \leqslant 0$

$$mg(x) \geqslant f(x)g(x) \geqslant Mg(x).$$

Integrando estas desigualdades tendremos a base del corolario de la propiedad 8° (p. 28.1)

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx, \tag{28.40}$$

respectivamente,

$$m\int_a^b g(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \geqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.41}$$

Si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, entonces tanto en el primer caso, como en el segundo

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

De esta forma, si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, entonces ambos miembros de la igualdad (28.37) para cualquier $\mu$ se anulan, es decir, cuando se cumple la condición $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ la igualdad (28.37) es válida para cualquier elección del número $\mu$, en particular para $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Si $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, entonces para $g(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, tenemos $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ y para $g(x) \leqslant 0$, $x \in [a, b]$, respectivamente, $\int_a^b g(x)\,dx < 0$. Dividiendo las desigualdades (28.40) y (28.41) entre la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ obtendremos en ambos casos una misma desigualdad

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M. \tag{28.42}$$

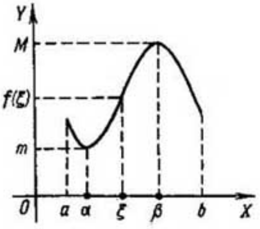



FIG. 119

Suponiendo

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx}, \tag{28.43}$$

vemos que para tal elección de $\mu$ se cumple tanto la condición (28.36) (en virtud de (28.42)), como (28.37) (en virtud de (28.43)). □

DEMOSTRACIÓN DE COROLARIO. Si $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$, entonces en virtud de la igualdad (28.37) obtenemos $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ y por lo tanto, la fórmula (28.38) es válida para cualquier elección del punto $\xi \in (a, b)$. En el futuro, para simplificar, consideraremos $g(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$ (el caso $g(x) \leqslant 0$, $x \in [a, b]$ se analiza análogamente o se reduce al anterior con la sistitución de la función $g(x)$ por la función $-g(x)$).

Sea ahora $\int\limits_a^b g(x)\,dx \neq 0$, entonces por la no negatividad de la función $g(x)$ se cumple la desigualdad

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx > 0. \tag{28.44}$$

En el futuro consideraremos que $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Esta suposición es permisible ya que para tal elección de $m$ y $M$ se cumple la condición (28.35). En la fórmula (28.37) según la condición (28.36) son posible tres casos: $m < \mu < M$, $\mu = M$ y $\mu = m$.

Si $m < \mu < M$, entonces por el teorema de que una función continua sobre un segmento alcanza sobre él sus valores máximo y mínimo (véase el teorema 1 en el p.

6.1) existen los puntos $\alpha \in [a, b]$ y $\beta \in [a, b]$ tales que $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$. Por esto, según el teorema sobre los valores medios de una función continua (véase el teorema 2 y el corolario 2 de él en el p. 6.2), sobre el intervalo con extremos $\alpha$ y $\beta$ se encuentra un punto $\xi$ tal que $f(\xi) = \mu$. Evidentemente $\xi \in (a, b)$ (fig. 119).

Si $\mu = M$ (el caso $\mu = m$ se analiza análogamente), entonces la igualdad (28.37) toma la forma

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = M\int_a^b g(x)\,dx,$$

de donde

$$\int_a^b [M - f(x)]\,g(x)\,dx = 0. \tag{28.45}$$

Mostremos que existe el punto $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = M$. Previamente observemos que

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx. \tag{28.46}$$

En realidad, la función $g(x)$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y por esto es acotada sobre él, es decir, existe una constante $A > 0$ tal que para todos los $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad $|g(x)| \leqslant A$. De aquí tenemos

$$\left|\int_a^b g(x)\,dx - \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx\right| = \left|\int_a^{a+\varepsilon} g(x)\,dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} g(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^{a+\varepsilon} |g(x)|\,dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} |g(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant A\int_a^{a+\varepsilon} dx + A\int_{b-\varepsilon}^{b} dx = 2A\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < b - a.$$

De esta desigualdad se deduce inmediatamente (28.46).

En virtud de la desigualdad (28.44), de (28.46) se deriva la existencia de $\varepsilon_0$, $0 < \varepsilon_0 < b - a$, tal que

$$\int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} g(x)\,dx > 0.$$

Si no existiera el punto $\xi \in (a, b)$ en el cual $f(\xi) = M$, entonces la función continua $M - f(\xi)$ sería positiva sobre el intervalo $(a, b)$ y, por consiguiente, sobre el segmento $[a + \varepsilon_0, b - \varepsilon_0]$. En particular, sería positiva en el mismo punto $x_0$ donde toma su valor mínimo:

$$M - f(x) \geqslant \min_{[a+\varepsilon_0, b-\varepsilon_0]} [M - f(x)] = M - f(x_0) > 0.$$

Por esto

$$\int_a^b [M - f(x)]g(x)\,dx \geqslant \int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} [M - f(x)]\,g(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant [M - f(x_0)] \int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} g(x)\,dx > 0,$$

y esto contradice la igualdad (28.45). □

El corolario del teorema 1 usualmente se llama *teorema integral sobre el valor medio*. Este nombre se explica con que en él se afirma la existencia de cierto punto sobre el segmento, "el punto medio" que posee una propiedad determinada relacionada con la integral de la función.

Las fórmulas (28.31) y (28.32) permanecen siendo ciertas de forma evidente cuando $a \geqslant b$.

## 28.3. INTEGRABILIDAD DE LAS FUNCIONES CONTINUAS A TROZOS

Generalicemos ahora el teorema 3 del párrafo anterior sobre la integrabilidad de las funciones continuas sobre el caso de las así llamadas funciones continuas a trozos.

**Definición 1.** *La función $f$ definida sobre el segmento $[a, b]$ se llama continua a trozos sobre él si existe la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ de este segmento tal que la función $f$ es continua sobre cada uno de los intervalos $(x_{i-1}, x_i)$ y existen los límites finitos*

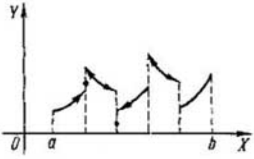
$$f(x_{i-1} + 0) = \lim_{x \to x_{i-1}+0} f(x) \quad \text{y}$$

$$f(x_i - 0) = \lim_{x \to x_i - 0} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Más breve, una función es continua a trozos sobre un segmento si sobre él tiene sólo un número finito de puntos de discontinuidad y además sólo de primer género (fig. 120).

**Lema 1.** *Sean las funciones $f$ y $\varphi$ definidas sobre el segmento $[a, b]$ y $f(x) = \varphi(x)$ sobre el intervalo $(a, b)$. Entonces si la función $f$ es integrable sobre $[a, b]$, la función $\varphi$ también es integrable sobre $[a, b]$ y*

FIG. 120



$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dicho de otro modo, el cambio de los valores de la función sobre los extremos del segmento no influye ni sobre la integrabilidad de la función ni sobre el valor de la integral si la función es integrable. La afirmación análoga, por supuesto, es válida para la variación de los valores de la función en cualquier número finito de puntos.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. La función $f$ es integrable y por consiguiente acotada: $|f(x)| \leqslant M$ para todas las $x \in [a, b]$. Sea $M_0 = \text{máx}\,\{M, \varphi(a), \varphi(b)\}$. Analicemos cualquier partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ y formemos las sumas integrales de Riemann $\sigma_\tau(f)$ y $\sigma_\tau(\varphi)$, eligiendo los mismos puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Sea como siempre $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Por cuanto

$$|f(\xi_1)\Delta x_1| \leqslant M_0\delta_\tau, \quad |f(\xi_k)\Delta x_k| \leqslant M_0\delta_\tau,$$
$$|\varphi(\xi_1)\Delta x_1| \leqslant M_0\delta_\tau \quad \text{y} \quad |\varphi(\xi_k)\Delta x_k| \leqslant M_0\delta_\tau,$$

entonces

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} f(\xi_1)\Delta x_1 = \lim_{\delta_\tau \to 0} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\delta_\tau \to 0} \varphi(\xi_1)\Delta x_1 = \lim_{\delta_\tau \to 0} \varphi(\xi_k)\Delta x_k = 0.$$

Por esto

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(\varphi) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \varphi(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=2}^{k-1} \varphi(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=2}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por consiguiente la integral $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ existe y es igual a $\int_a^b f(x)\,dx$. □

Ejercicio 1. Demuéstrese que la variación del valor de la función en un número finito de puntos no influye ni en la integrabilidad de la función ni en su valor si ella existe.

**Teorema 2.** *Una función $f$ continua a trozos sobre el segmento $[a, b]$ es integrable sobre él.*

DEMOSTRACIÓN. Sean la función $f$ *continua a trozos sobre el segmento* $[a, b]$ y $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ su partición indicada en la definición 1. Hagamos

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{cuando} \quad x_{i-1} < x < x_i, \\ f(x_{i-1} + 0) & \text{cuando} \quad x = x_{i-1}, \\ f(x_i - 0) & \text{cuando} \quad x = x_i. \end{cases}$$

La función $f_i$ es continua sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, 2, \ldots, k$ y por consiguiente es integrable sobre él (véase el p. 27.5).

Sobre cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ la función $f$ diferencia tal vez de la función continua $f_i$ sólo en los extemos de este segmento. Por consiguiente, según el lema, la función $f$ es integrable sobre $[x_{i-1}, x_i]$ y

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Aplicando la propiedad 3° de las integrales, obtendremos que la función $f$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{x_{i-1}}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx. \square \tag{28.47}$$

OBSERVACIÓN. En el p. 44.5 será demostrada una condición suficiente de integrabilidad más general (véase el teorema 10 en el p. 44.5 y la observación 2 en el p. 44.7) de la cual en particular se deduce que cualquier función acotada sobre un segmento y continua sobre él en todos lor puntos excepto un número finito de puntos, es integrable. Así, la condición de la existencia de sólo un número finito de puntos de discontinuidad de *primer género* para una función $f$ no es sustancial en el teorema 2: ellos pueden ser también de *segundo género* y la afirmación del teorema permanece válida.

**Problema 20.** Demuéstrese que para que una función acotada sobre un segmento sea integrable sobre él es necesario y suficiente que para cada $\varepsilon > 0$ exista un sistema de intervalos finito o numerable que contuviera todos los puntos de discontinuidad de la función dada y la suma de las longitudes de los cuales fuese menor que el $\varepsilon$ dado.

## 28.4.* DESIGUALDADES INTEGRALES DE HÖLDER Y MINKOWSKI

Sean las funciones $f$ y $g$ definidas e integrables sobre el segmento $[a, b]$, $1 < p < +\infty$ y el número $q$ se define por la igualdad

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{28.48}$$

(véanse (20.49), (20.51) y (20.52)). Entonces tenemos:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q} \tag{29.49}$$

(desigualdad de Hölder*);

$$\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \tag{28.50}$$

(desigualdad de Minkowski**).

---

*) O. Hölder (1859—1937), matemático alemán.

**) G. Minkowski (1864—1906) nació en Rusia, trabajó en Suiza y Alemania.

Demostremos estas desigualdades. Introduzcamos para abreviar las notaciones

$$\|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}, \quad \|g\|_q \overset{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q}. \tag{28.51}$$

En la desigualdad (20.53)

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0,$$

pongamos

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|q\|_q}, \quad x \in [a, b].$$

Entonces para cualquier $x \in [a, b]$

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\,\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\,\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Integrando esta desigualdad respecto al segmento $[a, b]$ y utilizando (28.51) y (28.49) hallaremos

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int_a^b |f(x)|_p^p\,dx + \\ + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\int_a^b |g(x)|^q\,dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Por esto

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \|f\|_p\|g\|_q,$$

es decir, la desigualdad (28.50) queda demostrada.

Demostremos la desigualdad (28.50). Es fácil convencerse de la validez de la desigualdad

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx = \int_a^b |f(x) + g(x)|\,|f(x) + g(x)|^{p-1}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x)|\,|f(x) + g(x)|^{p-1}\,dx + \int_a^b |g(x)|\,|f(x) + g(x)|^{p-1}\,dx.$$

Aplicando a cada una de las integrales obtenidas la desigualdad de Hölder y observando que $q(p - 1) = p$ (véase (28.42)) obtendremos:

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right]^{1/q} +$$

$$+ \left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right]^{1/q} =$$

$$= \left\{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\right\}\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/q}. \quad (28.52)$$

Si el primer miembro de esta desigualdad es igual a cero, entonces la desigualdad (28.50) evidentemente es válida, si no es igual a cero, entonces simplificando ambos miembros de la desigualdad (28.52) por el factor $\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/q}$, en virtud de la relación (28.48) obtendremos la desigualdad de Minkowski. □

Señalemos un caso particular importante de la desigualdad de Hölder. Para $p = q = 2$ tenemos

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)|\,dx}\sqrt{\int_a^b |g(x)|\,dx} \quad (28.53)$$

(*desigualdad de Cauchy*).

## § 29. INTEGRAL DEFINIDA CON LÍMITE SUPERIOR VARIABLE

### 29.1. CONTINUIDAD DE LA INTEGRAL RESPECTO AL LÍMITE SUPERIOR

Sea la función $f(x)$ integrable sobre el segmento $[a, b]$. Entonces ella es integrable sobre cualquier segmento $[a, x]$, donde $a \leqslant x \leqslant b$, es decir, para cualquier $x \in [a, b]$ tiene sentido la integral $\int_a^x f(t)\,dt$.

Analicemos la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \quad (29.1)$$

Esta función $F$ está definida sobre el segmento $[a, b]$ y se llama *integral con límite superior variable*. Establezcamos sus propiedades principales.

**Teorema 1.** *Si la función $f$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$, entonces la función (29.1) es continua sobre este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $x \in [a, b]$, $x + \Delta x \in [a, b]$. Entonces de la fórmula (29.1) se deduce que

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

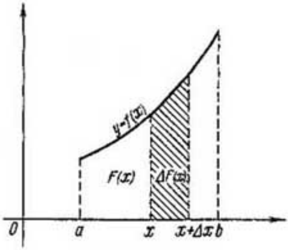



FIG. 121

por eso (fig. 121)

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt. \tag{29.2}$$

Por cuanto la función $f$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$, es acotada sobre este segmento, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todos los $x \in [a, b]$. Aplicando esta desigualdad para la estimación de la expresión $|\Delta F|$ obtendremos (véase el p. 28.1):

$$|\Delta F| = \left| \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt \right| \leqslant \left| \int_{x}^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt \right| \leqslant \left| \int_{x}^{x+\Delta x} M\,dt \right| \leqslant M|\Delta x|.$$

De aquí se deduce que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$ para cualquier $x \in [a, b]$ y esto significa la continuidad de la función $F$ en cada punto $x \in [a, b]$. $\square$

## 29.2. DIFERENCIABILIDAD DE LA INTEGRAL RESPECTO AL LÍMITE SUPERIOR. EXISTENCIA DE LA PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN CONTINUA

**Teorema 2.** *Si la función $f$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y es continua en el punto $x_0 \in [a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es diferenciable en el punto $x_0$ y*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0),$$

donde $\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0), x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Para esto estimemos el módulo de la diferencia $\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)$.

Observando que $\frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = 1$ y, por consiguiente, $f(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt$, tendremos

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt}{\Delta x}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right|. \quad (29.3)$$

Sea dado $\varepsilon > 0$. En virtud de la continuidad de la función $f$ en el punto $x_0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ y $x \in [a, b]$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (29.4)$$

Escojamos $\Delta x$ de forma tal que $|\Delta x| < \delta$. Entonces para los valores de $t$ sobre el segmento respecto al cual se realiza la integración tendremos $|t - x_0| \leqslant |\Delta x| < \delta$ y, por consiguiente, de las desigualdades (29.3) y (29.4) obtendremos

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x}^{x_0+\Delta x} dt\right| = \varepsilon,$$

y esto significa que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)$.

En el caso cuando el punto $x_0$ coincide con uno de los extremos del segmento $[a, b]$, por $F'(x_0)$ se debe sobreentender la derivada unilateral correspondiente de la función $F(x)$. ☐

Ahora se puede resolver la cuestión sobre la existencia de la primitiva para una función continua arbitraria.

**Teorema 3.** *Si una función es integrable sobre un segmento y es continua en todos sus puntos excepto un conjunto finito de ellos, entonces sobre este segmento para ella existe una primitiva.*

**Corolario.** *Una función continua sobre un segmento tiene primitiva.*

DEMOSTRACIÓN. Si la función $f$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y es continua en todos los puntos de este segmento excepto un conjunto finito de ellos, entonces por los teoremas 1 y 2 su primitiva sobre el segmento $[a, b]$ es, por ejemplo, la función

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

En realidad, ante todo, según el teorema 1 la función $F$ es continua sobre el segmento $[a, b]$. Más adelante, si por $E$ denotamos el conjunto finito, $E \subset [a, b]$, en los puntos del cual la función $f$ no es continua, entonces para los puntos $x$ restantes, es decir, para los puntos de continuidad de la función $f$: $x \in [a, b] \setminus E$, por el teorema 2 tiene lugar la igualdad

$$F'(x) = f(x).$$

Esto significa (véase la definición 1 en el p. 22.1) que la función $F$ es una primitiva para la función $f$ sobre el segmento $[a, b]$. □

La validez del corolario se deriva de que si la función es continua sobre cierto segmento, entonces por el teorema 3 del p. 27.5 es integrable sobre él y, por consiguiente satisface las condiciones del teorema demostrado (el conjunto finito de los puntos en los cuales la función es discontinua, en el caso dado es vacío).

De esta forma la operación de integración con límite superior variable aplicada a una función continua nos lleva a una primitiva, es decir, es la operación inversa a la diferenciación

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{29.5}$$

Esta afirmación (llamada *fórmula de deferenciación de la integral definida respecto al límite superior*) es básica para el cálculo deferencial e integral. De ella se deduce, en particular, que cualquier primitiva de una función $f(x)$ continua sobre un segmento $[a, b]$ tiene la forma

$$\int_a^x f(t)\,dt + C, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

En efecto, según lo demostrado la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva para la función $f(x)$ y cualquier otra primitiva puede diferenciarse de $f(x)$ sólo en una constante (véase el p. 22.1). De esta forma queda establecida la relación entre las integrales definida e indefinida en la forma

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dt + C.$$

Los teoremas demostrados muestran que la operación de integración con límite superior variable nos lleva al "mejoramiento" o "suavización" de las propiedades de la función: una función integrable pasa a ser continua y una continua, diferenciable.

Observemos que la operación de diferenciación en determinado sentido "empeora" las propiedades de la función: por ejemplo, la derivada de una función continua, si existe, puede ser ya una función discontinua.

De la fórmula de diferenciación respecto al límite superior de integración, es decir, de la fórmula (29.5) se puede obtener fácilmente la fórmula de diferenciación respecto al límite inferior de integración.

Sea la función $f$ integrable sobre el segmento $[a, b]$. Entonces sobre este segmento está definida la función

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

y además de la identidad

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt$$

tenemos

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x). \tag{29.6}$$

Si la función $f$ es continua en el punto $x \in [a, b]$, entonces como fue demostrado anteriormente, la función $F$ es diferenciable en este punto. De la fórmula (29.6) se deduce que en este caso la función $G(x)$ también es diferenciable en el punto $x$ y

$$\frac{dG(x)}{dx} = -\frac{dF(x)}{dx}.$$

De esta forma

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x).$$

OBSERVACIÓN. De las fórmulas de diferenciación de la integral de una función continua respecto al límite superior (inferior) de integración se deduce también que cualquier función continua sobre cierto intervalo (finito o infinito) tiene sobre él primitiva. En efecto, sea por ejemplo la función $f$ continua sobre el intervalo $(a, b)$. Escojamos un punto arbitrario $x_0 \in (a, b)$ y hagamos

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Entonces para todos los $x \in (a, b)$ es válida la igualdad $F'(x) = f(x)$, es decir, $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ sobre el intervalo $(a, b)$.

Ejercicio 1. Sean la función $f(x)$ continua y $\varphi(x)$, $\psi(x)$ diferenciables en todos los puntos de $R$. Demuéstrense las siguientes generalizaciones de la fórmula (29.5):

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f(\varphi(x))\varphi'(x); \quad \frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x).$$

## 29.3. FÓRMULA DE NEWTON — LEIBNIZ

**Teorema 4 (teorema principal del cálculo integral).** *Sea la función $f$ continua sobre el segmento $[a, b]$. Si la función $\Phi$ es una primitiva arbitraria sobre este segmento, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{29.7}$$

Esta fórmula se llama *fórmula de Newton*[*)] — *Leibniz*.

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Por la demostración del corolario de teorema 3 del p. 29.2 la función $F$ es una primitiva para la función $f$ sobre el segmento $[a, b]$. De esta forma $F$ y $\Phi$ son dos primitivas de una misma función $f$ sobre el segmento $[a, b]$, por eso

$$F(x) = \Phi(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

donde $C$ es cierta constante, es decir,

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Para $x = a$ de aquí se deduce que $C = -\Phi(a)$ por consiguiente

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Haciendo aquí $x = b$ obtendremos la fórmula (29.7). □

Para abreviar la escritura a menudo se utiliza la notación

$$\Phi(x)\Big|_a^b \overset{\text{def}}{=} \Phi(b) - \Phi(a),$$

ó

$$[\Phi(x)]_a^b \overset{\text{def}}{=} \Phi(b) - \Phi(a).$$

Si en la demostración realizada del teorema 4 en lugar del corolario del teorema 3 utilizamos el propio teorema, entonces se obtendrá la demostración de una afirmación más general. Enunciémosla también en forma de teorema.

**Teorema 4***. *Sea la función $f$ integrable sobre el segmento $[a, b]$ y continua en todos sus puntos excepto un conjunto finito de ellos. Si la función $\Phi$ es cualquiera de sus primitivas sobre este segmento, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Esta fórmula también se llama fórmula de Newton — Leibniz. Señalemos que ella es válida también para $a > b$. En efecto, si en ella $a$ y $b$ cambien de puesto, entonces sus miembros primero y segundo cambiarán de signo.

OBSERVACIÓN 1. Se puede mostrar que la condición de integrabilidad de la función sobre el segmento a condición de ser continua en todos los puntos de este segmento, excepto un conjunto finito de ellos, es equivalente a la acotación de la fun-

---

[*)] I. Newton (1643—1727), físico, mecánico, astrónomo y matemático inglés.

ción sobre este segmento. Esto se deduce directamente de la acotación de una función integrable y de la integrabilidad de una función acotada con un conjunto finito de puntos de discontinuidad (véase la observación al final del p. 28.3).

OBSERVACIÓN 2. Es evidente que las funciones continuas a trozos (véase el p. 28.3) siendo integrables (véase el teorema 2 en el p. 28.3) satisfacen las condiciones del teorema 4*. Prestemos atención no obstante a la circunstancia de que el teorema 4* está demostrado para funciones de un tipo más general que las continuas a trozos: en él no se hace ninguna suposición sobre el carácter de los puntos de discontinuidad de las funciones analizadas, es decir, ellos pueden ser tanto de primer género como de segundo. ı

Ejemplos 1. Hallamos $\int\limits_0^1 x^2\,dx$. Es conocido que

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C, \text{ por eso } \int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Hallemos $\int\limits_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$. Tenemos

$$\int\limits_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$$

Así pues, fue demostrado que si la función $f$ es integrable sobre segmento y el conjunto de sus puntos de discontinuidad es finito, entonces sobre este segmento ella tiene primitiva $F$ y además es válida la fórmula de Newton — Leibniz.

Mostremos ahora que la fórmula de Newton — Leibniz tiene lugar sólo en la suposición de la existencia de la primitiva para una función $f$ integrable, es decir, que para la validez de la fórmula de Newton — Leibniz no es necesario exigir que el conjunto de puntos de discontinuidad de la función $f$ sea finito (no obstante, recordemos que esta propiedad se utilizó sustancialmente en la demostración de la existencia de la primitiva).

**Teorema 5.** *Sea la función $f$ integrable sobre el segmento $[a, b]$ y $F$ su primitiva sobre este segmento. Entonces*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{29.8}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de primitiva, la función $F$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y existe un conjunto finito de puntos $E_f \subset [a, b]$ tal que para todas las $x \in [a, b] \setminus E_f$ se cumple la igualdad $F'(x) = f(x)$. Denotemos por $a_1, a_2, \ldots, a_m$ los puntos del conjunto finito $E_f$ y analicemos cualquier partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ que contenga a todos los puntos $a_1, \ldots, a_m$. Entonces sobre cada segmento $[x_{i-1}, x_i]$ la función $F$ es continua y en su interior tiene derivada $F'(x) = f(x)$. Por esto, a la función $F$ sobre el segmento indicado se le puede aplicar la fórmula de los incrementos finitos (teorema de Lagrange sobre el valor medio):

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{29.9}$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, k$.

Sumando las igualdades obtenidas desde 1 hasta $k$ y observando que

$$\sum_{i=1}^{k} F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(x_k) - F(x_0) = F(b) - F(a),$$

obtendremos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{29.10}$$

En la parte derecha de esta igualdad aparece una suma integral de Riemann de la función $f$.

Sea ahora $\tau = \tau_n$, $n = 1, 2, \dots$, una sucesión de particiones que contienen a los puntos $a_1, \dots, a_m$, para la cual $\delta_{\tau_n} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Pasando al límite cuando $n \to \infty$ en (29.10) y observando que el primer miembro de esta igualdad es constante e igual a $F(b) - F(a)$ y el segundo, en virtud de la integrabilidad de $f$ (véase el teorema 3 en el p. 28.3), tiende a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, obtendremos la fórmula (29.8). □

De la fórmula (29.8) se deduce que si dos funciones integrales $f$ y $f_1$ sobre el segmento $[a, b]$ tienen una misma primitiva $F$, entonces sus integrales respecto a este segmento son iguales ya que son iguales al número $F(b) - F(a)$. Por otra parte, no es difícil demostrar esto directamente, ya que en este caso las funciones integrables $f$ y $f_1$ pueden diferenciarse una de otra sólo en los valores en un número finito de puntos (véase el p. 22.1).

OBSERVACIÓN 3. La fórmula de Newton — Leibniz a veces se escribe en la forma

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{29.11}$$

Aquí se supone que la función $F$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y en todos sus puntos, excepto un conjunto finito, tiene derivada $F'$. Así pues, la función subintegral en la fórmula (29.11) puede resultar definida no en todos los puntos del segmento $[a, b]$ y por esto exige una aclaración sobre qué se entiende en este caso por la integral $\int_a^b F'(x)\,dx$. En la fórmula (29.11) se supone complementariamente que existe un función $f$ integrable sobre el segmento $[a, b]$ (y por lo tanto definida ya en cada uno de sus puntos) para la cual la función $F$ es su primitiva y por consiguiente existe un conjunto finito $E_f$ tal que para todos los puntos $x \in [a, b] \setminus E_f$ tiene lugar la igualdad $F'(x) = f(x)$. La integral $\int_a^b F'(x)\,dx$ por definición se toma igual a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, es decir,

$$\int_a^b F'x\,dx \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{29.12}$$

Esta definición es correcta ya que no depende de la elección de la función $f$ indicada: para cualquier elección tendrá una misma primitiva $F$ y, por consiguiente, en virtud del teorema 5, un mismo valor de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ igual a $F(b) - F(a)$.

Todo lo dicho hace natural la siguiente definición.

**Definición 1.** *La función $F$ definida sobre el segmento $[a, b]$ se llama función con derivada integrable sobre este segmento si esixten el conjunto finito $E \subset [a, b]$ y la función $f$ integrable sobre $[a, b]$ tales que para cualquier punto $x \in [a, b] \setminus E$ la función $F$ tiene derivada y $F'(x) = f(x)$.*

*Dicho de otro modo, la función $F$ se llama función con derivada integrable sobre cierto segmento si sobre este segmento ella es una primitiva de una función integrable.*

Ahora el teorema 5 se puede parafrasear de la siguiente forma.

**Teorema 5.** *Si la función $F$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y tiene sobre él derivada integrable, entonces*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ejercicio 2. Demuéstrese que si las funciones $F_1$ y $F_2$ integrables sobre el segmento $[a, b]$ tienen derivadas integrables sobre este segmento, entonces su producto $F_1F_2$ también tiene derivada integrable sobre $[a, b]$.

# § 30. FÓRMULA DEL CAMBIO DE VARIABLE EN LA INTEGRAL E INTEGRACIÓN POR PARTES

## 30.1. CAMBIO DE VARIABLE

**Teorema 1.** *Sean*

1) *la función $f(x)$ continua sobre el intervalo $(a, b)$;*

2) *la función $\varphi(t)$ definida y continua junto con su derivada $\varphi'(t)$ sobre el intervalo $(\alpha, \beta)$ y además para todos los $t \in (\alpha, \beta)$ se cumple la desigualdad $a < \varphi(t) < b$. En este caso si $\alpha_0 \in (\alpha, \beta)$, $\beta_0 \in (\alpha, \beta)$, $a_0 = \varphi(\alpha_0)$, $b_0 = \varphi(\beta_0)$, entonces*

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{30.1}$$

Esta fórmula se llama fórmula *del cambio de variable* en la integral definida o fórmula de integración por *sustitución*.

DEMOSTRACIÓN. Ante todo observemos que según la condición, la función $f$, a ciencia cierta, está definida sobre el conjunto de valores de la función $\varphi$ (fig. 122) por eso tiene sentido la función compuesta $f[\varphi(t)]$. Según las suposiciones hechas las funciones subintegrales en ambas partes de la fórmula (30.1) son continuas por eso ambas integrales en esta fórmula existen.

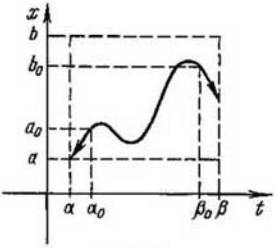



FIG. 122

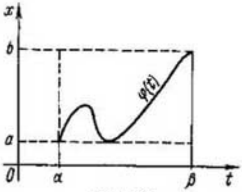



FIG. 123

Sea $\Phi(x)$ cualquier primitiva de la función $f(x)$ sobre el intervalo $(a, b)$. Entonces para los puntos $t$ del intervalo $(\alpha, \beta)$, tiene sentido la función compuesta $\Phi[\varphi(t)]$ que es una primitiva de la función $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Por la fórmula de Newton — Leibniz (véase el p. 29.3),

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \Phi(b_0) - \Phi(a_0),$$

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = \Phi[\varphi(\beta_0)] - \Phi[\varphi(\alpha_0)] = \Phi(b_0) - \Phi(a_0).$$

De estas igualdades se deduce la fórmula (30.1) □

Como se ve de la demostración, la fórmula (30.1) es válida tanto para $\alpha_0 \leqslant \beta_0$ como para $\alpha_0 > \beta_0$.

Es interesante señalar que algunos valores de la función $\varphi(t)$ pueden no pertenecer al segmento $[a_0, b_0]$ respecto al cual se integra (véase la fig. 122) en la parte izquierda de la igualdad (30.1).

Si utilizamos la fórmula para las derivadas unilaterales de una función compuesta (véase la observación 2 en el p. 9.7), entonces la fórmula (30.1) se puede demostrar para el caso cuando la función $f$ se da sobre el segmento $[a, b]$, la función $\varphi(t)$ sobre el segmento $[\alpha, \beta]$ y el conjunto de los valores de la función $\varphi$ se contiene en el segmento $[a, b]$ y además $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ (fig. 123). En este caso la fórmula del cambio de variable puede ser aplicada a todo el segmento $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{30.2}$$

Al utilizar el símbolo de la integral definida siempre escribimos bajo el signo de la integral la expresión $f(x)\,dx$ donde $x$ es una variable independiente. Además, cuando se daba la definición de integral definida no se suponía que $f(x)\,dx$ es la diferencial de alguna función. Luego (véase el p. 29.2) fue mostrado que al menos para una función $f$ continua la expresión $f(x)\,dx$ siempre es la diferencial de cierta función $F(x)$: $dF(x) = f(x)\,dx$. Por esto es natural considerar que en este caso las escrituras $\int_a^b dF(x)$ y $\int_a^b f(x)\,dx$ tiene el mismo valor, es decir,

$$\int_a^b dF(x) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En general permitiremos bajo el signo de la integral definida cualquier escritura de una diferencial, es decir, por definición, para una función $g(x)$ diferenciable haremos:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

(si por supuesto la integral que aparece en el segundo miembro de la igualdad existe). Con ayuda de esta notación, por ejemplo, la fórmula (30.2) toma la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,d\varphi(t).$$

De esta forma, al cambiar la variable $x = \varphi(t)$ en la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se debe formalmente sustituir en todos los casos $x$ por $\varphi(t)$ y de la forma correspondiente cambiar los límites de integración.

Prestemos atención a que al utilizar la fórmula (30.1) (respectivamente, la fórmula (30.2)) de forma semejante al caso de la integral indefinida, se puede aplicarla tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. No obstante, a diferencia de la integral indefinida donde al final del cálculo debiamos regresar a la variable de integración inicial, aquí no es necesario hacer esto, ya que nuestro objetivo es hallar un número, que en virtud de las fórmulas demostradas es igual al valor de cada una de las integrales analizadas.

Ejemplos. 1. Calculemos la integral $\int_0^2 e^{x^2}x\,dx$. Aplicando la fórmula (30.1) de derecha a izquierda (aquí el papel de la variable $t$ lo juega $x$), obtendremos

$$\int_0^2 e^{x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2}\,dx^2 = \frac{1}{2}\int_0^4 e^y\,dy = \frac{1}{2}\,e^y\Big|_0^4 = \frac{e^4-1}{2}.$$

2. Supongamos que se exige calcular la integral $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x - 1}\,dx$. Tratemos de simplificar la expresión subintegral haciendo $\sqrt{e^x - 1} = t$. Dicho de otro modo, hagamos el cambio de variable $x = \ln(1 + t^2)$; entonces $dx = \frac{2t\,dt}{1+t^2}$ y por cuanto para $0 \leqslant t \leqslant 1$ tenemos $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$, entonces aplicando la fórmula (30.1) de izquierda a derecha obtendremos

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx = 2\int_0^1 \frac{t^2 dt}{1 + t^2} = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right) dt = 2[t - \operatorname{arctg} t]_0^1 = \frac{4 - \pi}{2}.$$

Ejercicio 1. Demuéstrese que si la función $f$ es continua sobre $[a, b]$ y para todos los $t \in [0, b - a]: f(a + t) = f(b - t)$, entonces

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a + b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

La fórmula del cambio de variable en una integral definida con ayuda de la fórmula de Newton — Leibniz puede ser generalizada al caso cuando la función $f$, permaneciendo integrable, tendrá un número finito de puntos de discontinuidad.

## 30.2. INTEGRACIÓN POR PARTES

**Teorema 2.** *Si las funciones $u(x)$ y $v(x)$ son continuas sobre el segmento $[a, b]$ y tienen sobre él derivadas integrables, entonces*

$$\int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du. \tag{30.3}$$

Esta fórmula se llama *fórmula de integración por partes* para la integral definida.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos:

$$\int_a^b (uv)'\, dx = \int_a^b (uv' + u'v)\, dx = \int_a^b u dv + \int_a^b v du. \tag{30.4}$$

Todas las integrales escritas existen ya que las funciones subintegrales son integrables. De acuerdo con la fórmula de Newton — Leibniz (29.11) tenemos

$$\int_a^b (uv)'\, dx = [uv]_a^b. \tag{30.5}$$

Comparando las fórmulas (30.4) y (30.5) obtendremos la igualdad

$$\int_a^b u du + \int_a^b v du = [uv]_a^b,$$

de donde se deduce la fórmula (30.3). □

El teorema 2 se generaliza fácilmente al caso de las así llamadas funciones continuamente diferenciables a trozos. Definamos estas funciones.

Supongamos que la función $f(x)$ está definida sobre el segmento $[a, b]$, existe una partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ tal que la función $f(x)$ es continua sobre cada uno de los intervalos $(x_{i-1}, x_i)$ y existen los límites finitos $f(x_{i-1} + 0)$, $f(x_i - 0)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. (Por consiguiente, la función $f$ es continua a trozos sobre el segmento $[a, b]$, véase la definición 1 en el p. 28.3). Introduzcamos como se hizo anteriormente (véase la demostración del teorema 2 en el p. 28.3) las funciones

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x_{i-1} < x < x_i, \\ f(x_{i-1} + 0) & \text{si } x = x_{i-1}, \\ f(x_i - 0) & \text{si } x = x_i. \end{cases}$$

**Definición 1.** *Si cada función $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, es (continuamente) diferenciable sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$, entonces la función $f(x)$ se llama (continuamente) diferenciable a trozos sobre el segmento $[a, b]$.*

**Teorema 2'.** *Sean las funciones $u(x)$ y $v(x)$ continuas y continuamente diferenciables a trozos sobre el segmento $[a, b]$; entonces para ellas el válida la fórmula* (30.3) *de integración por partes.*

La demostración del teorema 2 permanece válida también en este caso. En realidad, el producto $uv$ es continuo y su derivada $(uv)' = uv' + u'v$ es continua a trozos. Por esto, según el teorema 5 del p. 29.2 a la integral que aparece en la parte izquierda de (30.5) se le puede aplicar también la fórmula de Newton — Leibniz. □

Ejemplos. 1. Hallemos el valor de la integral $\int_1^2 \ln x \, dx$. Apliquemos la fórmula de integración por partes:

$$\int_1^2 \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - 1.$$

2. Mostremos que para cualquier $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \dfrac{\pi}{2} & \text{cuando } n \text{ es par}^{*)} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{cuando } n \text{ es impar} \end{cases} \tag{30.7}$$

Observemos ante todo que la igualdad de las integrales que aparecen en (30.7) se establece fácilmente con ayuda del cambio de variable $x = \pi/2 - t$. Más adelante integrando por partes obtendremos:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-1} x \, d(-\cos x) =$$

$$= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x \, dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

---

*) Por $n!!$, $n \in N$, $n > 1$, se sobrentiende el producto de todos los números naturales que no sobrepasan $n$ y que tienen la misma paridad que $n$.

de donde

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Observemos que $I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = 1$. Por esto para $n = 2k + 1$, es decir, para $n$ impar, tendremos

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \ldots = \frac{2k(2k-2)\ldots 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 1} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},$$

y para $n = 2k$, es decir, para $n$ par

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \ldots = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 1}{2k(2k-2)\ldots 2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2},$$

$$k = 1, 2, \ldots . \square$$

De la fórmula (30.7) se obtiene fácilmente la así llamada *fórmula de Wallis**), que necesitaremos en el futuro

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2. \tag{30.8}$$

Demostrémosla. Integrando la desigualdad

$$\operatorname{sen}^{2n+1} x \leqslant \operatorname{sen}^{2n} x \leqslant \operatorname{sen}^{2n-1} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,$$

respecto al segmento $[0, \pi/2]$ tendremos

$$\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x \, dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x \, dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1} x \, dx$$

(no es difícil mostrar que en realidad aquí tienen lugar desigualdades estrictas). En virtud de (30.7)

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

de donde

$$x_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{1}{2n} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \stackrel{\text{def}}{=} y_n. \tag{30.9}$$

Por cuanto según esta desigualdad

$$y_n - x_n = \frac{1}{2n} \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \leqslant \frac{1}{2n} \frac{\pi}{2} \to 0$$

---

*) J. Wallis (1616—1703), matématico inglès.

cuando $n \to \infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$, es decir, las longitudes de los segmentos $[x_n, y_n] \ni \pi/2$ tienden a cero y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pi/2, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \pi/2.$$

La primera de estas igualdades por la definición de $x_n$ (véase (30.9)) significa la validez de la fórmula de Wallis. □

Ejercicios. Calcúlense las integrales definidas:

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. 4. $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$.

3. $\int\limits_0^2 |x-1|\, dx$. 5. $\int\limits_0^{\pi/2} x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} + \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right) dx$.

## 30.3*. SEGUNDO TEOREMA SOBRE EL VALOR MEDIO PARA LA INTEGRAL DEFINIDA

**Lema 1.** *Sea $f$ continua y $g$ una función creciente, no negativa, continuamente diferenciable sobre el segmento $[a, b]$. Entonces existe el punto $\xi \in [a, b]$ tal que*

$$\int\limits_a^b g(x)f(x)\,dx = g(b)\int\limits_\xi^b f(x)\,dx. \tag{30.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos la función

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_x^b f(t)\,dt,\ a \leqslant x \leqslant b. \tag{30.11}$$

La función $F$ siendo la integral de una función integrable $f$ (incluso continua) con límite inferior variable, es continua sobre el segmento $[a, b]$ y por esto alcanza sobre él su valor máximo y mínimo. Si

$$m = \min_{[a,b]} F(x), \quad M = \max_{[a,b]} F(x), \tag{30.12}$$

entonces, evidentemente

$$m \leqslant F(x) \leqslant M, \quad x \in [a, b]. \tag{30.13}$$

Observando que $dF(x) = -f(x)\,dx$ e integrando por partes la integral que aparece en el primer miembro de la igualdad (30.10) obtendremos

$$\int\limits_a^b g(x)f(x)\,dx = -\int\limits_a^b g(x)dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b + \int\limits_a^b F(x)g'(x)\,dx =$$

$$= g(a)F(a) + \int\limits_a^b F(x)g'(x)\,dx \tag{30.14}$$

ya que por (30.11) $F(b) = 0$.

Como consecuencia del crecimiento de la función $g$ tenemos $g'(x) \geqslant 0$ para todos los $x \in [a, b]$. Aplicando esta desigualdad y las desigualdades (30.13) y observando que del hecho de que la función $g$ es no negativa sobre $[a, b]$ se deduce en particular que $g(a) \geqslant 0$ obtendremos las estimaciones

$$g(a)F(a) + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \leqslant Mg(a) + M\int_a^b g'(x)\,dx =$$

$$= Mg(a) + M[g(b) - g(a)] = Mg(b),$$

$$g(a)F(a) + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \geqslant mg(a) + m[g(b) - g(a)] = mg(b).$$

De esta forma (véase (30.14)) tenemos

$$mg(b) \leqslant \int_a^b g(x)f(x)\,dx \leqslant Mg(b).$$

Si $g(b) = 0$, entonces del hecho de que la función $g$ es no negativa y crece se deduce que $g(x) \equiv 0$ sobre $[a, b]$. En este caso la fórmula (30.10) es válida para cualquier elección de $\xi \in [a, b]$.

Si $g(b) > 0$, entonces

$$m \leqslant \frac{1}{g(b)}\int_a^b g(x)f(x)\,dx \leqslant M.$$

Por cuanto la función $F$ continua sobre el segmento $[a, b]$ toma sobre este segmento cualquier valor entre su valor mínimo $m$ y máximo $M$ (véase (30.12)), entonces existe un punto $\xi \in [a, b]$ tal que

$$F(\xi) = \frac{1}{g(b)}\int_a^b g(x)f(x)\,dx.$$

Por la condición (30.11) ésta es la fórmula (30.10). □

**Teorema 3 (Bonnet[*])**. *Sea $f$ continua y $g$ una función monótona, continuamente diferenciable sobre el segmento $[a, b]$. Entonces existe un punto $\xi \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b g(x)f(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{30.15}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos inicialmente que la función $g$ crece sobre el segmento $[a, b]$; entonces la función $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(x) - g(a)$, $a \leqslant x \leqslant b$, será una función no negativa, creciente y continuamente diferenciable sobre el segmento $[a, b]$.

[*] O. Bonnet (1819—1892), matemático francés.

Según el lema existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b h(x)f(x)\,dx = h(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Sustituyendo aquí por la expresión de $h(x)$ obtendremos

$$\int_a^b [g(x) - g(a)]f(x)\,dx = [g(b) - g(a)]\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

de donde

$$\int_a^b g(x)f(x)\,dx = g(a)\int_a^b f(x)\,dx - g(a)\int_\xi^b f(x)\,dx +$$
$$+ g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

es decir, se obtuvo la fórmula (30.15).

Si la función $g$ decrece sobre el segmento $[a, b]$, entonces para la demostración del teorema es suficiente aplicar la fórmula (30.15) a la función $-g$, que evidentemente crece. □

Señalemos que el teorema 2 es válido también en restricciones más débiles: es suficiente exigir de la función $f$ su integrabilidad y de $g$, su monotonía.

## 30.4. INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

De forma análoga a como fueron definidas las integrales de una función numérica, se pueden definir las integrales de funciones vectoriales, cuyos valores pertenecen al espacio vectorial $n$-dimensional $R^n$ (véase el p. 18.4).

Supongamos que $r(t) \in R^n$, $a \leqslant t \leqslant b$, es una función vectorial, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ es una partición del segmento $[a, b]$, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, i_0$, $\delta_\tau$ es la finura de la partición $\tau$. Si para cualquier elección indicada de los puntos $\xi_i$ existe el límite*)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} r(\xi_i)\Delta t_i,$$

que no depende de la elección de la sucesión de particiones, entonces se llama *integral de la función* $r(t)$ respecto al segmento $[a, b]$ y se denota por

$$\int_a^b r(t)\,dt.$$

*) El concepto de límite en este caso se define o bien con ayuda del límite de una sucesión vectorial o bien en el lenguaje $(\varepsilon - \delta)$ de forma completamente análoga al caso de las funciones escalares analizado en el p. 27.1 y se propone al lector.

Para $a$ y $b$ constantes ella es un vector constante en $R^n$.

Sea $r(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Por cuanto en la adición de vectores se sumaron sus coordenadas, en la multiplicación de vectores por un número, sus coordenadas se multiplican por ese mismo número y el límite de una función vectorial es igual al vector cuyas coordenadas son los límites de las coordenadas correspondientes, entonces

$$\int_a^b r(t)\,dt = \left(\int_a^b x_1(t)\,dt, \dots, \int_a^b x_n(t)\,dt\right).$$

En virtud de esta igualdad, muchas propiedades de las integrales de las funciones numéricas se trasladan a las integrales de las funciones vectoriales. En particular, la función vectorial $F(t)$ definida sobre cierto intervalo $E$ finito o infinito se llama *primitiva para la función* $r(t) \in R^n$ dada, definida sobre ese mismo intervalo si en todos sus puntos interiores $t$ tiene lugar la igualdad $F'(t) = r(t)$ y sobre cada extremo del intervalo $E$ que pertenece a $E$, la función $F$ es continua.

Para las funciones vectoriales es válida la afirmación análoga al teorema principal del cálculo integral (véase el teorema 4 del p. 29.3):

*si la función vectorial* $r(t) \in R^n$ *es integrable sobre el segmento* $[a, b]$ *y continua en sus puntos interiores (en particular, si es continua sobre todo el segmento* $[a, b]$*) entonces para ella existe la primitiva sobre este segmento y para cualquiera de sus primitivas* $F(t)$ es válida la fórmula

$$\int_a^b r'(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

*que se llama fórmula de Newton — Leibniz como en el caso de las funciones escalares.*

La validez de esta afirmación se deduce de la validez de la fórmula de Newton — Leibniz para todas las coordenadas de la función $r(t)$.

OBSERVACIÓN. En el p. 15.2 fue demostrado el siguiente teorema: si la función vectorial $r(t)$) es continua sobre el segmento $[a, b]$ y diferenciable en su interior, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$|r(b) - r(a)| \leqslant |r'(\xi)|\,(b - a).$$

La demostración de esta afirmación realizada en el p. 15.2 tuvo un carácter algo artificial, era necesario notar la necesidad de utilizar cierta función auxiliar. Con ayuda del concepto de integral (suponiendo la continuidad de la derivada de la función vectorial analizada) la demostración se puede realizar de forma maś natural.

Supongamos que la función vectorial $r(t) \in R^n$ tiene derivada continua sobre el segmento $[a, b]$. Entonces aplicando la fórmula de Newton — Leibniz obtenemos

$$|r(b) - r(a)| = \left|\int_a^b r'(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |r'(t)|\,dt.$$

En la parte derecha se obtuvo la integral de una función escalar continua. Por el teorema integral sobre la media (véase el corolario del teorema 1 en el p. 28.2) existe el punto $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b |r'(t)|\, dt = |r'(\xi)|(b - a);$$

por consiguiente

$$|r(b) - r(a)| \leqslant |r'(\xi)|(b - a), \xi \in (a, b). \square$$

# § 31. MEDIDA DE LOS CONJUNTOS ABIERTOS PLANOS

## 31.1. DEFINICIÓN DE MEDIDA (AREA) DE CONJUNTOS ABIERTOS

Analicemos el plano sobre el cual está fijo cierto sistema de coordenadas rectangular. Denotemos por $T_0$ una partición de este plano en cuadrados cerrados que se obtienen al trazar todas las rectas posibles $x = p$, $y = q$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. A tal partición la llamaremos *cuadrilaje del plano de rango* 0 y a los cuadrados indicados, *cuadrados de rango nulo*. Dividamos cada uno de los cuadrados de rango nulo en 100 cuadrados iguales por rectas paralelas a los ejes de coordenadas (dos rectas vecinas cualesquiera se encuentran a una distancia de 1/10 una de otra). Al conjunto de cuadrados obtenidos lo denotaremos por $T_1$. Continuando este proceso obtenemos los cuadrilajes $T_m$, $m = 1, 2, \dots$, del plano compuesto por cuadrados formados como resultado del trazo de todas las rectas posibles del tipo

$$x = \frac{p}{10^m}, \quad y = \frac{q}{10^m}, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

y por consiguiente con lados de longitud $1/10^m$. A los cuadrados que pertenecen al cuadrilaje $T_m$ los llamaremos *cuadrados de rango m*, $m = 1, 2, \dots$

Sea $G$ un conjunto abierto plano. Denotemos por $s_0 = s_0(G)$ el conjunto de puntos de todos los cuadrados de rango nulo que están, junto con su frontera, en el conjunto $G$ y por $s_1 = s_1(G)$ el conjunto de los puntos de todos los cuadrados de primer rango que están en $G$ junto con su frontera. En general por $s_m = s_m(G)$ denotaremos el conjunto de todos los cuadrados de rango $m$ que están junto con su frontera en el conjunto $G$, $m = 0, 1, \dots$ Es evidente que (fig. 124)

$$s_0 \subset s_1 \subset \dots \subset s_m \subset \dots \subset G. \tag{31.1}$$

Los conjuntos $s_0, s_1, \dots, s_m, \dots$ son "polígonos" compuestos por un número finito o infinito de cuadrados del rango correspondiente. En el caso cuando $s_m$ está compuesto por un número finito de cuadrados, denotaremos el área del polígono $s_m$ por ar. $s_m$, si $s_m$ está compuesto por un número infinito de cuadrados, hacemos ar. $s_m = +\infty$. Si algún $s_m$ está compuesto por un número infinito de cuadrados, entonces todos los $s_m$ posteriores, $m \geqslant m_0$ también están compuestos por un número infinito de cuadrados.

De las inclusiones (31.1) en virtud del acuerdo sobre el símbolo $+\infty$ (véase el p. 3.1) se deduce que siempre

$$\text{ar.}\, s_0 \leqslant \text{ar.}\, s_1 \leqslant \dots \leqslant \text{ar.}\, s_m \leqslant \dots. \tag{31.2}$$

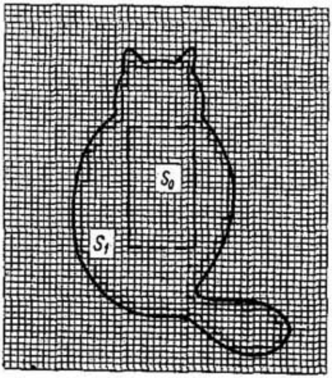


FIG. 124

Son posibles dos casos.

1. Todas las ar. $s_m$ son finitas, entonces (31.2) es una sucesión creciente monótonamente y por esto tiene o bien un límite finito o bien tiende a $+\infty$. Este límite en este caso se llama *área, o medida, del conjunto abierto G* y se denota por mes $G$*).

2. Si existe un número $m_0$ tal que ar. $s_{m_0} = +\infty$, entonces ar. $s_m = +\infty$ también para todos los números $m \geqslant m_0$. En este caso haremos

$$\text{mes}\, G = +\infty.$$

Por la definición de límite de una sucesión de elementos de la recta numérica extendida $\bar{R}$ (véase el p. 4.2) la sucesión de elementos $a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, que pertenecen al conjunto ampliado de los números reales $\bar{R}$ tales que comenzando desde cierto número todos son iguales a $+\infty$, tiene $+\infty$ en calidad de su límite $\lim a_n = +\infty$.
Utilizando este concepto ambos casos anteriormente analizados se pueden unir en uno. Enunciemos la definición final.

**Definición 1.** *El límite* $\lim\limits_{m \to \infty}$ ar.$s_m(G)$ *(finito o infinito) se llama área, o medida, del conjunto abierto G y se denota por* mes $G$:

$$\text{mes}\ G = \lim_{m \to \infty} \text{ar.}\, s_m(G). \tag{31.3}$$

Tal definición de medida de un conjunto abierto es natural, ya que la sucesión de conjuntos $s_m$, $m = 0, 1, \ldots$, agota el conjunto abierto, es decir,

---

*) Del vocablo francés mésure, medida, talla.

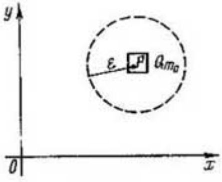



FIG. 125

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} s_m = G,$$

dicho de otro modo, para cualquier punto $P \in G$ existe el polígono $s_{m_0}$ tal que

$$P \in s_{m_0}.$$

En efecto, cualquiera que sea el punto $P \in G$, por ser el conjunto $G$ abierto, existe la circunferencia esférica $U(P; \varepsilon) \subset G$, $\varepsilon > 0$. Observando ahora que el diámetro del cuadrado de rango $m$ es igual a $\sqrt{2}/10^m$, escojamos $m_0$ de forma tal que

$$\frac{1}{10^{m_0}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}. \tag{31.4}$$

Para cualquier punto del plano existe al menos un cuadrado de cada rango que contiene este punto. Sea $Q_{m_0}$ un cuadrado de rango $m_0$ que contiene el punto $P$. En virtud de la desigualdad (31.4) $Q_{m_0} \subset U(P; \varepsilon)$ lo que significa que $Q_{m_0} \subset G$ y, por consiguiente, $Q_{m_0} \subset s_{m_0}$, pero $P \in Q_{m_0}$, por lo que $P \in s_{m_0}$ (fig. 125). $\square$

Si el conjunto abierto $G$ es acotado, entonces siempre mes $G < +\infty$. En realidad, si $G$ es acotado, entonces existe un cuadrado cerrado $Q$ que contiene el conjunto $G (G \subset Q)$ y que es una unión de cuadrados de rango nulo, entonces $s_m(G) \subset Q$ para cualquier $m = 0, 1, \dots$ y quiere decir que ar. $s_m(G) \leqslant$ ar. $Q$.

De esta forma la sucesión (31.2) está acotada superiormente y por lo tanto el límite (31.2) es finito.

**Problema 21.** Demuéstrese que la medida de un conjunto abierto plano no depende de la elección del sistema rectangular sobre el plano sobre el cual está ubicado.

Del curso de matemática elemental es conocido que en el caso cuando el conjunto abierto $S$ es un polígono, entonces su área, siendo por definición, el área del polígono cerrado $\overline{S}$, coincide con la medida definida por nosotros:

$$\text{ar.}\,\overline{S} = \text{ar.}\,S = \text{mes}\,S^{*)}.$$

---

*) Véase también el p. 44.2 (conjuntos cuadrables).

## 31.2. PROPIEDADES DE LA MEDIDA DE LOS CONJUNTOS ABIERTOS

**Teorema 1 (monotonía de la medida).** *Si $G$ y $\Gamma$ son conjuntos abiertos planos y*

$$G \subset \Gamma, \tag{31.5}$$

entonces

$$\operatorname{mes} G \leqslant \operatorname{mes} \Gamma. \tag{31.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos, como anteriormente, por $s_m(G)$ y por $s_m(\Gamma)$ los conjuntos de cuadrados de rango $m$ que se contienen junto con su frontera en los conjuntos $G$ y $\Gamma$, $m = 1, 2, \dots$, respectivamente. Entonces de la condición (31.5) se deduce que

$$s_m(G) \subset s_m(\Gamma),$$

de donde

$$\text{ar.}\, s_m(G) \leqslant \text{ar.}\, s_m(\Gamma). \tag{31.7}$$

En el caso cuando ambos conjuntos $s_m(G)$ y $s_m(\Gamma)$ están compuestos por un número finito de cuadrados esto se deduce de que el área del polígono que abarca no es menor que el área del polígono abarcado y en el caso cuando menos uno de los conjuntos $s_m(G)$ y $s_m(\Gamma)$ contiene un número infinito de cuadrados, del acuerdo sobre la utilización del símbolo $+\infty$.

Pasando al límite en la desigualdad (31.7) cuando $m \to \infty$ por (31.3) obtendremos la desigualdad (31.6). □

**Teorema 2.** *Sean $G$ y $G_k$, $k = 1, 2, \dots$, conjuntos planos abiertos* $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_k \subset \dots$ y $G = \bigcup\limits_{i=1}^{k} G_k$, entonces

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G. \tag{31.8}$$

Observemos que si para cierto $k_0$ tiene lugar $\operatorname{mes} G_k = +\infty$, entonces por el teorema 1, para todos los $k \geqslant k_0$ también $\operatorname{mes} G_k = +\infty$; en este caso la igualdad (31.8) significa que $\operatorname{mes} G = +\infty$.

Demostremos previamente un lema.

**Lema 1.** *Sean $G_k$, $k = 1, 2, \dots$, conjuntos abiertos planos,*

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_k \subset G_{k+1} \subset \dots \tag{31.9}$$

*y*

$$G = \bigcup_{i=1}^{k} G_k. \tag{31.10}$$

*Entonces si $X$ es compacto y*

$$X \subset G, \tag{31.11}$$

*pues existe un número $k_0$ tal que*

$$X \subset G_{k_0}. \tag{31.12}$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. De (31.10) y (31.11) se deduce que el sistema $\{G_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, forma un recubrimiento abierto del conjunto $X$. Por esto, según el teorema sobre los recubrimientos abiertos de un compacto (véase el teorema 4 en el p. 18.3) existe un recubrimiento finito $\{G_{k_1}, \ldots, G_{k_m}\}$ del conjunto $X$

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_{k_i}.$$

Denotemos por $k_0$ el mayor de los números $k_1, \ldots, k_m$. En virtud de la condición (31.9) tenemos la igualdad

$$\bigcup_{i=1}^{m} G_{k_i} = G_{k_0}.$$

Por consiguiente $X \subset G_{k_0}$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2. Previamente observemos que de la condición $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots$ se deduce (véase el teorema 1) que

$$\operatorname{mes} G_1 \leqslant \operatorname{mes} G_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{mes} G_k \leqslant \ldots, \tag{31.13}$$

por eso la sucesión $G_k$, $k = 1, 2, \ldots$, siempre tiene límite finito o igual a $+\infty$.

Analicemos dos casos.

1. Supongamos que todos los conjuntos $s_m(G)$, $m = 0, 1, \ldots$, están compuestos por un número finito de cuadrados. En este caso cada uno de los conjuntos $s_m(g)$ es un conjunto acotado y cerrado y, por consiguiente, compacto. Por esto, según el lema 1, para cada número $m$ existe el número $k_m$ tal que

$$s_m(G) \subset G_{k_m}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{31.14}$$

Además, escojamos $k_m$ de forma tal que $k_{m'} > k_m$ para $m' > m$. Esto siempre se puede hacer, por ejemplo, de la siguiente forma. Si están escogidos los números $k_1 < k_2 < \ldots < k_{m-1}$, y para el conjunto $s_m(G)$, por el lema 1, se ha hallado el conjunto $G_n$ tal que

$$s_m(G) \subset G_n, \tag{31.15}$$

entonces denotaremos por $k_m$ cualquier número natural tal que $k_m > k_{m-1}$ y $k_m \geqslant n$; entonces $G_n \subset G_{k_m}$ y quiere decir que $s_m(G) \subset G_{k_m}$. De esta forma la sucesión construida $k_m$, $m = 1, 2, \ldots$, es una subsucesión de la sucesión de los números naturales.

Denotemos ahora por $\mathring{s}_m(G)$ el conjunto de todos los puntos interiores del conjunto $s_m(G)$. Evidentemente $\mathring{s}_m(G)$ es un conjunto abierto y $\mathring{s}_m(G) \subset s_m(G) \subset G_{k_m}$ por eso en virtud del teorema 1

$$\operatorname{mes} \mathring{s}_m(G) \leqslant \operatorname{mes} G_{k_m}. \tag{31.16}$$

Por cuanto $G_k \subset G$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces por el mismo teorema 1

$$\operatorname{mes} G_{k_m} \leqslant \operatorname{mes} G. \tag{31.17}$$

Uniendo las desigualdades (31.16) y (31.17) obtendremos:

$$\operatorname{mes} s_m(G) = \operatorname{mes} \mathring{s}_m(G) \leqslant \operatorname{mes} G_{k_m} \leqslant \operatorname{mes} G.$$

Pasando al límite cuando $m \to \infty$ en esta desigualdad, tendremos

$$\lim_{m \to \infty} \operatorname{mes} G_{k_m} = \operatorname{mes} G,$$

ya que por (31.3): $\lim\limits_{m \to \infty} \operatorname{mes} s_m(G) = \operatorname{mes} G$.

La sucesión $\{\operatorname{mes} G_k\}$ como se señaló anteriormente, tiene límite finito o infinito, por eso coincide con el límite de cualquiera de sus subsucesiones, por consiguiente

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G,$$

es decir, se cumple la igualdad (31.8).

2. Supongamos que existe el conjunto $s_m(G)$ que contiene número infinito de cuadrados, entonces ar. $s_m(G) = +\infty$, por eso mes $G = +\infty$. Mostremos que en este caso

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = +\infty. \tag{31.18}$$

Sea dado $\varepsilon > 0$ y supongamos que $s_m(G)$ está compuesto por un conjunto infinito de cuadrados. El área de cada cuadrado de rango $m$ es igual a $\dfrac{1}{10^{2m}}$. Fijemos el número natural $n$ de forma tal que

$$n/10^{2m} > \varepsilon, \tag{31.19}$$

y escojamos de $s_m(G)$ $n$ cuadrados cualesquiera. Denotemos el conjunto de sus puntos por $D$. El conjunto $D$ es un polígono (es la unión de un número finito de cuadrados) y, por consiguiente, es un conjunto acotado y cerrado, es decir, un compacto, además

$$\text{ar.}\, D = \frac{n}{10^{2m}}. \tag{31.20}$$

Por el lema existe un número $k$ tal que

$$D \subset G_k. \tag{31.21}$$

Denotemos pos $\mathring{D}$ el conjunto de los puntos interiores del polígono $D$. De acuerdo con el teorema 1 y las fórmulas (31.19), (31.20) obtendremos

$$\operatorname{mes} G_k \geqslant \text{ar.}\, \mathring{D} = \text{ar.}\, D > \varepsilon.$$

En virtud de (31.13), para todos los $k' \geqslant k$

$$\operatorname{mes} G_k > \varepsilon.$$

Esto significa el cumplimiento de la condición (31.18). □

Como ejemplo de región plana no acotada que tiene medida infinita sirve la franja

$$G = \{(x, y) : 0 < y < 1\}.$$

Ella contiene en sí un conjunto infinito, por ejemplo, de cuadrados de primer rango y por lo tanto

$$\operatorname{mes} G = +\infty.$$

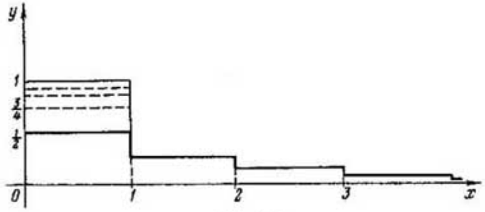



FIG. 126

Para construir un ejemplo de región no acotada con área finita obremos de la siguiente forma. Sea $Q$ un cuadrado unitario:

$$Q = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\},$$

Hagamos

$$G_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, \quad 0 < y < \frac{1}{2}\},$$

$$G_2 = G_1 \cup \{(x, y) : 1 \leqslant x < 2, \quad 0 < y < \frac{1}{4}\},$$

en general

$$G_{k+1} = G_k \cup \{x, y) : k \leqslant x < k + 1, \quad 0 < y < \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Cada conjunto $G_k$ es abierto (¿por qué?).

Gráficamente la formación de los conjuntos $G_k$ podemos representarla de la siguiente forma: $G_1$ es la mitad del cuadrado $Q$; para obtener $G_2$ se toma la mitad de la mitad restante de $Q$ y se une de la forma correspondiente a $G_1$, se obtiene $G_2$; más adelante la mitad de la parte restante del cuadrado $Q$ se une ya a $G_3$ (fig. 126), etc.

Evidentemente tenemos una cadena de inclusiones

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_k \subset \dots$$

y

$$\text{ar.}\, G_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^k}\,.$$

Hagamos $G_2 = \bigcup\limits_{k=1} G_k$.

El conjunto $G$ es abierto y no acotado. Hallemos, aplicando el teorema 2, su área:

$$\text{mes}\, G = \lim_{k \to \infty} \text{mes}\, G_k = \lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = 1.$$

La medida (volumen) de los conjuntos abiertos en el espacio tridimensional y en general $n$-dimensional ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$) se define con ayuda de una construcción análoga, sólo se debe, naturalmente, partir no de una partición del plano en cuadrados, sino de una partición del espacio en los cubos $n$-dimensionales correspondientes. Al caso $n$-dimensional también se trasladan los teoremas demostrados en este párrafo. Aún regresaremos al estudio de la medida en los capítulos futuros, véase el p. 44.1. En ese punto se desarrollarán más completamente las propiedades de la medida (por ejemplo, su comportamiento en la unión de conjuntos, la tal llamada aditividad de la medida), lo que se puede leer inmediatamente después del presente párrafo.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que el área de un rectángulo es igual al producto de sus lados.

2. Sea $G$ un cilindro recto circular, cuya base es el círculo $K$ y cuya altura tiene una longitud $h$. Demuéstrese que mes $G = h$ mes $K$ donde mes $G$ es la medida de $G$ en el espacio y mes $K$ es la medida de $K$ sobre el plano.

# § 32. ALGUNAS APLICACIONES GEOMÉTRICAS Y FÍSICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

## 32.1. CÁLCULO DE LAS ÁREAS

En este punto se deducirán las fórmulas para el cálculo de las áreas de algunas regiones planas. Además nos serviremos de las propiedades del área de las figuras planas más simples (polígonos, sectores) conocidas de la matemática elemental, por ejemplo, de que en la unión de tales figuras que no tengan puntos interiores comunes, sus áreas se suman. Además, esta afirmación será demostrada estrictamente en el p. 44.1.

**Teorema 1.** *Sea $f$ una función definida, no negativa y continua sobre el segmento $[a, b]$. Entonces el área $S$ del conjunto*

$$G = \{(x, y) : a < x < b, 0 < y < f(x)\}$$

*se expresa por la fórmula*

$$S = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{32.1}$$

El conjunto $G$ es un conjunto abierto y acotado. En efecto, su acotación se deduce de que la función $f$ siendo continua sobre el segmento $[a, b]$ es acotada sobre él.

Mostremos que el conjunto $G$ es abierto. Sea $(x_0, y_0) \in G$, entonces $0 < y_0 < f(x_0)$. Tomemos cualquier número $\eta > 0$ tal que $0 < y_0 - \eta < y_0 < y_0 + \eta < f(x_0)$. En virtud de la continuidad de la función $f$ en el punto $x_0$, existe $\delta > 0$ tal que para todas las $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se cumple la desigualdad $f(x) > y_0 + \eta$. Claro está que el entorno rectangular $P((x_0, y_0); \delta, \eta)$ pertenece al conjunto $G$, es decir, el punto $(x_0, y_0)$ es su punto interior.

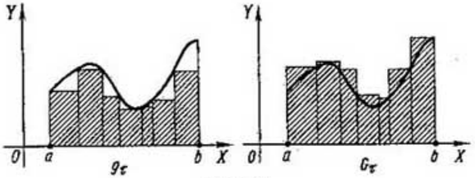



FIG. 127

La frontera del conjunto $G$ se contiene en la unión de la gráfica de la función $f$, del segmento $[a, b]$ del eje $Ox$ y de los segmentos $[0, f(a)]$ y $[0, f(b)]$ de las rectas $x = a$ $x = b$, respectivamente. Usualmente este conjunto se llama *trapecio curvilíneo* (véase la fig. 111) engendrado por la gráfica de la función $f$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ cierta partición del segmento $[a, b]$. Denotemos por $G_\tau$ y $g_\tau$ los polígonos cerrados compuestos por todos polígonos del tipo

$$G_{\tau,i} = \{(x, y) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \quad 0 \leqslant y \leqslant M_i, \quad i = 1, 2, \dots, k\},$$
$$g_{\tau,i} = \{(x, y) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \quad 0 \leqslant y \leqslant m_i, \quad i = 1, 2, \dots, k\},$$

donde $m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$.

De esta forma (fig. 127)

$$G_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} G_{\tau,i}, g_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} g_{\tau,i}. \tag{32.2}$$

Si denotamos por $\tilde{G}_\tau$ y $\tilde{g}_\tau$ el conjunto de los puntos interiores de los polígonos $G_\tau$ y $g_\tau$, entonces

$$\tilde{g}_\tau \subset G \subset \tilde{G}_\tau. \tag{32.3}$$

Si $S_\tau$ y $s_\tau$ son las sumas superior e inferior de Darboux respectivamente de la función $f$ sobre el segmento $[a, b]$, correspodientes a su partición $\tau$, entonces es evidente que ar. $\tilde{g}_\tau = s_\tau$, ar. $\tilde{G}_\tau = S_\tau$. Por esto, de (32.3), por la monotonía de la medida, se deduce que

$$s_\tau \leqslant \operatorname{mes} G \leqslant S_\tau. \tag{32.4}$$

Por cuanto

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{32.5}$$

entonces

$$\operatorname{mes} G = \int_a^b f(x)\,dx. \ \square$$

Como es conocido (véase el p. 27.4)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\,dx$$

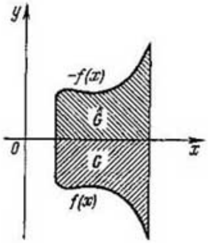



FIG. 128

por eso en virtud de la fórmula (32.1)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \operatorname{mes} G.$$

De esta forma, las sumas integrales de Riemann y las sumas de Darboux geométricamente son iguales al valor aproximado del área del trapecio cuvilíneo analizado y además, se alcanza cualquier exactitud con la elección de una finura suficiente de la partición $\tau$ y el límite de las sumas integrales es igual al valor verdadero del área indicada.

Sea ahora $f$ una función continua y no positiva sobre el segmento $[a, b]$. Hagamos en este caso

$$G = \{(x, y) : a < x < b, f(x) < y < 0\}.$$

Sea $\hat{G}$ el conjunto simétrico al conjunto $G$ respecto al eje $Ox$*) (fig. 128), entonces

$$\operatorname{mes} \hat{G} = \operatorname{mes} G. \tag{32.6}$$

En el caso analizado la función $-f$ es no negativa sobre el segmento $[a, b]$ por lo que

$$\operatorname{mes} \hat{G} = \int_a^b [-f(x)]\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx. \tag{32.7}$$

Comparando (32.6) y (32.7) obtendremos

$$\operatorname{mes} G = -\int_a^b f(x)\, dx,$$

es decir, aquí la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ es igual al valor del área del trapecio curvilíneo $G$ salvo el signo.

---

*) Esto significa que $\hat{G} = \{(x, y) : (x, -y) \in G\}$.

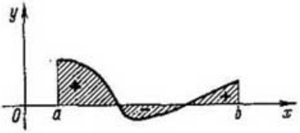



FIG. 129

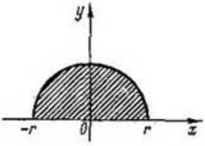



FIG. 130

Si la función $f$ cambia de signo sobre el segmento $[a, b]$ en un número finito de puntos, entonces la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual a la suma algebraica de las áreas de los trapecios curvilíneos correspondientes, acotados por partes de la gráfica de la función $f$, segmentos del eje $Ox$ y podría ser por segmentos paralelos al eje $Oy$ (fig. 129).

Como se ve, uno de los problemas que de forma natural nos lleva al concepto de integral definida es el problema del cálculo de las áreas. El aparato desarrollado del cálculo integral da un método general y único para el cálculo de las áreas de diversas figuras planas.

Ejemplos. 1. Hallemos el área $S$ del círculo de radio $r$. Coloquemos el origen de coordenadas en el centro del círculo indicado. Entonces la ecuación de la semicircunferencia que está en el semiplano superior, tiene la forma $y = \sqrt{r - x^2}$ (fig. 130). Por esto el área del semicírculo de radio $r$ se calcula, de acuerdo con el teorema 1, según la fórmula (32.1)

$$S = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = r^2 \int_0^{\pi} sen^2 t\,dt = r^2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}\,dt = \frac{\pi r^2}{2}$$

(en el cálculo de la integral se hizo el cambio de variable $x = r \cos t$), de donde el área del círculo buscada es igual a $\pi r^2$.

De forma semejante se halla también el área $S_\varphi$ del sector del círculo (de radio $r$) correspondiente al ángulo central $\varphi$. Considerando para simplificar que $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ tenemos (fig. 131).:

$$S_\varphi = \int_0^{r\cos\varphi} x \operatorname{tg}\varphi\,dx + \int_{r\cos\varphi}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \left.\frac{x^2 \operatorname{tg}\varphi}{2}\right|_0^{r\cos\varphi} + r^2 \int_0^{\varphi} \frac{1 - \cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{r^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{2} + \frac{r^2\varphi}{2} - \frac{r^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{4} = \frac{r^2\varphi}{2}.$$

2. Hallemos el área $S$ acotada por el eje $Ox$ y un arco de la senusoide (fig. 132)

$$S = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 2.$$

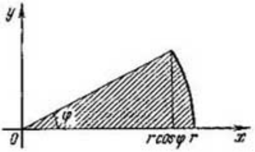



FIG. 131

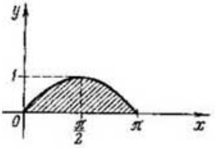



FIG. 132

Aquí, como se hará siempre en el futuro, hablando de una región acotada por cierta curva que es un contorno simple cerrado (véase el p. 16.1) tendremos en cuenta la región acotada cuya frontera es el contorno dado. Cualquier región no acotada cuya frontera es un contorno semejante se llamará exterior (para el contorno dado). En el caso analizado el contorno externo es el "exterior" de la región rayada en la fig. 132. La región exterior siempre tiene área infinita. En efecto, cualquier curva es acotada (véase el p. 16.3), por eso en la región exterior de cualquier contorno simple se contiene, por ejemplo, un cuadrado con lado todo lo grande que se desea. De aquí se deduce inmediatamente que el área de la región exterior es infinita.

3. Hallemos el área $S$ acotada por la hipérbola $y = 1/x$, el eje $Ox$, el segmento de recta $x = 1$ y el segmento de la recta que pasa por el punto del eje $Ox$ con abscisa igual a $x$ y paralela al eje de las ordenadas (fig. 133):

$$S = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln \Big|_1^x = \ln x.$$

4. Calculemos el área acotada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Por cuanto la semielipse que se encuentra por encima del eje de las abscisas se describe por la ecuación $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, entonces para la cuarta del área $S$ buscada tenemos (véase el ejemplo 5 en el p. 22.3 o el ejemplo 1 en el p. 22.4):

$$\frac{1}{4} S = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a}{b} \left[\frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right]_0^a = \frac{ab\pi}{4},$$

de donde $S = \pi ab$.

5. La desigualdad (20.50) demostrada en el p. 20.8 tiene un simple sentido geométrico. Analicemos la curva $y = x^{p-1}$ o lo que es lo mismo $x = y^{q-1}$, donde $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (véanse (20.55) y (20.56)). Escojamos arbitrariamente $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$ y calculemos las áreas $S_1$ y $S_2$ (fig. 134):

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1}\, dx = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b y^{q-1}\, dy = \frac{b^q}{q}.$$

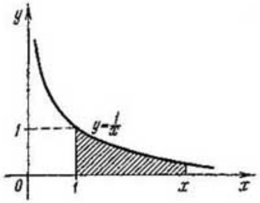



FIG. 133

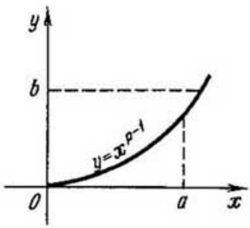



FIG. 134

Geométricamente está claro que el área del rectángulo con lados $a$ y $b$ no sobrepasa la suma $S_1 + S_2$, es decir, $ab \leqslant S_1 + S_2$ o más detalladamente.

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1$$

y ésta es la desigualdad (20.50). Además, es evidente que $ab = S_1 + = S_2$ si y sólo si $b = a^{p-1}$.

Hallemos ahora la fórmula para el área de un sector de curva dada con una ecuación que relaciona sus cooredenadas polares: $\rho = \rho(\varphi)$, donde $\rho = \rho(\varphi)$ es una función no negativa, continua sobre el segmento $[\alpha, \beta]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2\pi$. Sea $G$ un conjunto abierto cuya frontera está compuesta por la curva $\widehat{AB}$, descirta en coordenadas polares por la ecuación $\rho = \rho(\varphi)$, y, podría ser, por los segmentos $OA$ y $OB$ de los rayos $\varphi = \alpha$ y $\varphi = \beta$ (fig. 135), $G = \{(\rho, \varphi)\colon \alpha < \varphi < \beta, 0 < \rho < \rho(\varphi)\}$.

Sea $\tau = \{\varphi_i\}_{i=0}^{i=k}$ cierta partición del segmento $[\alpha, \beta]$. Hagamos

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}, \quad m_i = \inf_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} \rho(\varphi), \quad M_i = \sup_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} \rho(\varphi),$$

$$g_{i,\tau} = \{(\rho, \varphi)\colon \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant m_i\},$$
$$G_{i,\tau} = \{(\rho, \varphi)\colon \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant M_i\}.$$

Inscribamos en el conjunto $G$ y circunscribámoslo las figuras escalonadas $g_\tau$ y $G_\tau$ compuestas por los sectores circulares $g_{i\tau}$ y $G_{i\tau}$, $i = 1, 2, \dots, k$:

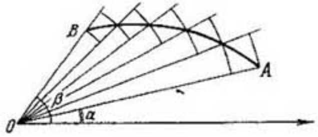



FIG. 135

$$g_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} g_{i,\tau}, \quad G_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} G_{i,\tau}.$$

Denotemos por $\mathring{g}_\tau$ y $\mathring{G}_\tau$ los conjuntos de todos los puntos interiores de los conjuntos $g_\tau$ y $G_\tau$. Es evidente que $\mathring{g}_\tau$ y $\mathring{G}_\tau$ son conjuntos abiertos y $\mathring{g}_\tau \subset G \subset \mathring{G}_\tau$ por eso según la propiedad de monotonía del área

$$\text{ar.}\, \mathring{g}_\tau \leqslant \text{mes}\, G \leqslant \text{ar.}\, \mathring{G}_\tau.$$

Pero ar. $\mathring{g}_\tau$ = ar. $g_\tau$, ar. $\mathring{G}_\tau$ = ar. $G_\tau$, por consiguiente

$$\text{ar.}\, g_\tau \leqslant \text{mes}\, G \leqslant \text{ar.}\, G_\tau. \tag{32.8}$$

Las áreas de los sectores circulares $g_{i,\tau}$ y $G_{i,\tau}$ son iguales respectivamente a $\frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i$ y $\frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i$. De la matemática elemental es conocido que en la unión de figuras planas sus áreas se suman (véase sobre esto también en el p. 44.1), quiere decir que

$$\text{ar.}\, g_\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} m_i^2 \Delta\varphi_i, \quad \text{ar.}\, G_\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

De estas igualdades se ve que ar. $g_i$ y ar. $G_\tau$ son respectivamente las sumas inferior y superior de Darboux para la función $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ sobre el segmento $[\alpha, \beta]$: $s_\tau$ = ar. $g_\tau$, $S_\tau$ = ar. $G_\tau$ por consiguiente

$$s_\tau \leqslant \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi \leqslant S_\tau.$$

Restando esta desigualdad de la desigualdad (32.8) transcrita en la forma $S_\tau \geqslant \text{mes}\, G \geqslant s_\tau$ obtendremos

$$s_\tau - S_\tau \leqslant \text{mes}\, G - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

De aquí pasando al límite cuando $\delta_\tau \to 0$ tenemos

$$\text{mes}\, G = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi. \; \square \tag{32.9}$$

En calidad de ejemplo hallemos el área $S$ de la figura acotada por la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (véase el p. 17.5) que está representada en la fig. 136. Por la fórmula (32.9) obtendremos

$$S = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi +$$

$$+ a^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

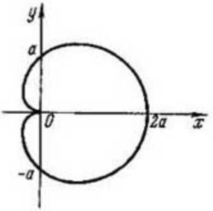



FIG. 136

## 32.2. VOLUMEN DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN

Al final del p. 31.2 se señaló que el concepto de volumen en el espacio se reduce al concepto análogo de área sobre el plano. Deduzcamos la fórmula para el cálculo de los volúmenes de los cuerpos de revolución.

**Teorema 2.** *Sean la función $f(x) \geqslant 0$ continua sobre el segmento $[a, b]$ y $Q$ el cuerpo obtenido con la rotación del trapecio curvilíneo $G$ engendrado por la gráfica de la función $f$. Enonces para su volumen* mes $Q$ *es válida la fórmula*

$$\operatorname{mes} Q = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{32.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por $q_\tau$ y $Q_\tau$ los cuerpos formados por la rotación alrededor del eje $Ox$ de las figuras escalonadas $g_\tau$ y $\bar{G}_\tau$ (véase la demostración del teorema 1). De la inclusión (32.3) se deduce que $q_\tau \subset Q \subset Q_\tau$ y por esto

$$\operatorname{mes} q_\tau \leqslant \operatorname{mes} Q \leqslant \operatorname{mes} Q_\tau. \tag{32.11}$$

Los volúmenes $v_\tau$ y $V_\tau$ de los conjuntos $q_\tau$ y $Q_\tau$ son iguales a las sumas de los volúmenes de los cilindros formados por la rotación de los rectángulos $g_{\tau,i}$ y $G_{\tau,i}$ (fig. 137):

$$v_\tau = \operatorname{mes} q_\tau = \sum_{i=1}^{k} \pi m_i^2 \Delta x_i,$$

$$V_\tau = \operatorname{mes} Q_\tau = \sum_{i=1}^{k} \pi M_i^2 \Delta x_i.$$

De estas igualdades se ve que $v_\tau$ y $V_\tau$ son las sumas inferior y superior de Darboux de la función $\pi f^2(x)$ y ya que la función $f^2$ es continua y por consiguiente integrable, entonces

$$v_\tau \leqslant \pi \int_a^b f^2(x)\, dx \leqslant V_\tau. \tag{32.12}$$

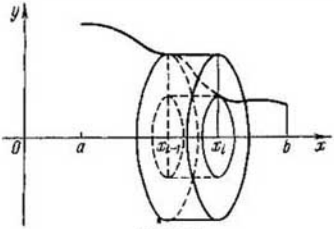



FIG. 137

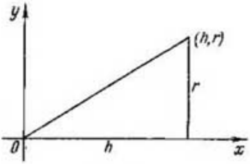



FIG. 138

y
$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [V_\tau - v_\tau] = 0. \tag{32.13}$$

De las desigualdades (32.11) y (32.12) se deduce que

$$v_\tau - V_\tau \leqslant \pi \int_a^b f^2(x)\,dx - \operatorname{mes} Q \leqslant V_\tau - v_\tau,$$

de donde por (32.13) se deriva la fórmula (32.10). □

Ejemplo. 1. Hallemos el volumen $V$ de una bola de radio $r$. Analizando esta bola como un cuerpo formado por la rotación de la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$ alrededor del eje $Ox$ (véase la fig. 96), por la fórmula (32.10) obtendremos:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi r^2 x \Big|_{-r}^{r} - \frac{\pi x^3}{3}\Big|_{-r}^{r} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2. Hallemos el volumen $V$ del cono circular recto con altura igual a $h$ y radio de la base $r$. Analizando el cono indicado como un cuerpo obtenido con la rotación del triángulo con vértices en los puntos $(0, 0)$, $(h, 0)$ y $(h, r)$, alrededor del eje $Ox$ (fig. 138), es decir, con la rotación del "trapecio curvilíneo" engendrado por la gráfica de la función $y = \frac{r}{h}x$, $0 \leqslant x \leqslant h$, obtendremos por la fórmula (32.10)

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{\pi r^2 x^3}{3h^2}\Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

3. Hallemos el volumen $V$ del cuerpo obtenido con la rotación alrededor del eje $Ox$ del trapecio curvilíneo engendrado por la gráfica de la función $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $-b \leqslant x \leqslant b$, llamada *catenaria* (fig. 139). Según la fórmula (32.10) tenemos

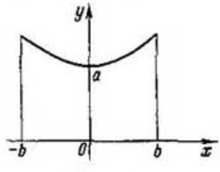


FIG. 139

$$V = \pi a^2 \int_{-b}^{b} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}\, dx = \frac{\pi a^2}{2} \int_{-b}^{b} \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{\pi a^2 x}{2} + \frac{\pi a^3}{4} \operatorname{sh} \frac{2x}{a}\right]_{-b}^{b} = \pi a^2 b + \frac{\pi a^3}{2} \operatorname{sh} \frac{2b}{a}.$$

De los ejemplos analizados en este párrafo ya se ve claramente la fuerza y generalidad de los métodos del cálculo integral: con un método único se obtienen rápida y simplemente las fórmulas para las áreas y volúmenes tanto conocidas anteriormente del curso de matemática elemental como otras completamente nuevas. En los puntos siguientes analizaremos una serie de problemas más, que se resuelven también fácilmente aplicando los métodos del cálculo integral.

## 32.3. CÁLCULO DE LA LONGITUD DE CURVA

Hemos analizado una serie de problemas que llevan al concepto de integral definida. Todos ellos tienen en común que en ellos el hallar el valor de alguna magnitud nos llevaba a la definición del límite de cierta suma integral cuando la finura de la partición tendía a cero, es decir, a una integral definida.

Existe, no obstante, otro grupo de problemas que nos llevan al concepto de integral definida. En ellos es conocida la velocidad de variación de una magnitud respecto a otra y se exige hallar la primera magnitud, más exactamente, se da la derivada de una función y se exige hallar la propia función, es decir, a partir de una función dada hallar una de sus primitivas. Este problema también se resuelve con ayuda de la integral definida ya que tal primitiva es, por ejemplo, la integral definida con límite superior variable. En calidad de ejemplo de semejante problema analicemos el cálculo de la longitud del arco de una curva.

Sea dada la curva $\Gamma$ paramétricamente por la representación vectorial

$$r = r(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

donde la función $r(t)$ es continuamente diferenciable sobre el segmento $[a, b]$. Entonces, como sabemos, la curva $\Gamma$ es rectificable y la variable longitud del arco $s(t)$ calculada desde el punto origen (su radio vector es $r(a)$) de la curva $\Gamma$ es también una función continuamente diferenciable del parámetro $t$ sobre el segmento $[a, b]$, además (véase el p. 16.3)

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|.$$

Por esto, según la fórmula de Newton — Leibniz, observando que $s(a) = 0$ para la longitud $S = s(b)$ de la curva $\Gamma$ obtendremos

$$S = s(b) - s(a) = \int_a^b \frac{ds}{dt}\, dt,$$

de donde

$$S = \int_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt.$$

Si $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces

$$S = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt. \tag{32.14}$$

En el caso cuando la curva $\Gamma$ es la gráfica de la función continuamente diferenciable $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, la fórmula (32.14) toma la forma

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{32.15}$$

Ejemplos. 1. Hallemos la longitud $S$ del arco de la parábola $y = ax^2$, $0 \leqslant x \leqslant b$. Observando que $y' = 2ax$, por la fórmula (32.15) tenemos

$$S = \int_0^b \sqrt{1 + 4a^2x^2}\, dx. \tag{32.16}$$

La integral indefinida $I = \int \sqrt{1 + 4a^2x^2}\, dx$ calculémosla de la siguiente forma: integrémosla inicialmente por partes, luego sumemos y restemos la unidad al numerador de la función obtenida bajo el signo de la integral; efectuemos la división e integremos (sustituyendo $y = 2ax$) la fracción obtenida:

$$I = \int \sqrt{1 + 4a^2x^2}\, dx = x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - \int \frac{4a^2x^2}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - \int \sqrt{1 + 4a^2x^2}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - I + \frac{1}{2a} \ln |2ax + \sqrt{1 + 4a^2b^2}|.$$

Esta igualdad analizada como una ecuación respecto a la integral $I$ da la posibilidad de hallar su valor:

$$I = \frac{1}{2} x\sqrt{1 + 4a^2x^2} + \frac{1}{4a} \ln |2ax + \sqrt{1 + 4a^2x^2}| + C.$$

Ahora es fácil obtener la mangitud de la integral (32.16):

$$S = \frac{1}{2} b\sqrt{1 + 4a^2b^2} + \frac{1}{4a} \ln |2ab + \sqrt{1 + 4a^2b^2}|$$

2. Hallemos la longitud de la astroide $x = a\cos^3 t$ $y = a \operatorname{sen}^3 t$ (véase la fig. 84). La astroide es simétrica respecto al origen de coordenadas. A la parte de ésta que está en el primer cuadrante le corresponde la variación del parámetro $t$ desde 0 hasta $\pi/2$. Calculemos la longitud $S$ de esta parte (igual, evidentemente, a una cuarta de la longitud de toda la astroide). Observando que

$$x' = -3a\cos^2 t \operatorname{sen} t, \quad y' = 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t,$$

según la fórmula (32.14) (en la cual se debe hacer $z' = 0$) obtendremos:

$$S = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 9a^2 \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t}\, dt = \frac{3a}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t\, dt = \frac{3a}{2}.$$

De esta forma, la longitud de toda la astroide es igual a $6a$.

3. Hállese la longitud $S$ del arco de la elipse $x = a \operatorname{sen} t, y = b \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi, 0 < b \leqslant a$ desde el extremo superior del semieje menor hasta el punto correspondiente al valor del parámetro $t \in [0, 2\pi]$. Hagamos $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ($\varepsilon$ es la excentricidad de la elipse) entonces

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 t}$$

por eso

$$S = a \int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt, \quad 0 \leqslant \varepsilon < 1. \tag{32.17}$$

Obtuvimos una integral elíptica de segundo orden la cual como es conocido (véase el p. 26.6) no se expresa a través de funciones elementales, es decir, la fórmula (32.17) en el caso dado es la respuesta final. Los valores aproximados de las longitudes de los arcos de la elipse se pueden obtener o bien directamente calculando aproximadamente la integral (32.17) o bien sirviéndonos de las tablas existentes de los valores de las integrales elípticas.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que si una curva plana está dada en coordenadas polares por una representación continuamente diferenciable $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, entonces para su longitud $S$ es válida la fórmula

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi. \tag{32.18}$$

2. Hállese la longitud del arco de la *espiral logarítmica* $r = ae^{b\varphi}$ desde el punto $(\varphi_0, r_0)$ hasta el punto $(\varphi, r)$.

La fórmula integral para la longitud de una curva permite expresar su longitud no sólo como la cota superior de las longitudes de todas las posibles quebradas inscritas, sino como su límite a condición de que las finuras de las particiones correspondientes tienden a cero. Para demostrar esto necesitamos un lema.

**Lema.** *Sean* $\gamma = \{r = r(s), 0 \leqslant s \leqslant S\}$ *una curva continuamente diferenciable en* $R^3$, *s su variable longitud del arco y* $\Delta r = r(s + \Delta s) - r(s)$. *Entonces la relación* $\left|\frac{\Delta r}{\Delta s}\right|$ *tiende a la unidad, cuando* $\Delta s \to 0$, *uniformemente sobre el segmento* $[0, S]$. *Esto significa que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para cualquier punto* $s \in [0, S]$ *y para cualquier incremento* $\Delta s (s + \Delta s \in [0, s])$ *que satisface la condición* $|\Delta s| < \delta$ *se cumple la desigualdad*

$$\left|\left|\frac{\Delta r}{\Delta s}\right| - 1\right| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario, es decir, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ existe el punto $s_\delta \in [0, S]$ y el incremento $\Delta s_\delta$, $|\Delta s_\delta| < \delta$, tales que para $\Delta r_\delta = r(s_\delta + \Delta s_\delta) - r(s_\delta)$ se cumple la desigualdad

$$\left|\left|\frac{\Delta r_\delta}{\Delta s_\delta}\right| - 1\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Tomaremos la sucesión $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, y además los puntos correspondientes $s_\delta$ y los incrementos $\Delta s_\delta$ los denotaremos por $s_n$ y $\Delta s_n$. Entonces para todos los números naturales $n$ se cumplirán las desigualdades

$$\left|\left|\frac{\Delta r_n}{\Delta s_n}\right| - 1\right| \geqslant \varepsilon_0, \quad |\Delta s_n| < \frac{1}{n},$$

donde $\Delta r_n = r(s_n + \Delta s_n) - r(s_n)$.

Extraigamos de la sucesión $\{s_n\}$ la subsucesión convergente $\{s_{n_k}\}$, entonces $s_0 \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{k \to \infty} s_{n_k} \in [0, S]$. Por la continuidad de la derivada $r'(s)$ en el punto $s_0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que para $|s - s_0| < \delta_0$ es válida la desigualdad

$$|r'(s) - r'(s_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

o lo que es lo mismo

$$r'(s) = r'(s_0) + \alpha(s), \quad |\alpha(s)| < \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{cuando} \quad |s - s_0| < \delta, \quad s \in [0, S].$$

Escojamos ahora un natural $k_0$ de forma tal que tengan lugar las desigualdades

$$|s_{n_{k_0}} - s_0| < \frac{\delta_0}{2}, \quad \frac{1}{n_{k_0}} < \frac{\delta_0}{2};$$

entonces observando que de acuerdo con la elección de los incrementos $\Delta s_n$ se cumple la desigualdad $|\Delta s_{n_{k_0}}| < \frac{1}{n_{k_0}}$, tenemos $|\Delta s_{n_{k_0}}| < \frac{\delta_0}{2}$. Por consiguiente, para todos los $s$ sobre el segmento con extremos en los puntos $s_{n_{k_0}}$ y $s_{n_{k_0}} + \Delta s_{n_{k_0}}$ tendremos

$$|s - s_0| \leqslant |s - s_{n_{k_0}}| + |s_{n_{k_0}} - s_0| < |\Delta s_{n_{k_0}}| + \frac{\delta_0}{2} < \delta_0.$$

Por esto, observando que $|r'(s_0)| = 1$ y que

$$\Delta r_{n_{k_0}} = r(s_{n_{k_0}} + \Delta s_{n_{k_0}}) - r(s_{n_{k_0}}) = \int_{s_{nk_0}}^{s_{nk_0} + \Delta s_{nk_0}} r'(s)\, ds =$$

$$\int_{s_{nk_0}}^{s_{nk_0} + \Delta s_{nk_0}} [r'(s_0) + \alpha(s)]\, ds = r'(s_0)\Delta s_{n_{k_0}} + \int_{s_{nk_0}}^{s_{nk_0} + \Delta s_{nk_0}} \alpha(s)\, ds,$$

obtendremos

$$\left|\left|\frac{\Delta r_{n_{k_0}}}{\Delta s_{n_{k_0}}}\right| - 1\right| = \left|\left|r'(s_0) + \frac{1}{\Delta s_{n_{k_0}}} \int_{s_{nk_0}}^{s_{nk_0} + \Delta s_{nk_0}} \alpha(s)\, ds\right| - |r'(s_0)|\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{|\Delta s_{n_{k_0}}|} \int_{s_{nk_0}}^{s_{nk_0} + \Delta s_{nk_0}} |\alpha(s)|\, ds\right| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0.$$

Esto contradice la suposición hecha. □

**Teorema 3.** *Sea* $n\gamma = \{r = r(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ *una curva continuamente diferenciable en* $R^3$, $s$, *su variable longitud del arco*, $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ *una partición del segmento* $[0, S]$, $\lambda_\tau = \sum_{i=1}^{k} |r(s_i) - r(s_{i-1})|$, *entonces*

$$S = \lim_{\delta_\tau \to 0} \lambda_\tau.$$

Aquí $\lambda_\tau$ es evidentemente la longitud de la quebrada con vértices en los puntos $r(s_i)$, $i = 0, 1, 2, \cdots, k$ inscrita en la curva $\gamma$.

DEMOSTRACION. Hagamos $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, $\Delta r_i = r(s_i) - r(s_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots, k$. Observando que $s = \sum_{i=1}^{k} \Delta s_i$ y $\lambda_\tau = \sum_{i=1}^{k} |\Delta r_i|$ obtendremos
$|S - \lambda_\tau| =$

$$= \left|\sum_{i=1}^{k} \Delta s_i - \sum_{i=1}^{k} |\Delta r_i|\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \left|1 - \left|\frac{\Delta r_i}{\Delta s_i}\right|\right| \Delta s_i.$$

Según el lema, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si sólo $|\Delta s_i| < \delta$ entonces tiene lugar la desigualdad

$$\left| \left| \frac{\Delta r_i}{\Delta s_i} \right| - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{S}.$$

Por esto para cualquier partición $\tau$ de finura $\delta_\tau < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|S - \lambda_\tau| < \frac{\varepsilon}{S} \sum_{i=1}^{k} \Delta s_i = \varepsilon.$$

Esto significa que $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \lambda_\tau = S$. □

### 32.4. AREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

El concepto de superficie y de su área será estudiado especialmente en el § 50. Aquí nos limitaremos al caso especial de las superficies formadas por la rotación de curvas alrededor de algunos ejes. Como siempre supondremos que en el espacio $R^3$ está fijado un sistema rectangular de coordenadas cartesianas.

Sean $\gamma = \{r = r(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ una curva en el semiplano $y > 0$ del plano de las variables $x, y$; $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=k}$, una partición del segmento $[a, b]$. Inscribamos en la curva $\gamma$ la quebrada con vértices en los puntos $r(t_i) = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ (fig. 140). Cuando el eslabón $\Delta r_i = r(t_i) - r(t_{i-1})$ de esta quebrada gira alrededor del eje $Ox$ se obtiene la superficie de un cono truncado (en particular, tal vez de un cilindro) con área

$$l_i = \pi(y_{i-1} + y_i)|\Delta r_i|$$

y cuando gira toda la quebrada, una superficie con área

$$L_\tau = \sum_{i=1}^{k} l_i = \pi \sum_{i=1}^{k} (y_{i-1} + y_i)|\Delta r_i|.$$

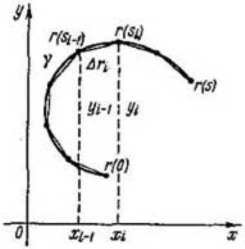



FIG. 140

**Definición 1.** *Si existe el límite* $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} L_\tau$, *entonces se llama área L de la superficie formada por la rotación de curva* $\gamma$ *alrededor del eje Ox.*

De esta forma

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta_\tau \to 0} L_\tau. \tag{32.19}$$

**Teorema 4.** *Sea* $\gamma = \{r = r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ *una curva continuamente diferenciable sin puntos singulares, que está en el semiplano* $y > 0$ *del plano de las variables* $x, y$. *Entonces para el área L de la superficie obtenida con la rotación de la curva* $\gamma$ *alrededor del eje de las* $x$, *es válida la fórmula*

$$L = 2\pi \int_a^b y\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt = 2\pi \int_0^S y(s)\, ds, \tag{32.20}$$

*donde* $s$ *es la variable longitud del arco de la curva* $\gamma$, $0 \leqslant s \leqslant S$.

DEMOSTRACIÓN. Como es conocido, en las suposiciones hechas en el teorema (véase el p. 16.5), la función $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es una transformación admisible del parámetro y por consiguiente la longitud del arco $s$ puede ser tomada por parámetro:

$$\gamma = \{r = r(s) = (x(s), y(s)),\ 0 \leqslant s \leqslant S\}.$$

Sea $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ una partición del segmento $[0, S]$,

$$\Delta r_i = r(s_i) - r(s_{i-1}),\quad \Delta s_i = s_i - s_{i-1},\quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Comparemos la suma

$$L_\tau = \pi \sum_{i=1}^{k} (y_{i-1} + y_i)|\Delta r_i|,\quad y_i \stackrel{\text{def}}{=} y_i(s),\quad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{32.21}$$

con la suma integral (de la función $2\pi y(s)$)

$$\sigma_\tau = 2\pi \sum_{i=1}^{k} y_i\, \Delta s_i. \tag{32.22}$$

Para esto observemos que la función $y(s)$ siendo continua sobre el segmento $[0, S]$ es acotada sobre él, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que para todos los $s \in [0, S]$ se cumple la desigualdad $|y(s)| \leqslant M$. Denotando por $\omega(\delta, y)$ el módulo de continuidad de la función $y(s)$ y por $\lambda_\tau$ la longitud de la quebrada con vértice en los puntos $r(s_i)$ y observando que $|\Delta r_i| \leqslant \Delta s$, $i = 1, 2, \ldots, k$, obtendremos

$$\begin{aligned} |\sigma_\tau - L_\tau| &= \left|\pi \sum_{i=1}^{k} 2y_i\Delta s_i - \pi \sum_{i=1}^{k} [2y_i + (y_{i-1} - y_i)]|\Delta r_i|\right| \leqslant \\ &\leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{k} |y_i|(\Delta s_i - |\Delta r_i|) + \pi \sum_{i=1}^{k} |y_i - y_{i-1}||\Delta r_i| \leqslant \\ &\leqslant 2\pi M\left(\sum_{i=1}^{k} \Delta s_i - \sum_{i=1}^{k} |\Delta r_i|\right) + \pi\omega(\delta_\tau; y)\sum_{i=1}^{k} |\Delta r_i = \\ &= 2\pi M(S - \lambda_\tau) + \pi\omega(\delta_\tau; y)\lambda_\tau. \end{aligned}$$

Aquí $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S - \lambda_\tau) = 0$ (véase el teorema 3), $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \omega(\delta_\tau, y) = 0$ (véase el teorema 5 en el p. 19.6) y $0 \leqslant \lambda_\tau \leqslant S$. Por esto $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (\sigma_\tau - L_\tau) = 0$ y ya que $\lim \sigma_\tau = 2\pi\int\limits_0^S y(s)\,ds$, entonces $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} L_\tau = 2\pi\int\limits_0^S y(s)\,ds$ también. Haciendo el cambio de variable $s = s(t)$ en la última integral y recordando que $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$ obtendremos

$$L = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt. \ \square$$

Si curva $\gamma$ está dada por la ecuación explícita $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, entonces la fórmula para el área de la superficie formada con la rotación de la gráfica de la función $f$ alrededor del eje $Ox$ tiene la forma

$$L = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{32.23}$$

Recordando que (véase el p. 16.4) $\sqrt{1 + y'^2}\,dx = ds$, la fórmula (32.23) se puede transcribir en la forma

$$L = 2\pi\int\limits_0^S y\,ds.$$

La deducción presentada de la fórmula (32.20) tiene cierto defecto ya que durante esta deducción ya se utilizó el concepto de área de superficie y su aditividad, claro, sólo en el caso más simple, o sea, para las superficies del cono truncado y sus uniones. Se puede introducir el concepto general de área de una superficie sin utilizar el concepto de área de una superficie para cualesquiera superficies elementales y obtener sus propiedades necesarias. Estas cuestiones serán analizadas en el futuro en el p. 50.5.

Ejemplos. 1. Hallemos el área $S$ de la esfera de radio $r$. La esfera indicada puede ser obtenida por la rotación de la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$ alrededor del eje $Ox$. No obstante esta representación explícita de la semicircunferencia no es continuamente diferenciable: la derivada $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ se hace infinita cuando $x = \pm r$. Es mucho más cómodo tomar la representación paramétrica de la semicircunferencia

$$x = r\cos t, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Entonces $x' = -r\,\mathrm{sen}\,t$, $y' = r\cos t$, por eso el área $S$ de la superficie de la esfera de radio $r$ se calcula fácilmente de acuerdo con la fórmula (32.20):

$$S = \int\limits_0^\pi y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = 2\pi r^2\int\limits_0^\pi \mathrm{sen}\,t\,dt = 4\pi r^2.$$

2. Hallemos el área $S$ de la superficie formada por la rotación alrededor del eje $Ox$ del arco de la catenaria (véase la fig. 119) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $-b \leqslant x \leqslant b$ (esta superficie se llama *catenoide*). Por la fórmula (32.23) tenemos:

$$S = 2\ \ a \int_{-b}^{b} \operatorname{ch} \frac{x}{a} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}\, dx =$$

$$= 2\pi a \int_{-b}^{b} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}\, dx = \pi a \int_{-b}^{b} \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a}\right) dx\ \pi a \left(2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a}\right).$$

## 32.5. TRABAJO DE UNA FUERZA

Supongamos que el punto material $M$ se mueve por la curva continuamente diferenciable $\Gamma = \{r = r(s)\}$, donde $s$ es la variable longitud de arco, $0 \leqslant s \leqslant S$. Supongamos que sobre el punto material que se encuentra en la posición $r(s)$ actúa la fuerza $F(s)$ orientada por la tangente a la trayectoria, en el sentido del movimiento.

Tomemos cualquier partición $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[0, S]$. A ella le corresponde la partición de la trayectoria en las partes

$$\Gamma_i = \{r(s), s_{i-1} \leqslant s \leqslant s_i\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Escojamos arbitrariamente un punto $\xi_i \leqslant [s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$ (fig. 141). La magnitud $F(\xi_i)\Delta s_i$, $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$, se llama *trabajo elemental* de la fuerza $F$ en el tramo $\Gamma_i$ y se toma como el valor aproximado del trabajo que realiza la fuerza $F$ actuando sobre un punto material, cuando el último recorre la curva $\Gamma_i$. La suma de todos los trabajos elementales $\sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$ es la suma integral de Riemann de la función $F(s)$.

**Definición 2.** *El límite al cual tiende la suma $\sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$ de todos los trabajos elementales cuando la finura $\delta_\tau$ de la partición $\tau$ tiende a cero se llama trabajo de la fuerza $F$ a lo largo de la curva $\Gamma$.*

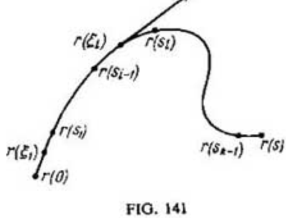



FIG. 141

De esta forma, si denotamos este trabajo con la letra $W$, entonces en virtud de la definición dada

$$W = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$$

y por consiguiente

$$W = \int_0^S F(s)\, ds. \tag{32.24}$$

Si la posición del punto sobre la trayectoria de su movimiento se describe con ayuda de cualquier otro parámetro $t$ (por ejemplo, el tiempo) y si la magnitud del camino recorrido $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es una función continuamente diferenciable, entonces de la fórmula (32.24) obtendremos:

$$W = \int_a^b F[s(t)]s'(t)\, dt.$$

## 32.6. CÁLCULO DE LOS MOMENTOS ESTÁTICOS Y DE LAS COORDENADAS DEL CENTRO DE GRAVEDAD DE UNA CURVA

Sea $M$ un punto material de masa $m$ con coordenadas $x$ e $y$. Los productos $my$ y $mx$ se llaman sus *momentos estáticos* respecto a los ejes $Ox$ y $Oy$ respectivamente.

Sea $\Gamma = \{r(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ una curva rectificable donde $s$ es la variable longitud de arco. Consideraremos que la curva $\Gamma$ tiene masa y que la masa de su arco es directamente proporcional a la longitud del arco: si $\Delta m$ es la masa del arco de longitud $\Delta s$, entonces $\Delta m = \rho\Delta s$, donde $\rho$ es cierta constante llamada *densidad lineal de la curva* $\Gamma$. Tales curvas en la mecánica se llaman *homogéneas*. Por cuanto $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta s}$, entonces la densidad es igual a la masa de la longitud del arco de curva que le corresponde a la unidad de longitud de arco. Para simplificar consideraremos que $\rho = 1$, es decir, que la masa de la parte de la curva de longitud $\Delta s$ es también igual a $\Delta s$, en particular la masa de toda la curva numéricamente, es igual a $S$.

Sea ahora $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ cualquier partición del segmento $[0, S]$, $\Delta s = s_i - s_{i-1}$, $= 1, 2, \dots, k$. A la partición $\tau$ le corresponde la partición de la curva $\Gamma$ en las partes $\Gamma_i = \{r(s),\ s_{i-1} \leqslant s \leqslant s_i\}$. Escojamos un punto cualquiera $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$ y hagamos $x_i = x(\xi_i)$, $y_i = y(\xi_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Las magnitudes $y_i\Delta s_i$ para cualquier elección de los puntos indicados $\xi_i$ se llaman *momentos estáticos elementales* de la parte $\Gamma_i$ de la curva $\Gamma$ respecto al eje $Ox$. Evidentemente el momento estático elemental de $\Gamma_i$ numéricamente es igual al momento estático del punto material con masa $\Delta s$ con coordenada $y_i$, es decir, como si cambiáramos la curva continua dada $\Gamma$ por puntos materiales.

**Definición 3.** *El límite al cual tiende la suma*

$$\sum_{i=1}^{k} y_i\Delta s_i \tag{32.25}$$

*de todos los momentos estáticos elementales, cuando la finura de la partición $\tau$ tiende a cero, se llama momento estático $M_x$ de la curva $\Gamma$ respecto al eje $Ox$.*

Este límite siempre existe ya que por la definición de curva, la función $r = r(s)$ y por lo tanto sus funciones coordenadas $x = x(s)$, $y = y(s)$ son continuas sobre el segmento $[0, S]$, la suma (32.25) es una suma integral de Riemann de la función $y(s)$ y por eso, cuando $\delta \to 0$, tiende a la integral $\int\limits_0^S y(s)\,ds$. De esta forma

$$M_x = \int\limits_0^S y\,ds. \tag{32.26}$$

De forma análoga se define y se calcula el momento estático $M_y$ de la curva $\Gamma$ respecto al eje $Ox$:

$$M_y = \int\limits_0^S x\,ds. \tag{32.27}$$

**Definición 4.** *El punto del plano $P = (x_0, y_0)$ que posee la propiedad de que si en él colocamos un punto material de masa igual a la masa de la curva (en el caso analizado, de masa $S$), entonces este punto tiene un momento estático respecto a cualquier eje coordenado numéricamente igual al momento estático de la curva respecto al mismo eje, se llama centro de gravedad de la curva dada.*

De esta forma

$$Sx_0 = M_y, \quad Sy_0 = M_x,$$

de donde en virtud de las fórmulas (32.26) y (32.27), para las coordenadas del centro de gravedad obtendremos las fórmulas

$$x_0 = \frac{1}{S}\int\limits_0^S x\,ds, \quad y_0 = \frac{1}{S}\int\limits_0^S y\,ds. \tag{32.28}$$

Comparando las fórmulas para la ordenada del centro de gravedad de la curva $y_0 S = \int\limits_0^S y\,ds$ y para el área $L$ de la superficie obtenida de la rotación de esta curva alrededor de un eje $L = 2\pi\int\limits_0^S y\,ds$, obtendremos una relación interesante $L = 2\pi y_0 S$ (aquí por curva se entiende una curva continuamente diferenciable sin puntos singulares) que forma el contenido del así llamado *primer teorema de Goulden*[*)].

**Teorema 5 (de Goulden).** *El área de la superficie obtenida de la rotación de una curva alrededor de un eje que no la interseque es igual a la longitud de esta curva multiplicada por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad de esta curva.*

En el caso cuando es conocida la posición del centro de gravedad de la curva el teorema de Goulden permite sencillamente hallar el área de la superficie correspondiente de revolución. Por ejemplo, el área de la superficie obtenida por la rotación

[*)] P. Goulden (1577 — 1643), matemático suizo.

de la circunferencia $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, $0 < r < a$, alrededor del eje $Oy$ (esta superficie se llama *toro*) fácilmente se calcula por el método indicado: $L = 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar$, ya que el centro de gravedad de la circunferencia coincide con su centro.

En calidad de ejemplo de cálculo del centro de gravedad de una curva según la fórmula (32.28) hallemos el centro de gravedad de la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $-b \leqslant x \leqslant b$. En virtud de la simetría de esta línea con respecto al eje $Oy$ tenemos $M_y = 0$. En realidad, tomando como punto de referencia de los arcos un punto de la catenaria que está en el eje $Oy$ y denotando la longitud de toda la catenaria por $2S$, obtendremos

$$M_y = \int_{-S}^{S} x(s)\, ds = 0,$$

ya que $x(s)$ es una función impar. De la igualdad $M_y = 0$ en virtud de la fórmula (32.28) se deduce que $x_0 = 0$.

Por el teorema de Goulden $L_x = 2\pi y_0 \cdot 2S$, donde $2S$ es la longitud de la curva, en el caso dado de la catenaria analizada, y $L_x$ es el área de la superficie de revolución formada por la rotación de esta línea alrededor del eje $Ox$. El área $L_x$ fue calculada en el p. 32.4:

$$L_x = \pi a \left(2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a}\right)$$

y la longitud $2S$ de la catenaria fácilmente se calcula por la fórmula (32.15):

$$2S = \int_{-b}^{b} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{-b}^{b} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}\, dx =$$

$$= \int_{-b}^{b} \operatorname{ch} \frac{x}{a}\, dx = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_{-b}^{b} = 2\, a \operatorname{sh} \frac{b}{a};$$

por la fórmula (32.28) obtendremos

$$y_0 = \left(2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a}\right) / 4 \operatorname{sh} \frac{b}{a}.$$

Ejercicios. 3. Hállese el área de la región finita, acotada por la parábola $y^2 = 2x + 1$ y la recta $y = x - 1$.

4. Hállese el área de la región acotada por la cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

y por la recta $y = 0$.

5. Hállese el área de la región acotada por la curva $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (esta curva se llama lemniscata).

6. Hállese el volumen del cuerpo de revolución formado por la rotación de un arco del sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, alrededor del eje $Ox$.

7. Hállese la longitud de la curva $y = \ln \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant a < \frac{\pi}{2}$.

8. Hállese la longitud del arco de la *espiral de Arquímedes* $\rho = a\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

9. Hállese el área de la superficie formada por la rotación de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ alrededor del eje $Ox$.

10. Hállese las coordenadas del centro de gravedad del arco del círculo

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi, \quad |\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi.$$

11. Demuéstrese la unicidad del centro de gravedad para una curva continuamente diferenciable, dicho de otro modo, demuéstrese que el punto del plano definido por las fórmulas (32.28), no depende de la elección de las coordenadas cartesianas sobre el plano

## § 33. INTEGRALES IMPROPIAS

### 33.1. DEFINICIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS

Una función no acotada sobre un segmento no es integrable sobre él según Riemann (teorema 1, del p. 27.2). Si la función está definida sobre un intervalo infinito, entonces no se puede hablar de su integrabilidad según Riemann sencillamente por que la definición de la integral se refiere sólo a las funciones dadas sobre un segmento. En el presente párrafo el concepto de integral se generaliza tanto al caso de funciones definidas sobre intervalos no acotados, así como para el caso de funciones definidas sobre intervalos acotados, pero no acotados en ellos. Esto se hace con ayuda de un paso límite complementario al límite con cuya ayuda se introduce la integral de Riemann.

**Definición 1.** *Sea la función $f$ definida sobre un intervalo semiabierto finito o infinito $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, e integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$. Si existe $\lim\limits_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx$, entonces la función $f$ se llama integrable en el sentido impropio sobre el intervalo $[a, b)$ y el límite señalado se llama su integral impropia y se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$.*

De esta manera (fig. 142)

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx. \tag{33.1}$$

Si el límite (33.1) existe (y por consiguiente es finito) entonces también se dice que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge*, en el caso contrario que *diverge*. A


FIG. 142

diferencia de la integral impropia la integral ordinaria de Riemann se llama a veces *integral propia.*

La existencia de la integral impropia $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ es equivalente a la existencia de la integral impropia $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ para cualquier $c \in (a, b)$. En realidad la integral $\int\limits_a^\eta f(x)\,dx$ se diferencia de la integral $\int\limits_c^\eta f(x)\,dx$ (cuando $c < \eta < b$) en una magnitud finita $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ que no depende de $\eta$:

$$\int\limits_a^\eta f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^\eta f(x)\,dx\,.$$

Por esto cuando $\eta \to b$ ambas integrales $\int\limits_a^\eta$ y $\int\limits_c^\eta$ tienen o no limite simultáneamente, además en el caso de su existencia

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{33.2}$$

De la definición (33.1) de la integral impropia y de (33.2) se deduce que si la integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ converge entonces

$$\lim_{c \to b} \int\limits_c^b f(x)\,dx = 0. \tag{33.3}$$

Señalemos que no se puede tomar el cumplimiento de esta condición en calidad de definición de la integral convergente $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ya que la integral $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ también es impropia, y se puede hablar de su tendencia a cero cuando $c \to b$ sólo al tener ya la definición de integral impropia convergente.

Si la función $f$ es no negativa y continua sobre el intervalo $[a, b)$, entonces la integral impropia $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ es igual al área del conjunto abierto no acotado:

$$G = \{(x, y) : a < x < b; 0 < y < f(x)\},$$

es decir

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \operatorname{mes} G. \tag{33.4}$$

En realidad (en la fig. 143 está representado el caso de un $b$ finito) tomemos una sucesión cualquiera $\eta_k \in [a, b)$, $k = 1, 2, \dots$ , de forma tal que $\lim\limits_{k \to \infty} \eta_k = b$ y hagamos

$$G_k = \{(x, y) : a < x < \eta_k, 0 < y < f(x)\}.$$

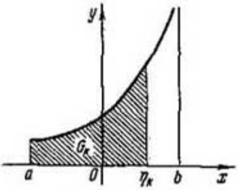



FIG. 143

Entonces por el teorema 1 del p. 32.1

$$\operatorname{mes} G_k = \int_a^{\eta_k} f(x)\,dx. \tag{33.5}$$

Por cuanto $G_k$ son conjuntos abiertos, $k = 1, 2, \ldots$, y

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots \text{ y } \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G,$$

entonces en virtud del teorema 2 del p. 31.2

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G.$$

Por la misma definición de integral impropia

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^{\eta_k} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por esto pasando al límite en la igualdad (33.5) cuando $k \to \infty$ obtendremos (33.4).

Señalemos que la definición (33.1) de la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ en el caso del intervalo finito $[a, b)$ tiene sentido sólo en el caso cuando la función $f$ no es acotada en cualquier entorno del punto $x = b$, es decir, sobre cualquier intervalo $(b - \varepsilon, b)$ $(0 < \varepsilon < b - a)$. Esto está relacionado con el hecho de que -no es difícil mostrar- toda función integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b < +\infty$, y acotada sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$ será integrable según Riemann también sobre el segmento $[a, b]$ al definirla complementariamente en el punto $x = b$. En este caso la integral de Riemann de la función definida de esta manera es igual al límite (33.1) y por lo tanto no depende de la elección del valor complementario de la función cuando $x = b$. En este sentido la integral de Riemann es un caso particular de la integral impropia. Por esto toda la exposición siguiente tiene sentido sólo cuando la función está definida sobre intervalo infinito o

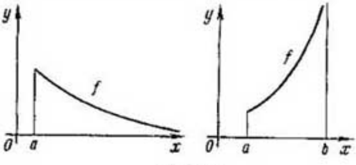



FIG. 144

finito con la particularidad de que en el último caso es no acotada (fig. 144). Lo dicho se comprende en el sentido de que para las funciones subintegrales acotadas, definidas en intervalos acotados, los teoremas demostrados a continuación o bien son triviales o bien han sido demostrados anteriormente.

Ejercicios. 1. Sea la función $f$ acotada sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, e integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$. Demuéstrese que en este caso el límite $\lim\limits_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx$ siempre existe, además si la función $f$ se define complementariamente de modo arbitrario cuando $x = b$, entonces este límite será igual a la integral de Riemann respecto al segmento $[a, b]$ de la función definida complementariamente.

2. Cítese un ejemplo de una función $f$ no negativa cuando $x \geqslant 1$ y no acotada en cualquier entorno de $+\infty$ para la cual converge la integral impropia $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Si la función $f$ está definida sobre el intervalo semiabierto del tipo $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, y es integrable según Riemann sobre todos los segmentos $[\xi, b]$, $a < \xi \leqslant b$, entonces la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se define por la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\xi \to a} \int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{33.6}$$

Si la función $f$ está definida sobre el intervalo $(a, b)$ $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, y para una elección del punto $c \in (a, b)$ existen las integrales impropias $\int_a^c f(x)\,dx$ (en el sentido de (33.6)) y $\int_c^b f(x)\,dx$ (en el sentido de (33.1)) entonces por definición se supone

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{33.7}$$

Además la existencia y el valor de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ no dependen de la elección del punto $c \in (a, b)$. En realidad en el caso analizado la función $f$ evidentemente es integrable según Riemann sobre todo segmento $[\xi, \eta]$, $a < \xi < \eta < b$, y la definición (33.7) en virtud de las definiciones (33.1) y (33.6) es equivalente a la siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\xi \to a \\ \eta \to b}} \int_\xi^\eta f(x)\,dx, \qquad a < \xi < \eta < b.$$

Aquí la parte derecha es el límite de la función de dos variables $\xi$ y $\eta$, además las variables $\xi$ y $\eta$ tienden respectivamente a $a$ y a $b$ independientemente una de otra.

Supongamos ahora que existe un número finito de puntos $x_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $-\infty \leqslant a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b \leqslant +\infty$ (por $x_0$ se puede suponer también $-\infty$ y por $x_k$, $+\infty$) tales que todas las integrales impropias

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

existen. Entonces la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se define por la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx. \tag{33.8}$$

De esta definición y de la definición (33.7) se deduce que la integral impropia en el caso general se reduce a integrales del tipo (33.1) y (33.6). Por esto en lo adelante nos limitaremos sólo al estudio de integrales impropias de los dos tipos señalados.

Ejercicios. 3. Demuéstrese que la existencia y el valor de la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ en la definición (33.8) no depende de la elección de los puntos $x_i$, $i = 0, 1, 2, \cdots, k$, que satisfacen las condiciones formuladas anteriormente.

4. Demuéstrese que si la integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge y existe $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, entonces este límite es igual a cero:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Ejemplo 1. Mostremos que la integral impropia de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ respecto al intervalo semiabierto $(0, 1]$ diverge. En realidad

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to +0} \int_\xi^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to +0} \ln x \Big|_\xi^1 = -\lim_{\xi \to +0} \ln \xi = +\infty.$$

Como siempre los cálculos realizados se escriben brevemente:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^1 = +\infty.$$

2. Aclaremos para cuáles $\alpha \neq 1$ converge y para cuáles diverge la integral de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ respecto al intervalo $(0, 1]$. Tenemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_0^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{para} \quad \alpha < 1, \\ +\infty & \text{para} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Señalemos que cuando $\alpha \leqslant 0$ la integral analizada es propia. Uniendo los resultados obtenidos en los ejemplos 1 y 2 obtendremos.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \text{cuando} \quad \alpha < 1, \\ \text{diverge} & \text{cuando} \quad \alpha \geqslant 1. \end{cases} \tag{33.9}$$

3. Analicemos ahora la función $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ sobre un intervalo infinito $[1, +\infty)$. Si $\alpha = 1$, entonces

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty.$$

Si además $\alpha \neq 1$ entonces

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^{+\infty} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{cuando} \quad \alpha > 1, \\ +\infty & \text{cuando} \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

De esta manera

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \text{cuando} \quad \alpha > 1, \\ \text{diverge} & \text{cuando} \quad \alpha \leqslant 1. \end{cases} \tag{33.10}$$

4. Si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge y

$$f^*(x) \overset{\text{def}}{=} f(-x), \quad -b \leqslant x \leqslant -a,$$

entonces la integral $\int_{-b}^{-a} f^*(x)\,dx$ también converge y

$$\int_{-b}^{-a} f^*(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En efecto, supongamos, por ejemplo, que la función $f$ es integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$, y por consiguiente

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx$$

(el caso general de la integral impropia en virtud de la definición (33.8) se reduce a integrales semejantes, más exacto a integrales del tipo (33.1) y (33.6)). Por las fórmulas (28.31) (véase el p. 28.1) tiene lugar la igualdad

$$\int_a^\eta f(x)\,dx = \int_{-\eta}^{-a} f^*(x)\,dx.$$

Por lo que

$$\lim_{-\eta \to -b} \int_{-\eta}^{-a} f^*(x)\,dx = \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

pero el límite del primer miembro de la igualdad es precisamente la integral $\int_{-b}^{-a} f^*(x)\,dx$, de esta manera

$$\int_{-b}^{-a} f^*(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En particular, si la función $f$ es *par* sobre el segmento $[-a, a]$ y la integral $\int_0^a f(x)\,dx$ converge, entonces converge también la integral $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$, además

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx,$$

y por consiguiente

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

5. Sea la función $f$ definida cuando $x \geqslant a$, periódica con período $T > 0$ y la integral $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ converge, entonces para cualquier $b \geqslant a$ la integral $\int_b^{b+T} f(x)\,dx$ también converge y

$$\int_b^{b+T} f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx.$$

Es válida también la afirmación inversa en cierto sentido: si para algún $b \geqslant a$ la integral $\int_b^{b+T} f(x)\,dx$ converge, converge también la integral $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ y por consiguiente es válida la fórmula escrita anteriormente.

Para la demostración es suficiente observar que las fórmulas (28.34) (véase el p. 28.1) son válidas también en el caso cuando las integrales que figuran en ellas son impropias. Esto se demuestra mediante un paso límite de la igualdad de las integrales propias correspondientes (su igualdad se deduce de la fórmula (28.33)), el límite de las cuales son las integrales impropias analizadas.

Hemos introducido un nuevo concepto, el concepto de integral impropia. Ante todo es natural aclarar qué propiedades tiene esta integral. ¿Se conservan o no para ella las propiedades de la integral común? ¿Surgen para la integral impropia (si surgen entonces cuáles) nuevos problemas y cuestiones específicas sólo para ella? Obtendremos las respuestas a estas preguntas en los puntos siguientes de este párrafo.

## 33.2. FÓRMULAS DE CÁLCULO INTEGRAL PARA LAS INTEGRALES IMPROPIAS

En éste y en los puntos siguientes al analizar las propiedades de las integrales impropias vamos a detenernos más detalladamente sólo en las integrales de funciones definidas sobre intervalos finitos o infinitos del tipo $[a, b)$ e integrables según Riemann sobre todos los segmentos $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$. Otras suposiciones cualesquiera serán especialmente comentadas.

En virtud de las propiedades del límite y la definición de integral impropia, como del límite de la integral ordinario de Riemann, a las integrales impropias se extienden muchas propiedades de la integral definida. Analicemos algunas de ellas.

1°. **(Fórmula de Newton — Leibniz para las integrales impropias).** *Si la función $f$ es continua sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$ y $F$ es una primitiva sobre él, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} F(b-0) - F(a) & si \quad b \text{ es finito}, \\ F(+\infty) - F(a) & si \quad b = +\infty. \end{cases} \tag{33.11}$$

Aquí $F(b-0) = \lim\limits_{x \to b-0} F(x)$ en el caso cuando $b$ es finito y $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ y por primitiva $F$ de la función $f$ sobre el intervalo $[a, b)$ se entiende la función $F$ continua sobre él, diferenciable en todos sus puntos interiores y tal que $F'(x) = f(x)$, $a < x < b$.

La igualdad (33.11) se entiende en el sentido de que o bien ambos miembros tienen sentido simultáneamente y entonces son iguales, o bien ellas no tienen sentido simultáneamente, es decir, los límites que aparecen en ellas no existen. En realidad según la fórmula de Newton — Leibniz para las funciones integrables según Riemann (véase el p. 29.3) para cualquier $\eta \in [a, b)$ tenemos

$$\int_a^\eta f(x)\,dx = F(\eta) - F(a).$$

Pasando en esta igualdad al límite cuando $\eta \to b$, $a \leqslant \eta < b$ obtenemos la fórmula (33.11).

Subrayamos que esta fórmula está demostrada en la suposición de que la función $f$ es integrable en el sentido común sobre cada intervalo del tipo $[a, \eta]$,

$a \leqslant \eta < b$. Para las integrales del tipo (33.8) en el caso cuando en la parte derecha se tiene más de un sumando, la fórmula análoga no siempre es cierta. Dicho figuradamente, si en cierto punto interior del intervalo dado la función se convierte en infinito, entonces sobre todo este intervalo no se puede, en general, aplicar la fórmula de Newton — Leibniz. Por ejemplo, si a la integral $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$ le aplicamos formalmente la fórmula de Newton — Leibniz, entonces ella será igual al número $-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$. No obstante, como ya sabemos, la integral en cuestión no existe. De esta forma, en este ejemplo la aplicación de la fórmula de Newton — Leibniz sobre todo el intervalo de integración es imposible de hecho.

La fórmula análoga (33.11) es válida, claro, para las integrales impropias del tipo (33.6). Si además la integral impropia se define por la igualdad (33.8), entonces la fórmula de Newton — Leibniz se debe aplicar (si es posible) para cada sumando de la parte derecha por separado.

2°. **(Linealidad de la integral impropia).** *Si las integrales impropias* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *convergen, entonces para números cualesquiera* $\lambda$, $\mu$ *converge también la integral impropia* $\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx$, *además*

$$\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda\int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

En realidad,

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx &= \lim_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \\ &= \lim_{\eta \to b} [\lambda\int\limits_a^\eta f(x)\,dx + \mu\int\limits_a^\eta g(x)\,dx] = \\ &= \lambda \lim_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx + \mu \lim_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta g(x)\,dx = \\ &= \lambda\int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx, \quad a \leqslant \eta < b.\end{aligned}$$

De forma semejante se demuestran las siguientes propiedades de las integrales impropias, análogas a las propiedades correspondientes de la integral de Riemann.

3°. **(Integración de desigualdades).** *Si las integrales* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *convergen, y para todos los* $x \in [a, b)$ *se cumple la desigualdad* $f(x) \leqslant g(x)$, *entonces*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

4°. **(Regla de integración por partes).** *Si las funciones $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son continuamente diferenciables sobre el intervalo $[a, b)$, entonces*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du, \tag{33.12}$$

*además, si dos expresiones cualesquiera de las tres $\int_a^b u\,dv$, $uv\Big|_a^b$ y $\int_a^b v\,du$ tienen sentido* (es decir, los límites correspondientes son finitos), *entonces tiene sentido también la tercera.*

5°. **(Cambio de variable en una integral impropia).** *Sean la función $f$ continua sobre $[a, b)$, la función $\varphi(t)$ continuamente diferenciable sobre el intervalo semiabierto $[\alpha, \beta)$, $-\infty < \alpha < \beta \leqslant +\infty$, además $a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) < b = \lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t)$ cuando $\alpha \leqslant t < \beta$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)]\,dt. \tag{33.13}$$

En este caso las integrales en ambas partes de esta fórmula simultáneamente convergen o no.

Puede suceder que con ayuda de un cambio de variable la integral impropia se convierte en ordinario. Por ejemplo, realizando en la integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ el cambio de variable $x = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}$, obtenemos la integral propia

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Señalemos que cualquier integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ respecto al intervalo finito $[a, b)$ puede ser reducida mediante un cambio de variable a una integral impropia respecto a un intervalo no acotado. En efecto, al realizar, por ejemplo, el cambio de variable.

$$x = \frac{bt + a}{t + 1}, \quad dx = \frac{b - a}{(t + 1)^2}\,dt,$$

obtendremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\int_0^{+\infty} f\left(\frac{bt + a}{t + 1}\right)\frac{dt}{(t + 1)^3}.$$

Por analogía con la integral de Riemann la integral impropia convergente $\int_a^b f(x)\,dx$, $a < b$, según la definición, deberá ser

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Se debe prestar atención a que no todas las propiedades de la integral definida de Riemann se trasladan a las integrales impropias. Así, por ejemplo, el producto de dos funciones integrables por Riemann sobre cierto intervalo, es una función también integrable por Riemann sobre él. El análogo de esta afirmación para las integrales impropias no es siempre válido. Existen funciones $f$ y $g$, cuyas integrales sobre cierto intervalo convergen, y la integral de su producto sobre este mismo intervalo diverge. En efecto, supongamos, por ejemplo, $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Como ya sabemos (p. 33.1) la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge y la integral

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x} \text{ diverge.}$$

La observación hecha nos recuerda una vez más que utilizando los análogos de las propiedades de la integral de Riemann al tratar integrales impropias, no se debe olvidar la necesidad de revisar la validez para la integral impropia de cualquier afirmación análoga a la afirmación correspondiente para la integral propia.

Ejemplos. Calculemos las siguientes integrales impropias utilizando las propiedades enunciadas anteriormente:

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Por medio del cambio de variable $x = \dfrac{1}{t}$, obtendremos

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsen\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2};$$

2. $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n\,dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Integrando por partes (cuando $n > 0$), tenemos

$$I_n = x(\ln x)^n\Big|_0^1 - n\int_0^1 (\ln x)^{n-1}\,dx = -nI_{n-1},$$

ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln x)^n = 0$. Esta igualdad se obtiene fácilmente, si aplicamos $n$ veces la regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} x(\ln x)^n = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)^n}{1/x} = -n\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)^{n-1}}{1/x} = \dots =$$
$$= (-1)^{n+1}\,n!\lim_{x\to 0} x = 0.$$

Observando que $I_0 = \displaystyle\int_0^1 dx = 1$, obtendremos $I_n = (-1)^n n!$[*];

[*] Recordemos que por definición $0! = 1$.

3. $J_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ . De nuevo integrando por partes la integral dada cuando $n > 0$, obtendremos

$$J_n = -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx = n\,I_{n-1}$$

y por cuanto

$$J_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

entonces

$$J_n = n!$$

4. Siguen siendo válidas para las integrales impropias las desigualdades de Minkovski y Hölder (véase el p. 28.4°):

$$\left(\int\limits_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_a^b |(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

$$\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int\limits_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q},$$

$$1 < p < +\infty,\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Para la demostración es suficiente escribir las desigualdades correspondientes para las integrales sobre el segmento $[a, \eta]$ y pasar al límite cuando $\eta \to b$.

En el siguiente punto nos ocuparemos de un problema específico de la teoría de las integrales impropias: determinación de los criterios de su convergencia.

Ejercicios. Calcúlense las integrales impropias:

4. $\displaystyle\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(a - x)}}$, $a > 0$.

5. $\displaystyle\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^3 + a^3}$, $a > 0$.

6. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\,dx$.

7. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + ax + a^2}$, $a > 0$.

8. $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x - a)(b - x)}}$, $0 \leqslant a < b$.

9. Hallése $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\int\limits_0^b (t^p + a^p)^q\,dt}{x^{pq+1}}$, $a, p, q > 0$.

*Indicación*: utilícese la regla de L'Hospital.

## 33.3. INTEGRALES IMPROPIAS DE FUNCIONES NO NEGATIVAS

El estudio de los criterios de convergencia de las integrales impropias lo comenzaremos con el caso cuando la función subintegral es no negativa. Además vamos a atenernos al acuerdo enunciado al inicio del punto anterior.

**Lema 1.** *Si la función $f$ es no negativa sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$, entonces para la convergencia de la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ es necesario y suficiente que todas las integrales*

$$\int_a^\eta f(x)\,dx, \quad a \leqslant \eta < b$$

*sean acotadas en conjunto, es decir, que exista una constante $M > 0$ tal que para todos los $\eta \in [a, b)$ se cumple la desigualdad*

$$\int_a^\eta f(x)\,dx \leqslant M. \tag{33.14}$$

*Cuando se cumple esta condición*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{a \leqslant \eta < b} \int_a^\eta f(x)\,dx. \tag{33.15}$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos la función

$$\varphi(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx, a \leqslant \eta < b. \tag{33.16}$$

Por cuanto $f \geqslant 0$ la función $\varphi$ crece: en realidad si $a \leqslant \eta < \eta' < b$, entonces (véase la propiedad 8° de la integral en el p. 28.1)

$$\int_\eta^{\eta'} f(x)\,dx \geqslant 0,$$

por esto

$$\varphi(\eta') = \int_a^{\eta'} f(x)\,dx = \int_a^\eta f(x)\,dx + \int_\eta^{\eta'} f(x)\,dx \geqslant \int_a^\eta f(x)\,dx = \varphi(\eta).$$

Observemos ahora que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si y sólo si existe el límite $\lim\limits_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx = \lim\limits_{\eta \to b} \varphi(\eta)$, y el último límite existe cuando y sólo cuando (véase el teorema 5 en el p. 4.10) la función $\varphi$ está acotada superiormente, es decir, cuando se cumple la condición (33.14). Además,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b} \varphi(\eta) = \sup_{a \leqslant \eta < b} \varphi(\eta) = \sup_{a \leqslant \eta < b} \int_a^\eta f(x)\,dx. \ \square$$

Del lema demostrado se deduce que para que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función no negativa diverja, es necesario y suficiente que la función $\varphi(\eta)$ (véase (33.16)) sea no acotada superiormente, pero entonces en virtud de su crecimiento

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b} \varphi(\eta) = +\infty.$$

Por esto, si la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función no negativa diverge, entonces se escribe $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$. Con este acuerdo permanece válida la igualdad (33.15).

**Teorema 1 (criterio de comparación).** *Sean las funciones $f$ y $g$ no negativas sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$ y*

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{cuando} \quad x \to b^{*)}. \tag{33.17}$$

*Entonces*

1) *si la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, entonces converge también la integral $\int_a^b f(x)\,dx$;*

2) *si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, entonces diverge también la integral $\int_a^b g(x)\,dx$.*

**Corolario.** *Sean las funciones $f$, $g$ no negativas sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$, $g(x) \neq 0$, $x \in [a, b)$ y existe*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k, a \leqslant x < b. \tag{33.18}$$

*Entonces*

*1) si la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ converge y $0 \leqslant k < +\infty$ entonces la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ también converge;*

*2) si la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge y $0 < k \leqslant +\infty$ entonces la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ también diverge.*

*En particular, si $f$ y $g$ son funciones equivalentes cuando $x \to b$: $f \sim g$, $x \to b$* (véase el p. 8.2), *entonces las integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ convergen o divergen simultáneamente.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Supongamos que la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ converge. De la condición (33.17) se deduce la existencia de un $\eta_0$, $a \leqslant \eta_0 < b$, y $c > 0$ tales

*) En particular $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in [a, b)$.

que para todos los $x \in [\eta_0, b)$ se cumple la desigualdad

$$f(x) \leqslant cg(x) \tag{33.19}$$

(véase el p. 8.2). De la convergencia de la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ se deduce la convergencia de la integral $\int_{\eta_0}^b g(x)\,dx$. En virtud de la necesidad de las condiciones del lema para la convergencia de la integral, existe un número $M > 0$ tal que para cualquier $\eta \in [\eta_0, b)$ es válida la desigualdad

$$\int_{\eta_0}^{\eta} g(x)\,dx \leqslant M.$$

De aquí y de la desigualdad (33.19) tenemos

$$\int_{\eta_0}^{\eta} f(x)\,dx \leqslant c \int_{\eta_0}^{\eta} g(x)\,dx \leqslant cM.$$

De esta desigualdad, en virtud de la suficiencia de las condiciones del lema para la convergencia de la integral de una función no negativa obtenemos que la integral $\int_{\eta_0}^b f(x)\,dx$ y por consiguiente también la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ convergen.

La primera afirmación del teorema está demostrada. La segunda lógicamente es equivalente a la primera. En particular, si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^b g(x)\,dx$ no puede converger, ya que si ella fuera convergente, entonces por la primera afirmación del teorema ya demostrada convergería también la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. De esta forma la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge. □

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Del cumplimiento de la condición (33.18) para $k$, que satisface la condición $0 \leqslant k < +\infty$, se deduce que existe un $\eta \in [a, b)$ tal que si $\eta < x < b$, entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} < k + 1, \quad \text{es decir,} \quad f(x) < (k + 1)g(x)$$

y esto significa que

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to b.$$

Por esto la afirmación 1) del corolario se deriva directamente de la afirmación 1) del teorema 1.

Supongamos ahora que la condición (33.18) se cumple para cierto $k$, que satisface la condición $0 < k \leqslant +\infty$. Entonces para cualquier $k' \in (0, k)$ existe tal $\eta \in$

$\in [a, b)$ que si $\eta < x < b$ entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} < k' \quad \text{o} \quad g(x) < \frac{1}{k'} f(x).$$

Esto significa que $g(x) = O(f(x))$, $x \to b$. Por esto la afirmación 2) del corolario se deriva directamente de la afirmación 2) del teorema 1. □

La función $g(x)$ en la afirmación 1 del teorema 1 y en su corolario, con cuya ayuda se demuestra la convergencia de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, se llama *función de comparación*. Si en particular $f(x) \leqslant g(x)$ para todos los $x \in [a, b)$, entonces se dice también que $f(x)$ se mayorea por la función $g(x)$ o que $g(x)$ sirve de *mayorante* para $f(x)$.

La efectividad de la utilización del criterio de comparación para resolver el problema sobre la convergencia de la integral depende, claro, de la reserva de funciones de comparación, sobre las cuales es sabido si converge o diverge la integral impropia de ellas tomada en el intervalo analizado, y las cuales de esta manera se puede tratar de utilizarlas para analizar la convergencia de la integral dada. Señalemos que la afirmación análoga al teorema 1, es válida, claro, también para las integrales impropias del tipo (33.6).

En calidad de funciones de comparación $g(x)$ a menudo es suficiente tomar funciones potenciales. Exactamente en el caso de intervalos finitos $[a, b)$ y $(a, b]$ se toman respectivamente las funciones $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ y $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$, cuyas integrales $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ convergen cuando $\alpha < 1$ y divergen cuando $\alpha \geqslant 1$ (de esto es fácil convencerse reduciendo las integrales señaladas con un cambio de variable lineal a las integrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, analizadas en el p. 33.1). En el caso de intervalos infinitos $[a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$ como funciones de comparación se toman respectivamente $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ y $g(x) = \dfrac{1}{|x|^\alpha}$ cuyas integrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{|x|^\alpha}$ convergen cuando $\alpha > 1$ y divergen cuando $\alpha \leqslant 1$ (véanse los ejemplos en el p. 33.1).

Señalemos además que de manera evidente todos los criterios enunciados de convergencia y divergencia de las integrales quedan vigentes (con evidentes variaciones), si en ellas la condición de que la función $f$ es no negativa se cambia por la condición de su no positividad (esto se deduce de que la integral $\int_a^b (-f(x))\,dx$ converge si y sólo si converge la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ejemplos. 1. La integral

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx \tag{33.20}$$

converge. En efecto, denotando por $f$ la función subintegral $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ y tomando en calidad de función de comparación

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}, \quad \text{aquí} \quad \alpha = \frac{1}{3},$$

tenemos

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1-0} \sqrt[3]{1-x}\,\frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

por eso, según el corolario del teorema 1, la integral (33.20) converge.

2. La integral $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,dx$ diverge. Para convencerse de esto es suficiente tomar en calidad de función de comparación $g(x) = \frac{1}{1-x}$, aquí $\alpha = 1$.

En los ejemplos analizados se podría elegir inmediatamente el exponente $\alpha$ en la función de comparación partiendo del tipo concreto de la función subintegral dada. En ocasiones cuando esta elección de inmediato no está clara, se hace necesario previamente realizar algunos análisis complementarios, por ejemplo, tratar de separar su parte principal recurriendo a la fórmula de Taylor. Analicemos ejemplos semejantes.

3. La integral

$$\int_0^1 \ln x\,dx \tag{33.21}$$

converge. En realidad, por la regla de L'Hospital para cualquier $\alpha > 0$, en particular cuando $0 < \alpha < 1$, tenemos

$$\lim_{x\to +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to +0} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to +0} x^\alpha = 0,$$

por esto, de acuerdo con el corolario del teorema 1 (más exacto, con su análogo para las funciones no positivas) la integral (33.21) converge.

Geométricamente la convergencia y la divergencia de las integrales (33.9), (33.10) y (33.21) significa lo finito o infinito de las áreas de los respectivos "trapecios curvilíneos infinitos" cuya disposición comparativa está representada en la fig. 145.

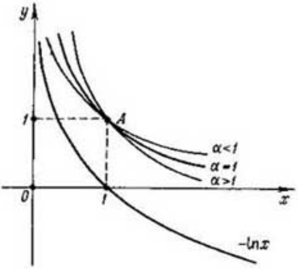



FIG. 145

4. Para aclarar la cuestión sobre la convergencia de la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x} \tag{33.22}$$

observemos que $\ln x = \ln [1 + (x - 1)] \sim x - 1$ cuando $x \to 1$ y tomemos como función de comparación $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $(\alpha = 1)$. Entonces $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{\ln x} = -1$ y por consiguiente la integral (33.22) diverge.

5. La integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}\, dx \tag{33.23}$$

converge. En efecto, tenemos $\alpha = \dfrac{3}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Entonces aplicando de nuevo la regla de L'Hospital, obtendremos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}-\varepsilon} \ln x}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3+1}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}} = 0.$$

Escojamos $\varepsilon > 0$ tal que $\dfrac{3}{2} - \varepsilon > 1$; en este caso la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}$ converge, y por ello, según el corolario del teorema 1, converge también la integral (33.23).

6. Analicemos la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}\,dx. \qquad (33.24)$$

Aquí la función subintegral es siempre negativa. Evidentemente la integral (33.24) converge o diverge simultáneamente con la integral

$$\int_1^{+\infty} \left(-\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}\right)dx \qquad (33.25)$$

en la cual la función subintegral es siempre positiva. Desarrollando la función $\ln\cos\frac{1}{x}$ según la fórmula de Taylor, obtendremos

$$-\ln\cos\frac{1}{x} = -\frac{\ln\left[1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x^p} =$$

$$= -\frac{-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^p} = \frac{1}{2x^{2+p}} + o\left(\frac{1}{x^{2+p}}\right), \quad x \to +\infty.$$

De esta manera, $-\dfrac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p} \sim \dfrac{1}{2x^{2+p}}$ cuando $x \to +\infty$ y por consiguiente, la integral (33.24) converge cuando $2+p > 1$, es decir, cuando $p > -1$ y diverge cuando $p \leqslant -1$.

En los ejemplos 2 y 3 sería posible establecer la convergencia de las integrales allí analizadas, calculándolas por la fórmula de Newton — Leibniz. No obstante la aclaración de la convergencia de las integrales con ayuda del criterio de comparación habitualmente exige menos operaciones que mediante su cálculo preliminar por la fórmula de Newton — Leibniz. Es importante señalar que utilizando el criterio de comparación, se puede aclarar la convergencia de las integrales, naturalmente, también en el caso cuando la primitiva de la función subintegral no es elemental y por consiguiente, mediante el método común, con ayuda de la fórmula de Newton — Leibniz, la integral a ciencias ciertas no se calcula, como ocurrió en los ejemplos 4 y 5.

Subrayemos una vez más que el criterio de comparación para aclarar la cuestión sobre la convergencia de la integral impropia se puede aplicar sólo para las funciones que no cambian de signo. Surge la pregunta: ¿comó se aclara si converge o diverge la integral impropia en el caso cuando la función subintegral cambia el signo? En los siguientos puntos nos ocuparemos del estudio de esta cuestión.

### 33.4. CRITERIO DE CAUCHY DE LA CONVERGENCIA DE INTEGRALES IMPROPIAS

En este punto ya no vamos a suponer que los valores de las funciones analizadas conservan un mismo signo en el intervalo semiabierto $[a, b)$ — ellas pueden tomar valores de cualquier signo —, pero como antes supondremos que todas las funciones analizadas para cualquier elección de un número $\eta \in [a, b)$ son integrables según Riemann sobre el segmento $[a, \eta)$.

**Teorema 2.** *Para la convergencia de la integral* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *exista un número* $\eta = \eta(\varepsilon)$, $a \leqslant \eta < b$, *tal que si* $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$, *entonces*

$$\left| \int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{33.26}$$

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $\varphi(\eta) = \int\limits_a^\eta f(x)\,dx$, $a \leqslant \eta < b \leqslant +\infty$. Entonces la convergencia de la integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, es decir, la existencia del límite (33.1) significa la existencia del límite $\lim\limits_{\eta \to b} \varphi(\eta)$. En virtud del criterio de Cauchy para la existencia del límite finito de la función $\varphi(\eta)$ cuando $\eta \to b$ es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un entorno reducido por la izquierda $\mathring{U}(b, \eta) = \{x : \eta < x < b\}$ del punto $b$, es decir, que exista un número $\eta$, $a \leqslant \eta < b$, tal que para todos los $\eta' \in \mathring{U}(b, \eta)$ y $\eta'' \in \mathring{U}(b; \eta)$ (que es equivalente a la condición: $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$) se cumpla la desigualdad

$$|\varphi(\eta'') - \varphi(\eta')| < \varepsilon \tag{33.27}$$

Por cuanto

$$\varphi(\eta'') - \varphi(\eta') = \int\limits_a^{\eta''} f(x)\,dx - \int\limits_a^{\eta'} f(x)\,dx = \int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx,$$

entonces la desigualdad (33.27) es equivalente a la condición (33.26) (fig. 146). □

El teorema 2 se llama *criterio de Cauchy de convergencia de la integral*.

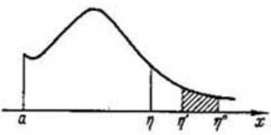



FIG. 146

## 33.5. INTEGRALES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

Un concepto importante para las integrales impropias de las funciones que varían el signo es el concepto de la integral absolutamente convergente.

**Definición 2.** *La integral impropia* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *se denomina absolutamente convergente si converge la integral* $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Las funciones para las cuales la integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ converge absolutamente se llaman absolutamente integrables (en sentido impropio) sobre el intervalo con extremos $a$ y $b$. En el caso cuando $a$ y $b$ son finitos se dice también que la función $f$ es absolutamente integrable sobre el segmento $[a, b]$.

Del teorema 2 se deduce directamente el criterio de convergencia absoluta de la integral.

**Teorema 3.** *Para que la integral* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *converja absolutamente es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *exista un* $\eta = \eta(\varepsilon)$ *tal que si* $\eta < \eta' < b$ *y* $\eta < \eta'' < b$, *entonces*

$$\left| \int\limits_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon.$$

Este teorema se llama *criterio de Cauchy de convergencia absoluta de la integral.*

Recordemos que como siempre aquí se supone que la función $f$ es integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$ donde $a \leqslant \eta < b$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

El criterio de convergencia de las integrales de funciones no negativas evidentemente lo aplicaremos también para la aclaración de la convergencia absoluta de las integrales. Supongamos, por ejemplo, que se exige aclarar: converge o no la integral

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx. \tag{33.28}$$

Por cuanto $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ y la integral $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ converge entonces por el criterio de comparación converge también la integral $\int\limits_1^{+\infty} \left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| dx$, es decir, la integral (33.28) converge absolutamente.

Una relación importante entre la convergencia y la convergencia absoluta de las integrales se establece con el siguiente teorema.

**Teorema 4.** *Si la integral converge absolutamente, entonces simplemente converge.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado $\varepsilon > 0$. Si la integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ converge absolutamente, entonces por el criterio de Cauchy de la convergencia absoluta de la integral (véase el teorema 3) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\eta = \eta(\varepsilon)$ tal que si $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$, entonces

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\, dx \right| < \varepsilon. \tag{33.29}$$

Por cuanto $\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\, dx \right| \leqslant \left| \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\, dx \right|$, entonces en virtud de la desigualdad (33.29) para cualesquiera $\eta'$ y $\eta''$ indicados tenemos

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\, dx \right| < \varepsilon,$$

por eso según el criterio de Cauchy sobre la convergencia de las integrales (véase el teorema 2) la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ converge. □

Ejercicio 10. Si la integral impropia de una función definida sobre un segmento converge absolutamente, entonces ella sencillamente converge. La integral de Riemann es un caso particular de integral impropia. Por consiguiente, si existe la integral de Riemann de la magnitud absoluta de la función, entonces existe también la integral de Riemann de la propia función. Esto no es válido (cítese el ejemplo correspondiente). ¿Dónde está el error en el razonamiento realizado?

Es esencial observar que una integral puede converger, pero no converger absolutamente. En calidad de ejemplo analicemos la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx. \tag{33.30}$$

Ante todo, señalemos que por cuanto $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ entonces la función subintegral definida complementariamente con la unidad cuando $x = 0$, será continua sobre la semirrecta $x \geqslant 0$ y por lo tanto integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[0, \eta]$, en particular, sobre el segmento $[0, 1]$. Por esto la cuestión sobre la convergencia, respectivamente sobre la convergencia absoluta, de la integral (33.30) es equivalente a la cuestión sobre la convergencia, respectivamente sobre la convergencia absoluta, de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx. \tag{33.31}$$

Para analizar su convergencia realicemos la integración por partes:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, d(\cos x) =$$

$$= -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \cos x\, d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

En la parte derecha se obtuvo la integral (33.28) la cual como es conocido converge absoluta y, por lo tanto, simplemente.

De esta manera ambas expresiones obtenidas en la parte derecha tienen sentido y, por lo tanto, son finitas. Por esto, en primer lugar la integración por partes hecha es válida y en segundo lugar la parte izquierda es también finita, es decir, la integral (33.31) converge.

Señalemos que como resultado de la integración por partes, hemos sustituido la integral (33.31) por la suma de una expresión finita y otra integral impropia la cual en el denominador de la expresión subintegral tiene el exponente de la variable de integración más alto que en (33.31) y en el numerador, una función acotada, como en (33.31). En la integral obtenida la función subintegral tiende a cero más rápido que en la integral inicial, en el sentido de que

$$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{cuando} \quad x \to \infty.$$

Por esto su convergencia resultó más fácil de investigar directamente que la convergencia de la integral inicial: ella resulta incluso no simplemente convergente, sino absolutamente convergente.

El método que permite reducir el análisis de la convergencia de la integral dada al análisis de la convergenica de otra integral que en un determinado sentido "converge mejor" que la integral dada se llama *método de mejoramiento de la convergencia.*

Mostremos ahora que la integral (33.31) no converge absolutamente, es decir, que la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \tag{33.32}$$

diverge. En realidad, de la desigualdad

$$|\operatorname{sen} x| \geqslant \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

para cualquier $\eta > 1$ tenemos:

$$\int_1^{\eta} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \geqslant \frac{1}{2}\int_1^{\eta} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^{\eta} \frac{\cos 2x}{x}\, dx. \tag{33.33}$$

La integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge y es igual a $+\infty$. La integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\, dx$ converge. Para convencernos de esto integrémosla por partes:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,d(\operatorname{sen} 2x) =$$
$$= \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\Bigg|_1^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} 2x\, d\frac{1}{x} = \frac{\operatorname{sen} 2}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2}\,dx.$$

En virtud de esta fórmula la convergencia de la integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ directamente se deduce de la convergencia absoluta de la integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2}\,dx$, la cual a su vez se deriva de la desigualdad evidente

$$\left|\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Pasando ahora al límite cuando $\eta \to +\infty$, en la desigualdad (33.33) obtenemos que el segundo miembro y, por consiguiente, el primer miembro de esta desigualdad tienden a $+\infty$ y por esto la integral (33.32) diverge.

De esta forma la integral (33.31), así como la integral (33.30) no convergen absolutamente.

Demostremos otra afirmación auxiliar útil para el futuro.

**Lema 2.** *Si la función $f$ es absolutamente integrable y la función $g$ es integrable según Riemann sobre el segmento $[a, b]$ entonces su producto $gf$ es también absolutamente integrable sobre $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Como acordamos anteriormente se analizan sólo las funciones $f$ tales que para cualquier $\eta \in [a, b)$ son integrables según Riemann sobre el segmento $[a, \eta]$. Por cuanto según la condición la función $g$ es integrable según Riemann sobre el segmento $[a, b]$, entonces es integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$, $\eta \in [a, b)$ (véase la propiedad 2 en el p. 28.1). Por esto el producto $gf$ es también integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$ indicado (véase la propiedad 6 en p. 28.1). Esto significa que tiene sentido el estudio de la integral impropia $\int\limits_a^b g(x)f(x)\,dx$.

En virtud de la integrabilidad según Riemann de la función $g$ sobre el segmento $[a, b]$, ésta es acotada sobre él, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que para todos los $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad $|g(x)| \leqslant M$. Por consiguiente, para todos los $x \in [a, b)$ es válida también la desigualdad $|g(x)f(x)| \leqslant M|f(x)|$. Observando que en virtud de la integrabilidad absoluta de la función $f$ sobre el segmento $[a, b]$ la integral $\int\limits_a^b M|f(x)|\,dx = M\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ converge, obtendremos según el criterio de comparación que converge también la integral $\int\limits_a^b |g(x)\,f(x)|\,dx$, es decir, que el producto $gf$ es absolutamente integrable sobre el segmento $[a, b]$. □

Todo lo dicho en este punto de forma natural se transfiere a las integrales impropias de otros tipos analizadas en el p. 33.1, es decir, a las integrales del tipo (33.6) y también a las integrales del tipo general (33.8).

## 33.6. ANÁLISIS DE LA CONVERGENCIA DE LAS INTEGRALES

Demostremos un criterio suficiente de convergencia de las integrales, denominado comúnmente *criterio de Dirichlet*.

**Teorema 5 (criterio de Dirichlet).** *Supongamos que*

1) *la función $f$ es continua y tiene primitiva acotada $F$ cuando $x \geqslant a$;*

2) *la función $g$ es continuamente diferenciable y decrece cuando $x \geqslant a$;*

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$,

*entonces la integral*

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \tag{33.34}$$

*converge.*

DEMOSTRACIÓN. Ante todo observemos que según las suposiciones hechas la función $fg$ es continua y, por lo tanto, integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, b]$, $a < b < +\infty$, y por esto tiene sentido hablar de la integral impropia (33.34).

Integrando por partes el producto $f(x)g(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ obtendremos:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx. \tag{33.35}$$

Investiguemos el comportamiento de ambos sumandos de la parte derecha cuando $b \to +\infty$. Por la acotación de la función $F$ (véase la condición 1 del teorema)

$$M = \sup |F(x)| < +\infty, \quad \text{por esto} \quad |g(b)F(b)| \leqslant Mg(b).$$

En virtud de la condición 3 del teorema $\lim\limits_{b \to +\infty} g(b)F(b) = 0$.

Más adelante, del hecho de que la función $g$ decrece monótonamente se deduce que $g'(x) \leqslant 0$ cuando $x \geqslant a$ y por esto

$$\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx \leqslant M\int_a^b |g'(x)|\,dx = -M\int_a^b g'(x)\,dx =$$
$$= M[g(a) - g(b)] \leqslant Mg(a),$$

ya que de las condiciones 2 y 3 del teorema se deduce que $g(x) \geqslant 0$, en particular, que $g(b) \geqslant 0$.

De esta forma, las integrales $\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx$ están acotadas en conjunto para todos los $b > a$ y por esto la integral

$$\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$$

converge absoluta y también simplemente, es decir, existe el límite finito

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Demostremos que en la parte derecha de la igualdad (33.35) ambos sumandos cuando $b \to +\infty$ tienen límite finito, por ello el límite de la parte izquierda cuando $b \to +\infty$, es finito lo que significa la convergencia de la integral (33.34). ☐

OBSERVACIÓN. La obtención de las estimaciones necesarias en la demostración realizada recuerda los razonamientos en la demostración del segundo teorema integral sobre la media (véase el p. 30.3*). Esto no es casual, si utilizamos el teorema señalado para la estimación de la integral $\int_b^\eta f(x)g(x)\,dx$, $a < b < \eta < +\infty$, entonces el criterio de Dirichlet se puede demostrar más breve. No hemos hecho esto para mostrar una vez más como con ayuda de la integración por partes se puede mejorar la convergencia de la integral.

Ejemplos. 1. Apliquemos el criterio de Dirichlet al análisis de la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx, \quad \alpha > 0. \tag{33.36}$$

La función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ tiene primitiva acotada $F(x) = -\cos x$, la función continuamente diferenciable $g(x) = 1/x^\alpha$ cuando $\alpha > 0$ decrece monótonamente y tiende a cero cuando $x \to +\infty$. Todas las condiciones del teorema 5 se cumplen, por esto la integral (33.36) converge.

2. Es necesario, no obstante, tener en cuenta que el criterio de Dirichlet da sólo condiciones suficientes y no necesarias de convergencia de la integral, por esto no siempre con su ayuda se puede resolver el problema sobre la convergencia de la integral. Por ejemplo, analicemos la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{x^\alpha - \operatorname{sen} x}, \quad \alpha > 0. \tag{33.37}$$

Tratemos de aplicar el criterio de Dirichlet, haciendo $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha - \operatorname{sen} x}$. Es evidente que $g(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Hallemos la derivada:

$$g'(x) = \frac{-\alpha x^{\alpha-1} + \cos x}{(x^\alpha - \operatorname{sen} x)^2}.$$

De aquí se ve que cuando $\alpha < 1$ esta derivada si $x \to +\infty$, cambia su signo infinitas veces y por consiguiente la propia función $g(x)$ no es una función monótonamente decreciente.

De esta forma cuando $\alpha < 1$ el criterio de Dirichlet no es aplicable, por el método señalado, a la aclaración de la cuestión sobre la convergencia de la integral (33.37). En este caso es natural probar a recurrir de nuevo al método de selección de la parte principal.

Aplicando el desarrollo de la función $(1-t)^{-1}$, $-1 < t < 1$, según la fórmula de Taylor (véase el p. 13.3) obtendremos, cuando $x \to +\infty$,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha - \operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,\frac{1}{1-\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}} = \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\left[1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right] =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} + \frac{1}{2x^{2\alpha}} - \frac{\cos 2x}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right). \quad (33.38)$$

Las integrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx \text{ y } \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^{2\alpha}}\,dx \quad (33.39)$$

convergen por el criterio de Dirichlet para todos los $\alpha > 0$. La integral

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)\right] dx \quad (33.40)$$

también converge cuando $2\alpha > 1$, es decir, cuando $\alpha > \frac{1}{2}$, y diverge cuando $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. En realidad, de la fórmula (33.38) se deduce que la función $o(1/x^{2\alpha})$ en la fórmula indicada es continua respecto a $x$ cuando $x \geqslant 1$, $\alpha > 0$ y, por consiguiente, tiene sentido hablar de la integral (33.40). Las funciones $\frac{1}{2x^{2\alpha}}$ y $\frac{1}{2x^{2\alpha}} + o(1/x^{2\alpha})$ son no negativas en cierto entorno de $+\infty$ y equivalentes cuando $x \to +\infty$, por esto la integral (33.40) converge y diverge para los mismos valores del parámetro $\alpha$, que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}}$ (véase el corolario del teorema 1 en el p. 33.3).

De esta forma cuando $\alpha > \frac{1}{2}$ todas las integrales (33.39) y (33.40) convergen y por eso, en virtud de (33.38) converge también la integral (33.37). Cuando $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ las integrales (33.39) convergen y la integral (33.40) diverge, por consiguiente, diverge también la integral (33.37).

Observemos que cuando $\alpha \leqslant 0$ la integral (33.37) diverge. Efectivamente, en este caso el denominador de la función subintegral se anula infinitas veces, y además si $x_0^\alpha - \operatorname{sen} x_0 = 0$, entonces la función $x^\alpha - \operatorname{sen} x$ en un entorno del punto $x_0$ según la fórmula de Taylor es de la forma (¿por qué?) $x^\alpha - \operatorname{sen} x = (x - x_0)^k \varphi(x)$ donde $k$ es cierto número natural y $\varphi(x_0) \neq 0$. Por cuanto $\operatorname{sen} x_0 \neq 0$, entonces en cada punto $x_0$ semejante tenemos una particularidad no integrable.

Se debe prestar atención a que para cada $\alpha > 0$ dado las funciones

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha - \operatorname{sen} x} \quad \text{y} \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}$$

son equivalentes cuando $x \to +\infty$, es decir,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} = \varepsilon(x) \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha - \operatorname{sen} x},$$

donde $\varepsilon(x) = 1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} \to 1$ cuando $x \to +\infty$; no obstante si $0 < \alpha \leqslant 1/2$, entonces la integral (33.37) de la primera de ellas diverge y la integral (33.36) de la segunda de ellas converge.

De esta forma, el cambio de la función subintegral por una equivalente puede cambiar la convergencia de la integral (si, naturalmente, la integral no converge absolutamente).

3. Analicemos la convergencia y la convergencia absoluta de la integral

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) dx. \tag{33.41}$$

Por cuanto $\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\right| \sim \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x}$ cuando $x \to +\infty$ y la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen}\ x|}{x}\, dx$ diverge (véase (33.32)), entonces diverge también la integral

$$\int_1^{+\infty} \left|\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\right| dx,$$

es decir, la integral (33.41) no converge absolutamente.

Es fácil comprobar que cuando $y \to 0$

$$\operatorname{tg} y = y + O(y^3), \tag{33.42}$$

además en calidad de entorno que participa en la definición del símbolo $O$ (véase la definición 1 en el p. 8.2), aquí se puede tomar el intervalo $(-1, 1)$: existe una constante $c > 0$ tal que

$$|O(y^3)| \leqslant c|y|^3, \quad |y| < 1.$$

En lo adelante en virtud de la fórmula (33.42) cuando $y = \dfrac{\operatorname{sen}\ x}{x}$ la integral (33.41) se puede representar en la forma

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + \int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x^3}\right) dx. \tag{33.43}$$

Por cuanto la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ converge (por ejemplo, según el criterio de Dirichlet) y la integral $\int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ converge absolutamente, entonces la integral (33.41) es convergente.

Ejercicios. Analícense la convergencia y la convergencia absoluta de los siguientes integrales:

11. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

12. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

13. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$.

14. $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$.

15. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\,dx$.

16. $\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x^{10}}\,dx$.

17. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

18. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

19. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

20. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

21. $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\,dx$.

22. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt{1 + x}}\,dx$.

23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\alpha} x\,dx,\ -\infty < \alpha < +\infty$.

24. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1 + (\ln x)^p},\ -\infty < p < +\infty$.

25. $\int_0^{\pi} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

26. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x+\cos x)^{\alpha}}\,dx.$ 27. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{n} e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx.$

## § 34*. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LAS INTEGRALES CON LÍMITES DE INTEGRACIÓN VARIABLES

A menudo resolviendo problemas resulta necesario no sólo determinar la convergencia o la divergencia de la integral analizada, sino también poder estimar en un sentido determinado el grado de velocidad de su convergencia o el carácter de la divergencia. No vamos aquí a demostrar ningunos teoremas generales relacionados con esta cuestión (sobre algunos métodos generales de estudio del comportamiento asintótico de las funciones véase en el p. 37.10*) sino que sólo la ilustraremos en ejemplos aislados de búsqueda del grado de las integrales con límite superior variable, cuando ellas tienden a cero o al infinito. Específicamente, si, por ejemplo, la integral $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, entonces se analizará el orden de la tendencia a cero cuando $x \to +\infty$ de la integral $\int_x^{+\infty} f(t)dt$. Precisamente, este orden se llama velocidad de convergencia de la integral impropia convergente dada $\int_a^{+\infty} f(t)dt$. Si además la integral $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge y es igual a $+\infty$ ó $-\infty$, entonces se estudiará el orden de tendencia al infinito de la integral $\int_a^{x} f(t)dt$ cuando $x \to +\infty$. Este orden se llama velocidad o grado de divergencia de la integral impropia divergente analizada.

Ejemplos. 1. Analicemos la integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^{\beta} t} \tag{34.1}$$

para distintos valores reales de los parámetros $\alpha$ y $\beta$. Analizaremos inicialmente el caso de $\alpha > 0$ y de cualquier $\beta \in R$. Para tales valores de los parámetros la integral (34.1) converge, lo que es fácil establecer por el criterio de comparación, si en calidad de función de comparación tomamos por ejemplo la función $g(t) = t^{-\frac{\alpha}{2}-1}$ cuya integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{\alpha}{2}+1}}$ converge.

Por la convergencia de la integral (34.1) para los valores indicados de los parámetros $\alpha$ y $\beta$ en la igualdad $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^{\beta} t} = \int_2^{x} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^{\beta} t} + \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^{\beta} t}$ el segundo sumando de su segundo miembro tiende a 0 cuando $x \to \infty$.

Estidiemos el grado de su decrecimiento, o sea, mostremos la validez de la igualdad asintótica

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t} \sim \frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}, \quad x \to +\infty. \tag{34.2}$$

Para la demostración hagamos

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t}, \quad \Phi(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}.$$

Por la convergencia de la integral (34.1) cuando $\alpha > 0$, $\beta \in R$ tenemos $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$. Evidentemente, también $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0$. Por cuanto

$$F'(x) = -\frac{1}{x^{\alpha+1}\ln^\beta x}, \Phi'(x) = -\frac{1}{x^{\alpha+1}\ln^\beta x} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}\ln^{\beta+1} x},$$

entonces aplicando la regla de L'Hospital, obtendremos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi(x)}{F(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha \ln x}\right) = 1,$$

es decir, la relación (34.2) está demostrada.

En el caso $\alpha = 0$, $\beta > 1$ por integración directa obtendremos incluso la expresión explícita de la integral que nos interesa:

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^\beta t} = \int_x^{+\infty} \frac{d\ln t}{\ln^\beta t} = \frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1} t}\bigg|_x^{+\infty} = \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} x}. \tag{34.3}$$

Mostremos ahora que para $\alpha < 0$ y cualquier $\beta \in R$ la integral (34.1) diverge y más aún tiene lugar la igualdad asintótica

$$\int_2^x \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t} \sim -\frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}, \quad x \to +\infty. \tag{34.4}$$

Haciendo en este caso

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_2^x \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}, \quad \Phi(x) \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x},$$

y aplicando la regla de L'Hospital, obtendremos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi(x)}{F(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha \ln x}\right) = 1,$$

es decir, la igualdad (34.4) está demostrada.

Para los valores restantes de los parámetros $\alpha$ y $\beta$ la integral

$$\int_2^x \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t} \tag{34.5}$$

se calcula en funciones elementales. Si $\alpha = 0$ y $\beta < 1$ entonces

$$\int_2^x \frac{dt}{t\ln^\beta t} = \int_2^x \frac{d\ln t}{\ln^\beta t} = \frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1} t}\Bigg|_2^x = \frac{\ln^{1-\beta} x - \ln^{1-\beta} 2}{1-\beta},$$

y si $\alpha = 0$, $\beta = 1$ entonces

$$\int_2^x \frac{dt}{t\ln t} = \int_2^x \frac{d\ln t}{\ln t} = \ln\ln t\Bigg|_2^x = \ln\frac{\ln x}{\ln 2}.$$

Así, la integral (34.1) converge para $\alpha > 0$ y cualquier $\beta \in R$ y también cuando $\alpha = 0$ y $\beta > 1$; además se han establecido las igualdades asintóticas, respectivamente exactas (34.2) y (34.3), para la integral $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t}$. Para los valores restantes de los parámetros $\alpha$ y $\beta$ la integral (34.1) diverge y fue obtenida la característica asintótica o exacta de la integral (34.5).

2. Analicemos la integral

$$\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt, \tag{34.6}$$

donde para $t \geqslant T$ la función $f$ es continua no negativa:

$$f(t) \geqslant 0 \tag{34.7}$$

tiene período $T$:

$$f(t+T) = f(t) \tag{34.8}$$

y la integral de ella respecto al período es positiva

$$\int_T^{2T} f(t)dt > 0. \tag{34.9}$$

Mostremos que la integral (34.6) diverge y que

$$\int_t^x \frac{f(t)}{t}\,dt = \ln x,\quad x \to +\infty, \tag{34.10}$$

es decir, que la función en la parte izquierda de esta fórmula cuando $x \to +\infty$ tiene orden $\ln x$ (véase el p. 8.2).

Por cuanto la función $f$ es continua, entonces es acotada sobre el segmento $[T, 2T]$ y, por consiguiente, en virtud de su periodicidad es acotada para todos los $t \geqslant T$, es decir, existe el número $M > 0$ tal que para todos los $t \geqslant T$ se cumple la desigualdad

$$f(t) \leqslant M. \tag{34.11}$$

Por esto tenemos

$$\int_T^x \frac{f(t)}{t}\,dt \underset{(34.11)}{\underset{(34.7)}{\leqslant}} M\int_T^x \frac{dt}{t} = \ln x - \ln T = O(\ln x), \quad x \geqslant T. \tag{34.12}$$

Denotemos ahora por $I$ la integral de la función $f$ por el período, es decir,

$$I = \int_T^{2T} f(t)dt. \tag{34.13}$$

Realizando en las integrales escritas a continuación el cambio de variable $t = u + (k - 1)\,T$ sobre los segmentos $[kT, (k + 1)T]$, $k = 2, 3, \ldots$, obtendremos

$$\int_T^{nT} \frac{f(t)}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{f(t)}{t}\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \int_T^{2T} \frac{f(u + (k - 1)T)}{u + (k - 1)T}\,du \underset{(34.8)}{=} \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n-1} \int_T^{2T} \frac{f(u)}{\frac{u}{T} + k - 1}\,du \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2 + k - 1}\int_T^{2T} f(u)du \underset{(34.13)}{\geqslant} \frac{I}{T}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k + 1}. \tag{34.14}$$

Observemos que para los números $x$ que están en el segmento $[k + 1, k + 2]$ se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k + 1},$$

integrándola se obtiene la desigualdad

$$\int_{k+1}^{k+2} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k + 1}. \tag{34.15}$$

Por esto

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k + 1} \underset{(34.15)}{\geqslant} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k+1}^{k+2} \frac{dx}{x} = \int_2^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n + 1) - \ln 2 \geqslant \ln(n + 1).$$

Sustituyendo esta estimación en la desigualdad (34.14) obtendremos

$$\int_T^{nT} \frac{f(t)}{t}\,dt \geqslant \frac{I}{T}\ln(n + 1). \tag{34.16}$$

Observemos que por cuanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n + 1)}{\ln(n + 1)T} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{\ln T}{\ln(n + 1)}} = 1,$$

entonces existe un $n_0$ natural tal que cuando $n > n_0$ se cumple la desigualdad

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)T} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{34.17}$$

Más adelante para cada número $x$ existe un entero $n$ tal que

$$nT \leqslant x \leqslant (n+1)T. \tag{34.18}$$

Ahora para cualquier $x$, para el cual en la desigualdad (34.18) tiene lugar $n \geqslant n_0$ tenemos

$$\int_0^x \frac{f(t)}{t}\,dt \underset{(34.18)}{\geqslant} \int_0^{nT} \frac{f(t)}{t}\,dt \underset{(34.16)}{\geqslant} \frac{I}{T}\ln(n+1) \underset{(34.17)}{\geqslant} \frac{I}{2T}\ln(n+1)T \underset{(34.18)}{\geqslant} \frac{I}{2T}\ln x. \tag{34.19}$$

Las desigualdades (34.12) y (34.19) demuestran precisamente la validez de la fórmula (34.10).

Tomando en la fórmula (34.10) en calidad de función $f$ diferentes funciones concretas que satisfacen las condiciones enumeradas anteriormente obtendremos que las integrales correspondientes tendrán orden $\ln x$. Por ejemplo,

$$\int_1^x \frac{\ln(1+\cos^2 t)}{t}\,dt \asymp \ln x, \quad \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt \asymp \ln x.$$

No obstante, a veces se logra obtener una estimación más exacta. Así para la segunda integral tenemos

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt + \int_1^x \frac{1-\cos 2t}{2t}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln x + \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\,dt. \tag{34.20}$$

Por cuanto $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t} = 0$, entonces la función $\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}$, siendo definida complementariamente por cero para $t = 0$, será una función continua y, por consiguiente, integrable sobre el segmento $[0, 1]$, es decir, la integral $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt$ es finita. La integral $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}\,dt$ converge (esto, por ejemplo, se deduce directamente del criterio de Dirichler, véase el p. 33.6). De lo dicho se deriva que la función

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\,dt \tag{34.21}$$

siendo continua para todos los $x \geqslant 0$ y teniendo límite finito

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}\,dt,$$

es acotada sobre el semieje no negativo. Por esto de la igualdad

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt \underset{\substack{(34.20)\\(34.21)}}{=} \frac{1}{2}\ln x + F(x)$$

se desprende que

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt \sim \frac{1}{2}\ln x,$$

es decir, en este caso se logra definir no sólo el orden de la integral con límite de integración variable $x$, sino también su comportamiento asintótico cuando $x \to +\infty$: es equivalente a $\frac{1}{2}\ln x$.

En los ejemplos analizados el comportamiento asintótico de las integrales se determinó con ayuda de métodos más o menos especiales que resultaron ser cómodos en los casos concretos analizados. Un método más general que da a menudo la posibilidad de hallar el comportamiento asintótico de las integrales es la integración ordinaria por partes.

3. Analicemos en calidad de ejemplo las así llamadas *integrales de Fresnel* *).

$$\int_0^\infty \cos\theta^2\,d\theta, \quad \int_0^\infty \operatorname{sen}\theta^2\,d\theta,$$

cuya velocidad de convergencia se define por el grado de decrecimiento de las integrales

$$\int_x^{+\infty} \cos\theta^2\,d\theta, \quad \int_x^{+\infty} \operatorname{sen}\theta^2\,d\theta, \quad x > 0. \tag{34.22}$$

El estudio del comportamiento asintótico de las integrales (34.22) cuando $x \to +\infty$ se realiza con el mismo método. Por esto analizaremos sólo una de ellas, por ejemplo, la primera. Realizando en ella el cambio de variable $\theta^2 = t$, inmediata-

*) A. Fresnel (1788 — 1827), físico francés.

mente nos convencemos según el criterio de Dirichlet de que esta converge. Después, integrando dos veces por partes la integral obtenida tendremos

$$\int_x^{+\infty} \cos\theta^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\Bigg|_{x^2}^{+\infty} + \frac{1}{4}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} x^2}{2x} + \frac{1}{4}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t\sqrt{t}}\,dt = -\frac{\operatorname{sen} x^2}{2x} + \frac{\cos x^2}{4x^3} - \frac{3}{8}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}}\,dt \qquad (34.23)$$

(según la terminología anterior, véase el p. 33.5, mejoramos por medio de la integración por partes la convergencia de la integral).

Por cuanto $\dfrac{\cos x^2}{4x^3} = O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$, $x \to \infty$, y

$$\left|\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}}\,dt\right| \leqslant \int_{x^2}^{+\infty}\frac{dt}{t^2\sqrt{t}} = -\frac{2}{3t^{3/2}}\Bigg|_{x^2}^{+\infty} = \frac{2}{3x^3},$$

entonces tendremos

$$\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}}\,dt = O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \to +\infty.$$

Por consiguiente,

$$\int_x^{+\infty}\cos\theta^2 d\theta = -\frac{\operatorname{sen} x^2}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \to +\infty.$$

De esta forma, hemos logrado con exactitud hasta $O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$, $x \to +\infty$, hallar una expresión simple para la integral $\int_x^{-\infty}\cos\theta^2 d\theta$, que da, en particular, una idea sobre el carácter de su decrecimiento cuando $x \to +\infty$. Si realizamos la posterior integración por partes de la integral que se encuentra en la parte derecha de la fórmula (34.22), entonces se pueden obtener fórmulas asintóticas para la integral $\int_x^{+\infty}\cos\theta^2 d\theta$ con exactitud hasta $O\left(\dfrac{1}{x^{2n+1}}\right)$, $x \to +\infty$, para cualquier $n$ natural.

Ejercicios. Analícese la velocidad de convergencia (divergencia) de las siguientes integrales para diferentes valores reales de los parámetros $\alpha$ y $\beta$:

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2\alpha t - t^2} t^{\beta - 1}\,dt.$

2. $\displaystyle\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{1}{3}t^3 + \alpha t\right)dt.$

3. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2(\alpha + \ln t)^{1/3}}.$

CAPÍTULO CUARTO

# SERIES

## § 35. SERIES NUMÉRICAS

### 35.1. DEFINICIÓN DE SERIE Y SU CONVERGENCIA

En el presente párrafo el concepto de suma se generaliza a algunos casos de conjunto infinito de sumandos y se estudian las propiedades de estas sumas generalizadas. Muchas de las cuestiones analizadas a continuación son válidas no sólo para los números reales sino también para los complejos. Por esto a diferencia de lo anterior en este capítulo vamos a realizar el análisis en la región compleja.

La expresión analítica que formalmente tiene aspecto de suma que contiene número infinito de sumandos se llama *serie infinita* o más breve *serie*. Daremos la definición estricta de serie y de su suma.

**Definición 1.** *Sea dada una sucesión de números complejos* $u_n$, $n = 1, 2, \ldots$ *Compongamos una nueva sucesión de números* $s_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *de la siguiente forma*:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= u_1, \\
s_2 &= u_1 + u_2, \\
s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n.
\end{aligned}
$$

*El par de sucesión* $\{u_n\}$ y $\{s_n\}$ *se llama serie numérica (más detalladamente, serie numérica con término general* $u_n$*) y se denota por*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{35.1}$$

ó

$$\sum_{n=1}^{\infty} u^n. \tag{35.2}$$

*Los elementos de la sucesión inicial* $\{u_n\}$ *se llaman términos de la serie* (35.1) *y los elementos de la sucesión* $\{s_n\}$ *sumas parciales de esta serie, además* $u_n$ *se llama término n-ésimo de la serie y la suma finita* $s_n$, *suma parcial n-ésima de la serie*, $n = 1, 2, \ldots$.

*Si la sucesión de sumas parciales de la serie* (35.1) *converge, entonces ésta se llama convergente, y si diverge, entonces, divergente.*

**Definición 2.** *La serie cuyos términos son términos de la serie* (35.1) *tomados, comenzando por el* $(n + 1)$*-ésimo, en el mismo orden que en la serie inicial, se llama resto n-ésimo de la serie* (35.1) *y se denota por*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad \text{ó} \quad u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots .$$

**Definición 3.** *Si la serie* (35.1) converge, *entonces el límite*

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n$$

*se llama su suma.*

En este caso se escribe

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots ,$$

ó

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.3}$$

De esta forma vamos a utilizar un mismo símbolo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ tanto para denotar la propia serie (35.1) como para la notación de su suma, si ella converge.

Si $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \infty$, o bien $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = +\infty$ o bien $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = -\infty$ entonces respectivamente se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty \quad \text{ó} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty.$$

Así, cada serie es un par de dos sucesiones tales que la primera puede ser tomada arbitrariamente (la sucesión de los términos de la serie) y la segunda, formada de manera definida por los términos de la primera (la sucesión de las sumas parciales de los términos de la serie). No obstante la serie unívocamente se define por cada una de estas sucesiones. En efecto, si está dada una sucesión de los términos $u_n$ de la serie, entonces los términos de la sucesión de sus sumas parciales se hallan según la definición 1 por las fórmulas $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $n = 1, 2, \ldots$ . Si está dada la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales de la serie, entonces sus términos se definen por las fórmulas $u_1 = s_1$, $u_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ . De aquí se deduce que para cualquier sucesión siempre se puede hallar una serie tal que ella será la sucesión de sus sumas parciales. En realidad, sea dada la sucesión de números complejos $\{z_n\}$. Hagamos

$$u_1 = z_1, \quad u_2 = z_2 - z_1, \ldots , \quad u_n = z_n - z_{n-1}, \ldots$$

y analicemos la serie

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots .$$

Entonces para sus sumas parciales tenemos:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n =$$
$$= z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) = z_n.$$

Esto significa que el análisis de las series es equivalente al análisis de las sucesiones. Cualquier cuestión enunciada en términos de series, se puede parafrasear en una cuestión enunciada en términos de sucesiones y viceversa. Por ejemplo, el problema del estudio de la convergencia de las series es equivalente al problema del estudio de la convergencia de sucesiones.

Subrayemos que siempre si no se acuerda lo contrario, los términos de las series analizadas se suponen complejos.

Si el resto n-ésimo de la serie (35.1) (véase la definición 2) converge, entonces su suma la denotaremos por $r_n$:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \tag{35.4}$$

y nombraremos para mayor brevedad *sencillamente resto de la serie.*

Cualquier suma de un número finito de sumandos

$$s_{n_0} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_0}$$

se puede analizar como una serie agregándole los términos

$$u_{n_0+1} = u_{n_0+2} = \ldots = 0.$$

La suma de la serie obtenida evidentemente coincidirá con la suma dada, ya que para todos los $n \geqslant n_0$ sus sumas parciales son iguales $s_{n_0}$.

Si no se sabe de antemano si la suma contiene un número finito o infinito de sumandos, entonces a veces es cómodo en ambos casos llamarla serie considerando que la suma finita es una serie en el sentido señalado anteriormente.

Señalemos una propiedad sustancial de las series convergentes.

**Teorema 1 (condición necesaria de convergencia de una serie).** *Si la serie* (35.1) *converge, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{35.5}$$

DEMOSTRACIÓN. Si la serie (35.1) converge, entonces la sucesión de sus sumas parciales $s_n$, $n = 1, 2, \ldots$, y $s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, evidentemente tienen un mismo límite igual a la suma $s$ de esta serie. Por esto observando que $u_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0. \ \square$$

Con ayuda del teorema 1 a veces se logra establecer la divergencia de la serie analizada: *si para la serie dada la condición* (35.5) *no se cumple, entonces ésta diverge.*

Ejemplos. 1. Sea $q$ un número complejo y $|q| < 1$. Entonces la serie $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$ con términos $u_n = q^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, que forman *una progresión geométrica decreciente infinita*, converge.

En realidad,

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q},$$

y ya que $\lim \dfrac{q^{n+1}}{1-q} = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}.$$

2. La serie cuyos términos forman una progresión geométrica $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$ cuando $|q| \geqslant 1$ diverge, ya que su término general $u_n = q^n$ no tiende a cero: $|u_n| = |q|^n \geqslant 1$.

3. La serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$ con términos $u_n = (-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, diverge.

En realidad en este caso

$$s_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad s_{2k+1} = 1, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

por esto la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ no tiene límite.

La divergencia de la serie analizada, se deduce naturalmente también de que todos sus términos por su valor absoluto son iguales a la unidad y por esto no se cumple la condición necesaria (35.5) de convergencia de la serie.

### 35.2. PROPIEDADES DE LAS SERIES CONVERGENTES

**Teorema 2.** *Sea c un número complejo. Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in C$ *converge, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ *llamada producto de la serie dada por el número c también converge y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.6}$$

Este teorema significa que el factor numérico "se puede sacar del paréntesis" también en el caso del conjunto infinito de sumandos si éstos forman una serie convergente. "Se puede" en el sentido que es válida la igualdad (35.6).

DEMOSTRACIÓN. Sean $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ y $s'_n = \sum_{k=1}^{n} cu_k$, entonces, evidentemente

$$s'_n = cs_n. \tag{35.7}$$

Por condición $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe, por esto en virtud de (35.7) $\lim_{n\to\infty} s'_n$ también existe y

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = c \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Según la definición de suma de una serie de aquí directamente se deduce (35.6). □

**Teorema 3.** *Supongamos que las series* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *convergen, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, *llamada suma de las series dadas, también converge y*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{35.8}$$

Este teorema significa que las series convergentes "se puede sumar término a término" (el término $n$-ésimo con el $n$-esimo), "se puede" en el sentido que es válida la igualdad (35.8).

DEMOSTRACIÓN. Sean

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad s'_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \quad \text{y} \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k),$$

entonces $\sigma_n = s_n + s'_n$ y ya que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} s'_n$ por condición existen, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$ también existe y

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}(s_n + s'_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} s'_n.$$

Esta igualdad es equivalente a la igualdad (35.8). □

**Teorema 4.** *Si la serie converge, entonces cualquiera de sus restos converge. Si cualquier resto de la serie* (35.1) *converge, entonces la propia serie también converge. Además si*

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad s_m = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad r_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k,$$

*entonces*

$$s = s_m + r_m.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $n = 1, 2, \ldots$, sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, y $s_k^{(m)} = u_{m+1} + \ldots + u_{m+k}$, sumas parciales de su resto $m$-ésimo

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+k} + \ldots .$$

Es evidente que

$$s_n = s_m + s_k^{(m)}, \quad n = m + k \tag{35.9}$$

de donde para $m$ fijo se deduce, que el límite

$$\lim_{n\to\infty} s_n$$

existe cuando y sólo cuando existe

$$\lim_{k\to\infty} s_k^{(m)}.$$

Dicho de otro modo la serie converge cuando y sólo cuando converge alguno de sus restos $r_m = \lim\limits_{k\to\infty} s_k^{(m)}$. Por cuanto el número natural $m$ era arbitrario, entonces la primera parte del teorema está demostrada.

Pasando, finalmente, al límite en la igualdad (35.9) cuando $k \to \infty$ y $m$ es fijo, tenemos $s = s_m + r_m$, ya que $n = m + k \to +\infty$ cuando $k \to +\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim\limits_{k\to\infty} s_k^{(m)} = r_m$. □

De este teorema se deduce que la eliminación o adición de un número finito de términos a la serie dada no influye sobre su convergencia.

De la fórmula $s = s_m + r_m$ evidentemente se deduce que si la serie converge, entonces su resto tiende a cero:

$$\lim_{m\to\infty} r_m = \lim_{m\to\infty}(s - s_m) = 0. \tag{35.10}$$

Señalemos que sin ninguna duda la condición (35.10) no se puede tomar en calidad de definición de serie convergente ya que el resto de la serie es también una serie y se puede hablar sobre su tendencia a cero sólo dominando la definición de convergencia de la serie.

### 35.3. CRITERIO DE CAUCHY DE LA CONVERGENCIA DE LA SERIE

El criterio de Cauchy para la convergencia de las sucesiones puede ser fácilmente parafraseado conforme a las series. En realidad, como es conocido (véase el p. 4.7 y 23.3) para que una sucesión de números complejos $\{s_n\}$ sea convergente, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número $n_\varepsilon$ tal que para números cualesquiera $n \geqslant n_\varepsilon$ y cualesquiera enteros $p \geqslant 0$ se cumpla la desigualdad

$$|s_{n+p} - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

Para mayor comodidad de la utilización de este criterio en el caso de series escribimos aquí la diferencia $s_{n+p} - s_{n-1}$ en lugar de la diferencia $s_{n+p} - s_n$, que escribimos anteriormente en el p. 3.7. Esto, naturalmente, no influye sobre la esencia del problema. Además por cuanto la suma $s_0$ no está definida, consideraremos siempre según la definición que $s_0 = 0$.

Si ahora por $\{s_n\}$ se entiende la sucesión de sumas parciales de la serie (35.1), entonces

$$s_{n+p} - s_{n-1} = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p},$$

y el criterio enunciado en estas notaciones toma la siguiente forma.

**Teorema 5 (criterio de Cauchy).** *Para que una serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *converja, es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $n_\varepsilon$ *tal que para cualquier* $n \geqslant n_\varepsilon$ *y cualquier entero* $p \geqslant 0$ *se cumple la desigualdad*

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon. \tag{35.11}$$

Del criterio de Cauchy de convergencia de una serie se puede fácilmente obtener de nuevo la condición suficiente (35.5) de convergencia de la serie. En realidad, en este caso la desigualdad (35.11) se cumple para cualquier $p \geqslant 0$ y, en particular, para $p = 0$. Por esto para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ tenemos $|u_n| < \varepsilon$ y en virtud de que $\varepsilon > 0$ es arbitrario esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

La propiedad (35.5) brevemente se expresa diciendo que *"el término general de una serie convergente tiende a cero"*.

Ejemplo. Analicemos la así llamada *serie armónica*

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots .$$

Aquí el término $n$-ésimo $u_n = 1/n$ tiende a cero cuando $n \to \infty$, pero la serie diverge. En realidad, para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ tenemos

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} >$$
$$> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad (35.12)$$

es decir, para cualquier $n$ cuando $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $p = n - 1$ la desigualdad (35.11) no se cumple.

De esta forma, del criterio de Cauchy se deduce que la serie armónica diverge. Este ejemplo muestra que la condición (35.5) siendo necesaria para la convergencia de la serie, no es al mismo tiempo suficiente.

Del ejemplo analizado se deduce que la serie

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots \quad (35.13)$$

cuando $\alpha < 1$ diverge. En realidad, observando que cuando $\alpha < 1$ para cualquier $n = 2, 3, \ldots$ es válida la desigualdad $n^\alpha < n$ tenemos por (35.12) la desigualdad

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} > \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} + \ldots + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2}.$$

Por esto en el caso de la serie (35.13) cuando $\alpha < 1$ para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ cuando $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $p = n - 1$ la desigualdad (35.11) tampoco se cumple y, por consiguiente, en virtud del criterio de Cauchy la serie (35.13) cuando $\alpha < 1$ también diverge.

Ejercicios. Demuéstrese partiendo de la definición 1 que las siguientes series son convergentes y hállese la suma de cada una de ellas:

1. $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \ldots + \frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)} + \ldots, \ (a, b > 0).$
2. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots$
3. $a + (a+d)q - (a+2d)q^2 + \ldots + (a+nd)q^n + \ldots, \ |q| < 1.$

**Problema 22.** Demuéstrese que para cualquier serie convergente $\sum\limits_{n=1} a_n$ con términos no negativos $a_n \geqslant 0$, existe una sucesión $\{b_n\}$ creciente e infinitamente grande $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, $b_n \leqslant b_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ también converge.

## 35.4. SERIES CON TÉRMINOS NO NEGATIVOS

En este punto nos ocuparemos del estudio de las series, todos los términos de las cuales son números reales no negativos.

**Lema 1.** *Sean todos los términos de la serie* (35.1) *no negativos:*

$$u_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{35.14}$$

*Para que esta serie converja, es necesario y suficiente que exista al menos una subsucesión convergente de la sucesión de sus sumas parciales.*

En efecto, de la condición (35.14) se deduce que

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k = s_n + u_{n+1} \geqslant s_n,$$

es decir, la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ de la serie analizada es creciente. Una sucesión monótona converge si y sólo si converge al menos una de sus subsucesiones (véase la observación después del teorema 3 en el p. 4.5). $\square$

**Lema 2.** *Para que la serie* (35.1) *con términos no negativos converja, es necesario que la sucesión de sus sumas parciales sea acotada superiormente y suficiente que sea acotada superiormente al menos una subsucesión* $\{s_{n_k}\}$ *de la sucesión* $\{s_n\}$ *de sus sumas parciales, además si*

$$s = \sup_k \{s_{n_k}\},$$

*entonces s es la suma de la serie* (35.1).

En efecto, la convergencia de la serie significa la convergencia de la sucesión de sus sumas parciales, y cualquier sucesión convergente es acotada, en particular, acotada superiormente. De esta forma la primera parte del lema es válida sin la suposición de que son no negativos los términos de la serie.

No obstante en el caso general la condición de acotación incluso de todas las sumas parciales de la serie (y no sólo de alguna de sus subsucesiones) no es suficiente para la convergencia de la serie, como esto se muestra, por ejemplo, en el ejemplo 3, analizado en el p. 35.1. Por esto la condición de que son no negativos los términos de la serie es sustancial para la validez de la segunda parte del lema 2. Demostrémosla.

Del hecho de que los términos de la serie son no negativos, como nos convencimos en la demostración del teorema anterior, se deduce que la sucesión de sus sumas parciales es no decreciente. Por esto si existe una subsucesión $\{s_{n_k}\}$ acotada superiormente de la sucesión de las sumas parciales $\{s_n\}$ de la serie que se analiza, entonces tampoco decrece (como cualquier subsucesión de una sucesión no decreciente) y por consiguiente (véase el teorema 3 en el p. 3.5) converge, además

$$s = \sup_k \{s_{n_k}\} = \lim_{k \to \infty} s_{n_k}.$$

Por el lema anterior de la convergencia de la subsucesión de las sumas parciales $\{s_{n_k}\}$ se deduce la convergencia de la serie, es decir, la existencia del límite finito $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$, y por lo tanto, el límite de la sucesión convergente coincide con el límite de cualquier subsucesión suya, entonces

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{k \to \infty} s_{n_k} = s. \ \square$$

Del lema 2 se deduce que si la serie con términos no negativos diverge, entonces la sucesión de sus sumas parciales no es acotada superiormente y por su monotonía

$$\lim_{n \to \infty} s_n = +\infty.$$

Por esto para las series divergentes con términos no negativos por el acuerdo hecho en el p. 35.1 se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty.$$

Los lemas demostrados por sus enunciados recuerdan las afirmaciones correspondientes para las integrales impropias (véase el p. 33.3). Entre la convergencia de las series con términos no negativos y la convergencia de las integrales impropias de las funciones no negativas se puede a veces establecer también una relación más directa. Para las funciones decrecientes esto será hecho en el p. 35.7.

Ejemplo. Analicemos ahora la serie (35.13) cuando $\alpha > 1$. Mostremos que en este caso ella converge. Tomemos inicialmente las sumas parciales de esta serie de órdenes $n = 2^k - 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$ agrupando sus sumandos en $k$ grupos cuya forma general es

$$\frac{1}{2^{p\alpha}} + \frac{1}{(2^p + 1)^\alpha} + \frac{1}{(2^p + 2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^{p+1} - 1)^\alpha}, \quad p = 0, 1, \dots k - 1,$$

es decir,

$$s_{2^k - 1} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \\ + \dots + \left(\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}} + \dots + \frac{1}{(2^k - 1)^\alpha}\right).$$

Observando que para cada sumando del grupo de orden $p$-ésimo es válida la desigualdad

$$\frac{1}{(2^p + m)^\alpha} \leqslant \frac{1}{2^{p\alpha}}, \quad m = 0, 1, \dots, 2^p - 1,$$

y que en este grupo hay $2^p$ sumandos, obtendremos

$$s_{2^k - 1} < 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + \dots + \frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)\alpha}} < \\ < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{(k-1)(\alpha-1)}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}.$$

. De esta forma la sucesión de sumas parciales $s_{2^k - 1}$ de la serie (35.13), cuando $\alpha > 1$, es acotada superiormente. Más adelante en virtud de la positividad de los términos de la serie analizada la sucesión de sus sumas parciales crece. Por esto existe el límite finito o infinito $\lim_{n \to \infty} s_n = s$. Pero entonces cualquier subsucesión de $\{s_n\}$, en particular, la subsucesión $\{s_{2^k - 1}\}$, tiene el mismo límite $s$ y por cuanto según lo demostrado esta sucesión es acotada, entonces el límite $s$ es finito.

Señalemos que en el caso de $p = 2$ la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ se demuestra mucho más fácil. En efecto, para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ tenemos:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

es decir, las sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ son acotadas superiormente y, por consiguiente, según el lema 2 ella converge. De aquí para cualquier $p > 2$ en virtud de la desigualdad

$$\frac{1}{n^p} \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

directamente se deduce la acotación de las sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, cuando $p \geqslant 2$, y por esto también su convergencia (un método parecido para establecer la convergencia de la serie con términos no negativos será analizado en el caso general en el próximo punto). De esta forma sólo por el caso $1 < p < 2$ fue necesario aplicar anteriormente un método más complejo de estimación de las sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$, para establecer su convergencia.

### 35.5. CRITERIO DE COMPARACIÓN PARA LAS SERIES CON TÉRMINOS NO NEGATIVOS. MÉTODO DE SELECCIÓN DE LA PARTE PRINCIPAL DEL TÉRMINO DE LA SERIE

Pasemos ahora a los criterios de comparación para las series que también por su forma recuerdan los criterios correspondientes de convergencia de las integrales impropias.

**Teorema 6** (**criterio de comparación**). *Sea*

$$u_n \geqslant 0, \quad v_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.15}$$

*y*

$$u_n = O(v_n)^{*)}. \tag{35.16}$$

*Entonces, si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{35.17}$$

---

*) En particular, $u_n \leqslant v_n$. Véase la explicación de la notación "$O$" en el p. 23.3.

*converge, converge también la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{35.18}$$

*y si la serie* (35.18) *diverge, entonces diverge también la serie* (35.17).

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que se cumple la condición (35.16). Entonces existe un $c > 0$ tal que

$$u_k \leqslant c v_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{35.19}$$

Si ahora la serie (35.17) converge, entonces por el lema 2 la sucesión $\{s_n\}$ de sus sumas parciales es acotada, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{35.20}$$

Denotemos por $\sigma_n$ la suma parcial de la serie (35.18). Entonces en virtud de las desigualdades (35.19) y (35.20)

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant c \sum_{k=1}^{n} v_k = cs_n \leqslant cM, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Por el lema 2 de la acotación superior de las sumas parciales de la serie (35.18) se deduce su convergencia. Así, si la serie (35.17) converge, entonces la serie (35.18) también converge.

Si la serie (35.18) diverge, entonces la serie (35.17) también diverge, ya que si ella convergiera, entonces por lo demostrado convergería también la serie (35.18) lo que contradice la condición. □

**Corolario.** *Sea* $v_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *y*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \tag{35.21}$$

*en este caso*

1) *si la serie* (35.17) *converge y* $0 \leqslant k < +\infty$, *entonces la serie* (35.18) *también converge;*

2) *si la serie* (35.17) *diverge y* $0 < k \leqslant +\infty$, *entonces la serie* (35.18) *también diverge.*

*En particular si* $u_n \sim v_n$ *(*$u_n$ *y* $v_n$ *son equivalentes, véase el p.* 23.3), *entonces las series* (35.17) *y* (35.18) *convergen o divergen simultáneamente.*

Del cumplimiento de la condición (35.21) para $0 \leqslant k < +\infty$ se deduce la existencia de $n_0$ tal que si $n \geqslant n_0$, entonces

$$\frac{u_n}{v_n} < k + 1, \quad \text{es decir,} \quad u_n < (k+1)v_n,$$

y esto significa que

$$u_n = O(v_n).$$

Por esto la afirmación 1 del corolario se deriva directamente de la afirmación 1 del teorema.

Del cumplimiento de la condición (35.21) para $0 < k \leqslant +\infty$ se deduce que si fijamos $k'$ tal que $0 < k' < k$, entonces existe el número $n_0 = n_0(k')$ que tiene la propiedad de que si $n \geqslant n_0$, entonces

$$\frac{u_n}{v_n} > k', \quad \text{es decir,} \quad v_n < \frac{1}{k'} u_n,$$

y esto significa que

$$v_n = O(u_n).$$

Por esto la afirmación 2 del corolario se deriva directamente de la afirmación 2 del teorema. □

Ejemplos. 1. Sea $u_n = \dfrac{\operatorname{sen}^2 n\alpha}{2^n}$.

Entonces $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, y ya que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ converge (véase el p. 35.1), entonces también converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 n\alpha}{2^n}$.

2. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ diverge ya que $\dfrac{1}{1+\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{n}{2\sqrt{n}}$, $p = 1, 2, \ldots$, y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ como hemos visto (véase el estudio de la serie (35.13)) diverge.

La efectividad de la utilización del criterio de comparación para el análisis de la convergencia de una serie depende, naturalmente, de la reserva de "series de comparación", es decir, de las series de las cuales ya sabemos si convergen o divergen, y que por esto podemos tratar de utilizar para el análisis de la convergencia de la serie dada.

Si en calidad de "serie de comparación" (35.17) tomamos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, de la cual ya sabemos para que $\alpha$ converge, entonces del teorema 6 se deduce directamente la validez del siguiente teorema.

**Teorema 7.** *Sea $u_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Entonces si $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ y $\alpha > 1$, la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{35.22}$$

*converge; si $\dfrac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$ y $\alpha \leqslant 1$, la serie (35.22) diverge.*

**Corolario.** *Sea $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = k$ y en este caso*

*1) si $\alpha > 1$ y $0 \leqslant k < +\infty$, entonces la serie (35.22) converge;*
*2) si $\alpha \leqslant 1$ y $0 < k \leqslant +\infty$, entonces la serie (35.22) diverge.*

*En particular, si $u_n \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$, entonces la serie (35.22) converge cuando $\alpha > 1$ y diverge cuando $\alpha \leqslant 1$.*

Si los términos $u_n$ de la serie (35.22) están dados con ayuda de una fórmula que representa una función de $n$, la cual tiene sentido para todos los valores reales no negativos suficientemente grandes de la variable $n$ y más aún es una función "suficientemente suave" de esta variable, entonces para la aplicación práctica del teorema 7 habituamente resulta conveniente desarrollar el término $u_n$ con ayuda de la fórmula de Taylor según las potencias de $1/n$.

Si el término principal del desarrollo obtenido tiene la forma de $1/n^\alpha$, entonces tomando en calidad de serie de comparación la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ y aplicando el teorema 7 se puede definir si converge o diverge la serie dada.

En un sentido conocido se puede decir que este método de análisis de la convergencia de la serie es el más cómodo y además suficientemente general

Ejemplos. Analicemos la convergencia de las series cuyos términos generales se definen por las fórmulas dadas a continuación.

1. $u_n = 1 - \cos\frac{\pi}{n}$. Evidentemente, $u_n > 0$. Ya que (véase la observación al final del p. 13.3) $\cos x = 1 + O(x^2)$, $x \to 0$, y por consiguiente,

$$u_n = 1 - \left[1 + O\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

entonces según el teorema 7 la serie con término general $u_n$ converge.

2. $u_n = \ln\cos\frac{1}{n}$. Aquí $u_n < 0$. Recordando que $\ln(1 + x) = O(x)$, $x \to 0$, y aplicando sucesivamente la fórmula de Taylor para el coseno y el logaritmo obtendremos:

$$u_n = \ln\cos\frac{1}{n} = \ln\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

y por esto en virtud del teorema 7 la serie con términos positivos $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ converge y junto con ella converge también la serie dada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

3. $u_n = \ln\dfrac{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$, $n = 3, 4, \ldots$. Tenemos $u_n \geqslant 0$ y $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$, por eso

$$u_n = \ln\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) - \ln\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} + o\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

De esta manera $u_n \sim \frac{2\pi}{n}$, ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$ diverge, entonces diverge también la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \ln \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$.

## 35.6. CRITERIOS DE D'ALEMBERT Y DE CAUCHY PARA SERIES CON TÉRMINOS NO NEGATIVOS

A veces resultan útiles algunos criterios especiales de convergencia de la serie. Señalemos entre ellos el así llamado criterio de D'Alembert *) y el criterio de Cauchy que se obtienen directamente del criterio de comparación, si en calidad de serie de comparación tomamos la progresión geométrica escogida de manera correspondiente.

**Teorema 8 (criterio de D'Alembert).** *Sea dada una serie con términos positivos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n > 0 \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{35.23}$$

*Así pues,*

1) *si existen un número $q$, $0 < q < 1$, y un número $n_0$ tales que para todos los $n \geqslant n_0$ se cumple la desigualdad*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q,$$

*entonces la serie dada converge;*

2) *si existe un número $n_0$ tal que para todos los $n > n_0$* se cumple la desigualdad

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1,$$

*entonces la serie dada diverge.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 < q < 1$ y supongamos que existe un número $n_0$ tal que para $n \geqslant n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q, \quad \text{es decir,} \quad u_{n+1} \leqslant qu_n.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&u_{n_0+1} \leqslant u_{n_0}q,\\
&u_{n_0+2} \leqslant u_{n_0+1}q \leqslant u_{n_0}q^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{n_0+p} \leqslant u_{n_0+p-1}q \leqslant \ldots \leqslant u_{n_0}q^p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

*) J. D'Alembert (1717 — 1783), filósofo y matemático francés.

y ya que la serie $u_{n_0}q + u_{n_0}q^2 + \ldots + u_{n_0}q^p + \ldots$ siendo la suma de una progresión geométrica decreciente infinita con denominador $q\,(0 < q < 1)$ converge, entonces por el criterio de comparación converge también la serie

$$u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \ldots + u_{n_0+p} + \ldots,$$

así como la serie original (35.23).

Si existe $n_0$ tal que para todos los $n \geqslant n_0$ se cumple la desigualdad $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, entonces

$$u_{n_0+1} \geqslant u_{n_0},$$
$$u_{n_0+2} \geqslant u_{n_0+1} \geqslant u_{n_0},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

y ya que, por suposición, $u_{n_0} > 0$, entonces el término $n$-ésimo de la serie siendo acotado inferiormente por una constante positiva no tiende a cero. Por consiguiente no se cumple la condición necesaria de convergencia de una serie (véase el teorema 1 de este párrafo) y por esto la serie (35.23) diverge. □

**Corolario.** *Supongamos que existe* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. *En este caso, si* $l < 1$, *entonces la serie* (35.23) *converge, y si* $l > 1$, *la serie* (35.23) *diverge.*

Esto se deriva directamente del teorema demostrado.

En calidad de ejemplo analicemos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Aquí $u_n = \frac{1}{n!}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, por esto según el corolario del teorema 10 la serie dada converge. Naturalmente, su convergencia se puede establecer comparándola por ejemplo, con la serie convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ejemplos con más contenido de la aplicación del criterio de D'Alembert se darán más adelante (véase, por ejemplo, el p. 36.1).

**Teorema 9 (criterio de Cauchy).** *Sea dada la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{35.24}$$

*En este caso*

1) *si existen* $q$, $0 \leqslant q < 1$, *y* $n_0$ *tales que para todos los* $n \geqslant n_0$ *es cumple la desigualdad*

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant q,$$

*entonces la serie dada converge;*

2) *si existe un número* $n_0$ *tal que para todos los* $n \geqslant n_0$ *se cumple la desigualdad*

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1,$$

*entonces la serie dada diverge.*

DEMOSTRACIÓN. Si para $n \geqslant n_0$

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant q, \quad \text{es decir,} \quad u_n \leqslant q^n,$$

entonces según el criterio de comparación la serie (35.24) converge ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ cuando $0 < q < 1$ converge. Si

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1, n \geqslant n_0,$$

entonces $u_n \geqslant 1$ y esto significa que la serie (35.24) diverge (véase el teorema 1). □

**Corolario.** *Supongamos que existe*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

*Si* $l < 1$, *la serie* (35.24) *converge y si* $l > 1$, *ella diverge.*

La demostración del corolario es evidente.

Analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Ya que $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, entonces por el corolario del teorema 9 la serie dada converge. Su convergencia se establece fácilmente con ayuda del teorema 7.

OBSERVACIÓN. Si de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n > 0, n = 1, 2, \ldots$ es conocido sólo que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1, \quad \text{ó} \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1, \tag{35.25}$$

entonces no se puede decir nada definido sobre su convergencia: la serie puede tanto converger como diverger. Por ejemplo, las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

satisfacen ambas condiciones (35.25), no obstante la primera de ellas diverge y la segunda converge.

Ejercicios. Analícese la convergencia de las series:

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \pi\sqrt{n^2 + a^2}$ $(a = \text{const} \in R)$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} \frac{n}{n+1}\right)$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \ln \frac{2n+1}{2n-1}\right)$.

10. Sea $0 < p < q < 1$. Demuéstrese que la serie
$p + q^2 + p^3 + q^4 + \ldots$
converge y $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = \infty$.

11. Sea $0 < \alpha < \beta < 1$. Demuéstrese que la serie
$\dfrac{1}{1^\alpha} + \dfrac{1}{2^\beta} + \dfrac{1}{3^\alpha} + \dfrac{1}{4^\alpha} + \ldots$
converge y $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \infty$.

## 35.7. CRITERIO INTEGRAL DE CONVERGENCIA DE LAS SERIES CON TÉRMINOS NO NEGATIVOS

Si para la serie dada (35.1) se logra escoger una función definida para $x \geqslant 1$ y tal que $f(n) = u_n$, entonces a determinadas condiciones, de la convergencia o divergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

se puede juzgar también sobre la convergencia o divergencia de la serie (35.1).

**Teorema 10 (criterio integral de convergencia de las series).** *Si la función $f(x)$, definida para todos los $x \geqslant 1$, es no negativa y decrece, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{35.26}$$

*converge si y sólo si converge la integral*

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx. \tag{35.27}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $k \leqslant x \leqslant k + 1$, en virtud del decrecimiento de la función $f(x)$ (fig. 147).

$$f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k + 1), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

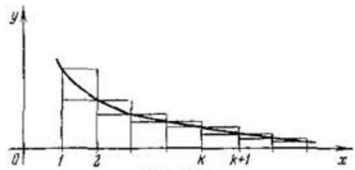



FIG. 147

por esto integrando respecto al segmento $[k, k + 1]$ tendremos

$$f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \geqslant f(k + 1), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Sumando estas desigualdades desde $k = 1$ hasta $k = n$, obtendremos

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int_1^{n+1} f(x)dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k + 1)$$

y suponiendo

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

tendremos

$$s_n \geqslant \int_1^{n+1} f(x)dx \geqslant s_{n+1} - f(1), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{35.28}$$

Si la integral (35.27) converge, entonces por el lema 1 del p. 33.3 para cualquier $n = 1, 2, \ldots$

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leqslant \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

De aquí y de la desigualdad (35.28) se deduce, que

$$s_{n+1} \leqslant f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx,$$

es decir, la sucesión de las sumas parciales de la serie (35.26) es acotada superiormente y significa según el teorema anterior que esta serie converge.

Si la serie (35.26) converge y su suma es igual a $s$, entonces por este mismo teorema, $s_n \leqslant s$ para todos los $n = 1, 2, \ldots$, y por la desigualdad (35.17) para todos los $n = 1, 2, \ldots$

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leqslant s.$$

Si ahora $\xi \geqslant 1$, entonces tomando $n$ tal que $n \geqslant \xi$ obtendremos en virtud de que la función $f$ es no negativa

$$\int_1^{\xi} f(x)dx \leqslant \int_1^{n} f(x)dx \leqslant s.$$

Así, el conjunto de todas las integrales $\int_1^{\xi} f(x)dx$, $\xi \geqslant 1$, es acotado superiormente y por esto la integral (35.27) converge (véase el lema 1 del p. 33.3). □

Este teorema a menudo facilita sustancialmente el análisis de la convergencia de las series ya que si para la serie dada se logra escoger la función $f$ correspondiente, en este caso reducir la cuestión sobre el estudio de la convergencia de la serie al estudio de la convergencia de la integral, entonces esto da la posibilidad de aplicar el aparato del cálculo integral desarrollado en el capítulo anterior.

Ejemplos. 1. Analicemos de nuevo (véase el p. 35.3) la serie

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots \tag{35.13}$$

con término $n$-ésimo $u_n = 1/n^\alpha$, $n = 1, 2, \ldots$.

En el caso dado, la función $f(x)$ señalada en el teorema se encuentra fácilmente:

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \geqslant 1.$$

Ya que la integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge cuando $\alpha > 1$ y diverge cuando $\alpha \leqslant 1$, entonces la serie (35.13) converge para $\alpha > 1$ y diverge para $\alpha \leqslant 1$.

Estos hechos fueron establecidos anteriormente por otro método en el p. 35.3 (véanse allí los ejemplos 1 y 2). Como se ve de lo anteriormente expuesto la aplicación del criterio integral de convergencia de las series al estudio de la serie (35.13) considerablemente simplificó el problema del análisis de la convergencia de esta serie.

2. Analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}. \tag{35.29}$$

Esta serie se puede fácilmente analizar con ayuda del criterio integral de convergencia: del hecho de que la integral $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge se deduce que la serie (35.29) también diverge.

Enunciemos ahora un sencillo corolario del teorema 10 que a menudo es útil en las aplicaciones.

*Si existe $n_0$ natural tal que la función no negativa $f$ decrece cuando $x \geqslant n_0$, entonces la serie*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$$

*converge si y sólo si converge la integral*

$$\int\limits_{n_0}^{+\infty} f(x)dx.$$

Este caso se reduce al analizado en el teorema con el cambio de variable $x = y + n_0 - 1$.

## 35.8*. DESIGUALDADES DE HÖLDER Y DE MINKOWSKI PARA LAS SUMAS FINITAS E INFINITAS

Sean dados los números (en general complejos) $x_1, \ldots, x_n, \ldots, y_1, \ldots, y_n,$ $< p < +\infty$ y el numéro $q$ se define por la igualdad $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (véanse el p. 20.8

y el p. 28.4* ). Entonces son válidas las desigualdades

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} \tag{35.30}$$

(desigualdad de Hölder) y

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \tag{35.31}$$

(desigualdad de Minkowski).

Su demostración se realiza por el mismo esquema que en el caso de las desigualdades integrales correspondientes (véase el p. 28.4* ).

Introduzcamos para mayor brevedad las notaciones

$$\|x\|_p \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \|y\|_q \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}. \tag{35.32}$$

Aplicando la desigualdad (20.53) $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ a

$$a = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}, \quad b = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

tendremos

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|x_i|}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}.$$

Sumando estas desigualdades por $i$ desde 1 hasta $n$ por (35.32) y la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, obtendremos:

$$\frac{1}{\|x\|_q \|y\|_q} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p\|x\|_p^p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q;$$

de este modo la desigualdad (35.30) queda demostrada.

La desigualdad de Minkowski (35.31) se deduce de la desigualdad de Hölder (35.30): de la relación evidente

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1},$$

aplicando a cada sumando en el segundo miembro la desigualdad de Hölder, obtendremos

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leqslant \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q} + \left( \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q} \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q}$$

Si el primer miembro es igual a cero, entonces la desigualdad de Minkowski es válida evidentemente; si éste no es igual a cero, entonces reduciendo ambos miembros por el factor $\left( \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{1/q}$ y observando que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q(p-1) = p$, obtendremos la desigualdad (35.31).

Con los casos particulares de las desigualdades de Hölder y de Minkowski cuando $p = q = 2$ ya nos hemos encontrado anteriormente en el § 18 (véanse (18.2) y (18.3)).

Para dos series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ cualesquiera son válidas las desigualdades análogas

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q}. \qquad (35.33)$$

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{1/p} \leqslant \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{1/p} \qquad (35.34)$$

En efecto, para todas las sumas parciales de un mismo orden de las series dadas son válidas las desigualdades de Hölder y de Minkowski. Pasando en ellas al límite cuando $n \to \infty$ obtendremos las desigualdades (35.33) y (35.34).

De las desigualdades demostradas se deduce, en particular, que si las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q$$

convergen, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$ converge, y si convergen las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q,$$

entonces converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p$.

## 35.9. SERIES DE TÉRMINOS DE SIGNO VARIABLE

En este punto se analizan las series con términos reales, cuyos signos, en general varían con la variación del número, estas series se llaman de *términos de signo variable*.

Analicemos ante todo las así llamadas series *alternadas*, es decir, las series cuyos términos son consecutivamente positivos o negativos.

**Teorema 11 (de Leibniz).** *Si*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{35.35}$$

*y*

$$u_n \geqslant u_{n+1} > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.36}$$

*entonces la serie alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \tag{35.37}$$

*converge. Además cualquier suma parcial $s_n$ de la serie (35.37) se diferencia de su suma $s$ en una magnitud menor que término siguiente $u_{n+1}$, dicho de otra forma, la magnitud absoluta del resto de la serie $r_n$ en este caso no es mayor que el valor absoluto de su primer término, es decir,*

$$|r_n| = |s - s_n| \leqslant u_{n+1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos las sumas parciales de orden par de la serie (35.37)

$$s_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} u_n.$$

Estas se pueden escribir en la forma

$$s_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2k-1} - u_{2k}), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

En virtud de la condicion (35.36) las expresiones entre paréntesis son no negativas y por esto $s_{2k} \leqslant s_{2k+2}$, es decir, la sucesión de sumas parciales de orden par de la serie (35.37) crece.

Observando que las sumas parciales $s_{2k}$ se pueden escribir también en la forma

$$s_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

y que las expresiones entre paréntesis por la condición (35.36) son no negativas y $u_{2k} > 0$, obtenemos que $s_{2k} < u_1$, es decir, la sucesión $\{s_{2k}\}$ es acotada superiormente. Del crecimiento y la acotación superior de la sucesión $\{s_{2k}\}$ se deduce que ésta converge

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = s. \tag{35.38}$$

Mostremos que las sumas parciales de orden impar de la serie (35.37) también tienden al mismo límite. En efecto

$$s_{2k+1} = s_{2k} + u_{2k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{35.39}$$

y ya que por (35.35) $\lim\limits_{k\to\infty} u_{2k+1} = 0$, entonces por (35.38) y (35.39) tenemos

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = s. \tag{35.40}$$

De (35.38) y (35.40) se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Ahora señalemos que para la serie (35.37) es válida la desigualdad

$$s_{2k} \leqslant s \leqslant s_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{35.41}$$

En efecto por un lado, ya vimos que $s$ es el límite de la sucesión creciente $\{s_{2k}\}$, por esto $s_{2k} \leqslant s$. Por otro lado

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} - (u_{2k} - u_{2k+1}) \leqslant s_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

es decir, la sucesión $\{s_{2k-1}\}$ decrece y ya que $s$ es también el límite de la sucesión $\{s_{2k-1}\}$ (véase (35.40)), entonces $s \leqslant s_{2k-1}$. De la desigualdad (35.41) se deduce

$$s - s_{2k} \leqslant s_{2k+1} - s_{2k} = u_{2k+1},$$

$$s_{2k-1} - s \leqslant s_{2k-1} - s_{2k} = u_{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

y esto significa que para todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad $|s - s_n| \leqslant u_{n+1}$. □

Si las condiciones de alternación de los signos de la serie y la monotonía se cumplen no a partir del primer término, sino comenzando desde cierto número $n_0$, entonces, cuando se cumple la condición (35.35), es decir, cuando el término general de la serie tiende a cero, la serie analizada también converge. Esto se deduce de que la eliminación de un número finito de términos de la serie no influye sobre su convergencia (véase el teorema 4 en el p. 35.2).

En calidad de ejemplo analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \tag{35.42}$$

Sus términos satisfacen, evidentemente, las condiciones del teorema 11, y por eso converge. Observando que en ella $s_1 = 1$ y $s_2 = 1/2$ para su suma $S$, tenemos la estimación

$$\frac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1. \tag{35.43}$$

A las series se extienden no todas las propiedades de las sumas finitas. Aclaremos esto en el ejemplo de la misma serie (35.42). Si

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots , \tag{35.44}$$

entonces

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots ,$$

sumando término a término esta serie con la serie (35.44) obtendremos la igualdad

$$\frac{3}{2} S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{8} + \ldots , \tag{35.45}$$

es decir, la serie formada por los mismos términos que la serie dada (35.44) tomados sólo en otro orden, por eso $\frac{3}{2} S = S$, de donde se deduce que $S = 0$ lo que contradice la desigualdad (35.43).

A pesar de la aparente evidencia de la legalidad de nuestros razonamientos hemos cometido un grave error. ¿Dónde? Un análisis detallado de esto será dado en uno de los siguientes puntos.

### 35.10. SERIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES. APLICACIÓN DE LAS SERIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES A LA INVESTIGACIÓN DE LA CONVERGENCIA DE LAS SERIES ARBITRARIAS

En este punto de nuevo se estudian las series cuyos términos en general son números complejos.

**Definición 4.** *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \in C \tag{35.46}$$

*se llama absolutamente convergente, si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \tag{35.47}$$

*converge.*

Aplicando el criterio de Cauchy de convergencia de una serie a la serie (35.47) obtendremos: *para que la serie (35.46) converja absolutamente es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los enteros $p \geqslant 0$ se cumpla la desigualdad*

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Ejemplos. 1. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{n+1}$ converge absolutamente ya que $\left|\frac{i^n}{2^n} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$ y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge.

2. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, como sabemos, converge, no obstante no absolutamente ya que la serie formada por los valores absolutos de sus términos, es decir, la serie armónica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

**Teorema 12.** *Si la serie converge absolutamente, entonces también converge simplemente.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie (35.46) converge absolutamente, es decir, la serie (35.47) converge. Entonces por la necesidad del cumplimiento de la condición de Cauchy para la convergencia de la serie (véase el teorema 5) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon$ tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los enteros $p \geqslant 0$ se cumple la desigualdad

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

De aquí y de la desigualdad $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|$ se deduce que para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $p = 0, 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon.$$

Y esto significa también en virtud de la suficiencia del cumplimiento de la condición de Cauchy para la convergencia de una serie que la serie (35.46) converge. □

OBSERVACIÓN. Se dede tener en cuenta que la propiedad del valor absoluto de la suma de no superar la suma de los valores absolutos de los sumandos permanece válida también para las series convergentes:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{35.48}$$

Esta desigualdad tiene sentido cuando su segundo miembro es finito, es decir, cuando la serie analizada converge absolutamente. En este caso el primer miembro de la desigualdad siempre tiene sentido, ya que de la convergencia absoluta de la serie se deduce su convergencia común. Formalmente la desigualdad (35.48) según nuestro acuerdo sobre la utilización del símbolo $+\infty$ (véanse las págs. 42 y 570) es cierta también para cualquier serie convergente si la serie del segundo miembro (35.48) diverge.

Para la demostración de la desigualdad (35.48) en el caso de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ observemos que para cualquier $m$ natural

$$\left|\sum_{n=1}^{m} u_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{m} |u_n|.$$

Pasando aquí al límite cuando $m \to \infty$, obtendremos la desigualdad (35.44).

Denotemos por

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* \tag{35.49}$$

la serie compuesta por los mismos términos que la serie (35.46), pero tomados, en general, en otro orden.

**Teorema 13.** *Si la serie* (35.46) *converge absolutamente, entonces la serie* (35.49) *también converge absolutamente y tiene la misma suma.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie (35.46) converge absolutamente, es decir, converge la serie (35.47) y sea la suma de la serie (35.46) igual a $s$:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.50}$$

Mostremos inicialmente que la serie (35.49) también converge y más aún su suma es igual a la suma de la serie (35.46), es decir, a $s$. Denotemos las sumas parciales de la serie (35.46) por $s_n$:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y las sumas parciales de la serie (35.49) por $s_n^*$:

$$s_m^* = \sum_{k=1}^{m} u_k^*,$$

además, pongamos

$$\bar{s} = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \quad \bar{s}_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Sea fijo arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, entonces por la convergencia de la serie (35.47) existe un número $n_\varepsilon$ tal que

$$\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| = \bar{s}_n - \bar{s}_{n_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{35.51}$$

por consiguiente se cumple también la desigualdad

$$|s - s_n| = \left| \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35.52}$$

Elijamos, más adelante, un número $m_\varepsilon$ de forma tal que la suma parcial $s_{m_\varepsilon}^*$ de la serie (35.49) contenga en calidad de sumandos todos los términos de la serie (35.46), que aparecen en la suma $s_{n_\varepsilon}$ (dicho de otro modo, el número $m_\varepsilon$ es tal que todos los términos de la serie (35.46) con números no superiores a $n_\varepsilon$, tienen en la serie (35.49) números no mayores que $m_\varepsilon$). Sea $m \geqslant m_\varepsilon$. Hagamos

$$s_m^{**} = s_m^* - s_{n_\varepsilon}.$$

Por cuanto $|s_m^{**}|$ no es mayor que la suma de los valores absolutos de los sumandos que entran en $s_m^{**}$ y por cuanto los números de estos sumandos son mayores que $n_\varepsilon$ y por consiguiente todos ellos están contenidos en la suma $\sum\limits_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n|$, entonces por (35.51) tenemos

$$|s_m^{**}| \leqslant \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35.53}$$

Utilizando (35.52) y (35.53) obtendremos cuando $m \geqslant m_\varepsilon$

$$|s - s_m^*| = |s - (s_{n_\varepsilon} + s_m^{**})| \leqslant |s - s_{n_\varepsilon}| + |s_m^{**}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto significa que

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* = s.$$

Queda demostrar que la serie (34.49) también converge absolutamente. Esto se deduce directamente de la afirmación, que acabamos de demostrar, si la aplicamos a la serie (34.47). En efecto esta serie converge absolutamente (como cualquier serie convergente con términos no negativos) y por esto, según lo demostrado, la serie $\sum_{m=1}^{\infty} |u_m^*|$ formada por los valores absolutos de la serie (34.49) no sólo converge (lo que significa también la convergencia absoluta de la serie (34.49)) sino que su suma coincide con la suma de la serie (34.47). □

**Teorema 14.** *Si la serie* (35.46) *converge absolutamente y c es un número cualquiera, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ *también converge absolutamente.*

Esto se deduce del criterio de Cauchy de convergencia de las series y de la igualdad

$$\sum_{n=1}^{n+p} |cu_k| = |c| \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|.$$

**Teorema 15.** *Si las series* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *convergen absolutamente, entonces su suma* $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ *también converge absolutamente.*

Esto se deduce del criterio de Cauchy de convergencia de las series y de la desigualdad

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k + v_k| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| + \sum_{k=n}^{n+p} |v_k|.$$

**Teorema 16.** *Si las series*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m y \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{35.54}$$

*convergen absolutamente, entonces la serie formada por todos los productos dos a dos posibles* $u_m v_n$ *de los términos de estas series, situados en cualquier orden, también converge absolutamente. Si la suma de esta serie es igual a s y la suma de las series* (35.54) *son iguales respectivamente a s' y s'', es decir,*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = s', \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = s'',$$

*entonces*

$$s = s's''. \tag{35.55}$$

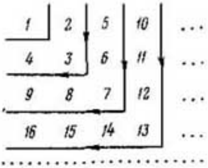
DEMOSTRACIÓN. Hagamos la siguiente tabla de los productos dos a dos de los términos de las series (35.54):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $u_1v_1$ | $u_1v_2$ | $\ldots$ | $u_1v_n$ | $\ldots$ |
| $u_2v_1$ | $u_2v_2$ | $\ldots$ | $u_2v_n$ | $\ldots$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $u_mv_1$ | $u_mv_2$ | $\ldots$ | $u_mv_n$ | $\ldots$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |

Compongamos de los elementos de esta tabla la serie

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1 + \ldots, \tag{35.56}$$

en la cual los elementos están dispuestos en el orden mostrado en el siguiente esquema donde en el lugar de cada producto de la tabla está señalado su número de orden como término de la serie (35.56):




Demostremos que la serie (35.56) converge absolutamente, es decir, que converge la serie

$$|u_1v_1| + |u_1v_2| + |u_2v_2| + |u_2v_1| + \ldots \tag{35.57}$$

Para esto, en virtud de que sus términos son no negativos es suficiente demostrar que existe al menos una subsucesión acotada superiormente de sus sumas parciales (véase el lema 2 en el p. 35.4).

Denotemos por $s_n'$ y $s_n''$ las sumas parciales de las series respectivamente

$$s' \overset{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} |u_m|, \quad s'' \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |v_n|.$$

las que por la convergencia absoluta de las series (35.54) convergen, es decir, $0 \leqslant s' < +\infty$, $0 \leqslant s'' < +\infty$. Entonces para las sumas parciales de orden $n^2$ de la serie (35.57) tendremos

$$S_1 = |u_1v_1| = s_1's_1'' \leqslant s's'',$$

$$\bar{s}_4 = |u_1v_1| + |u_1v_2| + |u_2v_2| + |u_2v_1| =$$
$$= (|u_1| + |u_2|)(|v_1| + |v_2|) = \bar{s}_2'\bar{s}_2'' \leqslant \bar{s}'',$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\bar{s}_{n^2} = |u_1v_1| + \ldots + |u_1v_n| + \ldots + |u_nv_n| + \ldots + |u_nv_1| =$$
$$= (|u_1| + \ldots + |u_n|)(|v_1| + \ldots + |v_n|) = \bar{s}_n'\bar{s}_n'' \leqslant \bar{s}'\bar{s}'',$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Así, la subsucesión de sumas parciales $\{\bar{s}_{n^2}\}$ de la serie (35.57) es acotada superiormente y por consiguiente esta serie converge. Esto significa la convergencia absoluta de la serie (35.56) y de cualquier serie obtenida por una reordenación arbitraria de sus términos (véase el teorema 13). De esta forma, cualquier serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{m_k}v_{n_k} \tag{35.58}$$

formada por todos los productos dos a dos posibles $u_mv_n$ de los términos de las series (35.54) converge y además absolutamente.

Para la demostración de las fórmulas (35.55) nos aprovechemos de que la suma de la serie (35.58) no depende del orden de sus términos y de nuevo los ubicaremos del modo más cómodo para nosotros, precisamente, analicemos de nuevo la serie (35.56). Denotando por $s_n'$ y $s_n''$ las sumas parciales de las series (35.54) para las sumas parciales $s_{n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$ , de la serie (35.56), evidentemente, obtenemos

$$s_{n^2} = s_n's_n''. \tag{35.59}$$

Pero

$$\lim_{n\to\infty} s_n' = s', \quad \lim_{n\to\infty} s_n'' = s'', \quad \lim_{n\to\infty} s_{n^2} = s,$$

por esto pasando al límite en la igualdad (35.59) cuando $n \to \infty$ obtenemos la igualdad (35.55). ☐

Los teoremas 13 — 16 muestran que las propiedades de las series absolutamente convergentes son muy parecidas a las propiedades de las sumas finitas: la magnitud de la suma de esta serie no depende del orden de los sumandos, las series absolutamente convergentes se pueden multiplicar término a término, etc. En el siguiente punto será demostrado que para las series convergentes, que no convergen absolutamente estas propiedades no tienen lugar.

OBSERVACIÓN. Como conclusión de este punto subrayemos que cuando los términos de la serie son reales o complejos, pero cambian de signo, el problema de la convergencia de esta serie no se puede resolver sólo con ayuda de la definición de orden de decrecimiento del término $n$-ésimo. Por ejemplo los términos $n$-ésimos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tienen un mismo orden cuando $n \to \infty$, no obstante la primera serie diverge y la segunda converge.

Más aún, no es difícil citar el ejemplo de dos series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, cuyos términos $n$-ésimos son equivalentes ($u_n \sim v_n$, $n = 1, 2, \ldots$), de las cuales una converge y la otra diverge.

En calidad de series tales se pueden tomar, por ejemplo, la serie con término $n$-ésimo

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

y la serie con término $n$-ésimo

$$v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

Por otro lado, aquí $u_n \sim v_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ya que

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}n}{(n+1)\ln(n+1)}$$

y por esto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1.$$

Por otro lado la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es una serie del tipo (35.37), por eso converge. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge. En efecto, si convergiera, entonces convergería también la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},$$

es decir, la serie (35.29) la cual, como ya vimos, diverge.

Sería un error, no obstante, considerar que el método de selección de la parte principal es útil sólo en el caso de series con términos reales que tienen un mismo signo. El método de selección de la parte principal puede utilizarse con éxito para aclarar la convergencia de cualquier serie. La esencia de este método en el caso analizado está basada en la siguiente observación: sea dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Si representamos sus términos de la forma $u_n = v_n + w_n$ donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge y diverge simultáneamente con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (¿por qué?). Por esto para la investigación de la convergencia de la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_n$ es conveniente tratar de representar sus términos, por ejemplo, en la forma $u_n = v_n + w_n$ de tal modo que $w_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ cuando $\alpha > 1$. Por cuanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge (incluso absolutamente) entonces la convergencia de la serie dada se reduce a la investigación de la convergencia de la serie $\sum_{n=\infty}^{\infty} v_n$. Este método, claro está, es conveniente en el caso, cuando la serie obtenida $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ se somete con más facilidad a la investigación de la convergencia, que la serie dada (compárese con la investigación análoga de la convergencia de las integrales en el p. 33.6).

Por ejemplo, analicemos la serie con término general

$$u_n = \ln\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right].$$

Por cuanto (véase la observación en el p. 13.3)

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad x \to 0,$$

entonces

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Hagamos $v_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n}$ y $w_n = u_n - v_n$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge como la diferencia de series, de las cuales una converge y la otra diverge. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge, e incluso absolutamente ya que $w_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, $n \to \infty$.

De esta forma, la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge aunque su "parte principal" $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ es una serie convergente. Así estas series son un ejemplo más de dos series cuyos términos forman sucesiones equivalentes de las cuales una converge y la otra diverge.

## 35.11. CRITERIOS DE D'ALEMBERT Y CAUCHY PARA SERIES NUMÉRICAS ARBITRARIAS

Si en el caso de la serie numérica (35.1) $u_n \neq 0$, $u_n \in C$, $n = 1, 2, \ldots$, existen un $q$, $0 < q < 1$ y un número $n_0$ tal que para todos los $n \geqslant n_0$ se cumple la desigualdad

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant q \text{ ó } \sqrt[n]{|u_n|} \leqslant q,$$

entonces por el criterio de D'Alembert, respectivamente de Cauchy (véase el p. 35.6) la serie dada converge y además absolutamente.

Si existe un número $n_0$ tal que para todos los $n \geqslant n_0$ tiene lugar la desigualdad

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqslant 1 \tag{35.60}$$

ó

$$\sqrt[n]{|u_n|} \geqslant 1, \tag{35.61}$$

entonces a base de los criterios de D'Alembert y Cauchy sólo se puede afirmar que en este caso la serie de las magnitudes absolutas de los términos de la serie (35.1), es decir, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ diverge, lo cual sólo significa que la serie dada no converge absolutamente.

En realidad, de (35.60) y de (35.61) se deduce que la serie dada (35.1) en general diverge. En efecto, como se ve de la demostración del criterio de D'Alembert, respectivamente del criterio de Cauchy, aplicable a la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (véanse los teoremas 8 y 9 en el p. 35.6) cuando se cumple cada una de las condiciones (35.60) y (35.61) por separado la sucesión $\{|u_n|\}$ no tiende a cero, por lo tanto tampoco tiende a cero la sucesión $\{u_n\}$, es decir, no se cumple la condición necesaria de convergencia de la serie.

Los criterios obtenidos de divergencia de la serie también se llaman habitualmente *criterios de D'Alembert y de Cauchy.*

## 35.12. SERIES CONVERGENTES QUE NO CONVERGEN ABSOLUTAMENTE. TEOREMA DE RIEMANN

Si una serie converge, pero no absolutamente, entonces como será mostrado a continuación ya no se puede afirmar que reordenando sus términos obtendremos una serie convergente a la misma suma. La paradoja al final del p. 35.9 se explica con esta circunstancia: la serie allí obtenida (35.45) se diferencia, en el orden de los términos, de la serie dada (35.42) convergente, pero no absolutamente y por esto no se podía afirmar que su suma es también igual a $S$. Más aún la contradicción obtenida muestra que esto a ciencia cierta no es así.

Así, la suma de la serie depende del orden de los sumandos, es decir, la ley comutativa de la suma no tiene lugar para las series convergentes no absolutamente.

Si en la serie dada agrupamos de alguna manera sus términos sin infringir su orden y los sumamos, entonces la sucesión de las sumas parciales de la serie obtenida será una subsucesión de las sumas parciales de la serie inicial. Por esto si la serie original converge, entonces convergerá también la nueva serie obtenida, además las sumas de ambas series serán iguales. No obstante, si la serie dada diverge, entonces la segunda serie puede converger. Por ejemplo, la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + + \ldots$ diverge. Al agrupar dos a dos sus términos $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - - 1) + \ldots$ obtendremos una serie convergente. De esta forma, en general, para las series no es cierta tampoco la ley asociativa de la suma.

Analicemos algunas propiedades de las series convergentes, pero no absolutamente, con términos reales. Sea dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.62}$$

Denotemos por $u_1^+, u_2^+, \ldots, u_n^+, \ldots$ sus términos no negativos: $u_n^+ \geqslant 0$, y por $-u_1^-, -u_2^-, \ldots, -u_n^-, \ldots$ sus términos negativos: $u_n^- > 0$, tomados en el mismo orden que estén situados en la serie (35.56). Analicemos las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+, \tag{35.63}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-. \tag{35.64}$$

Señalemos que si la serie (35.63) contiene sólo un número finito de términos diferentes de cero, o la serie (35.64), todos los términos de la cual por definición son distintos de cero, está formada sólo por un número finito de términos, entonces comenzando desde un número, todos los términos de la serie original (35.62) tienen el mismo signo y por lo tanto su convergencia es equivalente a la convergencia absoluta.

**Lema 3.** *Si la serie* (35.62) *converge, pero no absolutamente, entonces ambas series* (35.63) *y* (35.64) *divergen.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie (35.62) converge, es decir, existe el límite finito

$$\lim_{n\to\infty} s_n \tag{35.65}$$

donde $s_n$ son sus sumas parciales, $n = 1, 2, \ldots$. Denotemos por $s_m^+$, $m = 1, 2, \ldots$, la suma parcial de orden $m$ de la serie (35.63) y por $s_k^-$, $k = 1, 2, \ldots$, la suma parcial de orden $k$ de la serie (35.64). Para comodidad hagamos además $s_0^+ = s_0^- = 0$. Entonces para cualquier natural $n$ existen $m = m(n)$ y $k = k(n)$ enteros no negativos tales que

$$s_n = s_m^+ - s_k^-, \quad n = m + k; \tag{35.66}$$

además, por cuanto la serie (35.62) converge no absolutamente, entonces ambas series (35.63) y (35.64) contienen un número infinito de términos diferentes de cero y por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty} m(n) = \lim_{n\to\infty} k(n) = +\infty. \tag{35.67}$$

Denotemos ahora por $\bar{s}_n$ la suma parcial de orden $n$ de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{35.68}$$

Entonces evidentemente

$$s_n = s_m^+ + s_k^- . \tag{35.69}$$

Por cuanto la serie dada (35.62) no converge absolutamente, es decir, por cuanto diverge la serie (35.68) entonces

$$\lim_{n \to \infty} s_n = +\infty. \tag{35.70}$$

Ambos sumandos del segundo miembro de la igualdad (35.69) son no negativos, por eso de (35.70) y de (35.67) se deduce que al menos uno de los sumandos señalados tiende al infinito cuando $n \to \infty$. Volviéndonos ahora a la igualdad (35.66) vemos que el primer miembro de esta igualdad tiene límite finito (véase (35.65)) y una de las sumas $s_m^+$ y $s_k^-$, según lo demostrado, tiende a infinito cuando $n \to \infty$. Esto es posible sólo con la condición de que la segunda de las sumas analizadas también tiende a infinito cuando $n \to \infty$.

Así, ambas series (35.63) y (35.64) divergen. □

**Teorema 17 (de Riemann).** *Si la serie (35.62) converge, pero no absolutamente, entonces, cualquiera que sea el número $A$, se pueden reordenar los términos de esta serie de tal forma que la suma de la serie obtenida será igual a $A$.*

DEMOSTRACIÓN. Analicemos de nuevo las series (35.63) y (35.64). Por el lema

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^+ = +\infty, \tag{35.71}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^- = +\infty. \tag{35.72}$$

Sea para mayor exactitud $A \geqslant 0$. Escojamos un número $n_1$ tal que

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1}^+ > A, \tag{35.73}$$

además en el caso cuando el número $n_1 = 1$ no satisface esta condición, la elección de $n_1$ la llevaremos a cabo aún de forma tal que se cumpla también la desigualdad

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1-1}^+ \leqslant A. \tag{35.74}$$

La existencia de los números $n_1$ para los cuales se cumple la condición (35.73) se deduce de la condición (35.71), para que además se cumpla también la condición (35.74) es necesario tomar el menor de estos números $n_1$.

Más adelante escojamos de la serie (35.64) los $n_2$ primeros términos tales que

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- < A,$$

además, en el caso cuando el número $n_2 = 1$ no satisface esta condición, la elección de $n_2$ la llevaremos a cabo de forma tal que se cumpla también la desigualdad

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1-1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2-1}^- \geqslant A.$$

La existencia de tal número $n_2$ se demuestra partiendo de (35.72) análogamente a la existencia del número $n_1$.

Escojamos de nuevo una subserie de la serie (35.63) con términos hasta cierto número $n_3$ de tal forma que se cumple la desigualdad

$$u_1^+ + \ldots u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3-1}^+ > A$$

y (cuando $n_3 > n_1 + 1$) la desigualdad

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3-1}^+ \leqslant A.$$

Continuando este proceso obtendremos la serie

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots$$
$$\ldots + u_{n_3}^+ - u_{n_2+1}^- - \ldots - u_{n_4}^- + \ldots . \quad (35.75)$$

Para la sucesión de sus sumas parciales

$$s_{n_1}, s_{n_1+n_2}, s_{n_2+n_3}, \ldots s_{n_k+n_{k+1}}, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

a base de la construcción se cumplen las desigualdades

$$s_{n_1} > A, s_{n_1+n_2} < A, s_{n_2+n_3} > A, \ldots,$$

además, la desviación del número $A$ de cada una de las sumas parciales señaladas $s_{n_k+n_{k+1}}$ no es mayor que su último término

$$|A - s_{n_k+n_{k+1}}| \leqslant u_{n_{k+1}}^{\pm}. \quad (35.76)$$

Aquí por $u_{n_{k+1}}^{\pm}$ está *denotada* la magnitud absoluta del término de la serie (34.75) con número $n_{k+1}$ en la serie (34.75) y con el índice superior correspondiente "+" ó "–".

Por la convergencia de la serie original (35.62) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

y ya que cuando $k \to \infty$ el número del término $u_{n_{k+1}}^{\pm}$ en la serie (35.62) también tiende a $\infty$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_{k+1}}^{\pm} = 0.$$

Por esto de (35.76) se deduce que

$$\lim_{k\to\infty} s_{n_k+n_{k+1}} = A. \quad (35.77)$$

Si ahora tomamos cualquier suma parcial $s_n$ de la serie (35.75), entonces por la construcción de esta serie siempre se puede hallar un número $k = k(n)$ tal que tendrá lugar o bien la desigualdad

$$s_{n_k+n_{k+1}} \leqslant s_n \leqslant s_{n_{k+1}+n_{k+2}},$$

o bien la desigualdad

$$s_{n_k+n_{k+1}} \geqslant s_n \geqslant s_{n_{k+1}+n_{k+2}},$$

y por esto de (35.77) se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = A. \ \square$$

Ejercicio 12. Demuéstrese que si la serie (35.62) converge pero no absolutamente, entonces se puede reordenar sus términos de forma tal que la serie obtenida divergerá. En particular se puede hacer de forma tal que su suma sea igual a $+\infty$, $-\infty$, e incluso que la sucesión de sus sumas parciales no tenga límite finito ni infinito.

## 35.13. TRANSFORMACIÓN DE ABEL. CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE DIRICHLET Y DE ABEL

En este punto serán demostrados los criterios suficientes de convergencia de series numéricas, aplicables también para las series con términos complejos.

Preliminarmente analicemos una transformación de las sumas del tipo

$$S = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \tag{35.78}$$

donde $a_i$, $b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ son números complejos. Hagamos

$$B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \ldots, B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

entonces

$$b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, \ldots, b_n = B_n - B_{n-1}$$

y

$$S = a_1B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \ldots + a_n(B_n - B_{n-1}).$$

Abriendo los paréntesis y agrupando nuevamente los términos, obtenemos la igualdad

$$S = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_nB_n.$$

De esta forma, finalmente tenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_ib_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})B_i + a_nB_n. \tag{35.79}$$

Esta transformación de las sumas del tipo (35.78) se denomina *transformación de Abel**), ella es en cierto sentido un análogo de la integración por partes. Esta analogía se ve especialmente si escribimos la fórmula (35.79) de la forma

$$\sum_{i=2}^{n} a_i(B_i - B_{i-1}) = (a_nB_n - a_1B_1) - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)B_i.$$

Demostremos un lema con ayuda de la transformación de Abel.

**Lema 4 (desigualdad de Abel).** *Si*

$$a_i \geqslant a_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{35.80}$$

*ó*

$$a_i \leqslant a_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, n-1\ {}^{**)} \tag{35.81}$$

---

*) N. Abel (1802 — 1829), matemático noruego.

**) De estas desigualdades se deduce que los números $a_i$, $i = 1, 2, \ldots n$, son reales.

*y*

$$|b_1 + \ldots + b_i| \leqslant B, \quad b_i \in C, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{35.82}$$

*entonces*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leqslant B(|a_1| + 2|a_n|). \tag{35.83}$$

En efecto por las condiciones (35.80) ó (35.81) todas las diferencias $a_i - a_{i+1}$ en la fórmula (35.79) son de un mismo signo y por esto en virtud de las fórmulas (35.79) y la condición (35.82) tenemos:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| \, |B_i| + |a_n| \, |B_n| \leqslant$$

$$\leqslant B \left[ \left| \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) \right| + |a_n| \right] = B[|a_1 - a_n| + |a_n|] \leqslant B[|a_1| + 2|a_n|]. \quad \square$$

Es sustancial prestar atención a que en la desigualdad de Abel la estimación de la suma analizada se da a través del primero y el último de sus términos y no depende del número de sumandos en esta suma.

**Teorema 18 (criterio de Dirichlet).** *Sea dada la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{35.84}$$

*tal que la sucesión $\{a_n\}$ tiende a cero monótonamente y la sucesión de sumas parciales $\{B_n\}$ de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n \in C, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

*es acotada, entonces la serie* (35.78) *converge.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la acotación de la sucesión $\{B_n\}$ existe un número $B > 0$ tal que $|B_n| \leqslant B$ para todos los $n = 1, 2, \ldots$. De aquí se deduce que para cualquier $n = 2, 3, \ldots$ y cualquier entero $p \geqslant 0$

$$\left| \sum_{i=n}^{n+p} b_i \right| = |B_{n+p} - B_{n-1}| \leqslant |B_{n+p}| + |B_{n-1}| \leqslant 2B. \tag{35.85}$$

Sea dado $\varepsilon > 0$. De la condición $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ se deduce la existencia de un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}. \tag{35.86}$$

Ahora aplicando la desigualdad de Abel (35.83) a la suma $\sum\limits_{i=n}^{n+p} a_i b_i$ donde $n \geqslant n_\varepsilon$ y prestando atención a las desigualdades (35.85) y (35.86) obtendremos:

$$\left| \sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i \right| \leqslant 2B(|a_n| + 2|a_{n+p}|) < \varepsilon,$$

de aquí, por el criterio de Cauchy se deduce que la serie (35.84) converge. $\square$

En calidad de ejemplo analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n}. \tag{35.87}$$

Ante todo, si $\alpha \neq 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} k\alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\alpha\right]}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2}\alpha \operatorname{sen} \frac{n}{2}\alpha}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

y por esto

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\alpha \right| \leqslant \frac{1}{\left|\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Si $\alpha = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, entonces todos los términos de las sumas $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\alpha$ son iguales a cero, por esto, estas sumas para cualquier $n$ son iguales a cero y por consiguiente acotadas. De esta forma para todos los $\alpha$, las sumas $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\alpha$ son acotadas.

Por otro lado la sucesión $\{1/n\}$ decrece monótonamente y tiende a cero, por esto por el criterio de Dirichlet la serie (35.87) converge para cualquier $\alpha$.

Observemos que el criterio de Leibniz (véase el p. 35.9) se deduce del criterio de Dirichlet. En efecto, si en la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \tag{35.88}$$

donde $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$, hacemos $b_n = (-1)^n$, entonces, evidentemente, las sumas $b_1 + \ldots + b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, son iguales a cero o a la unidad y por esto son acotadas; en este caso en virtud del criterio de Dirichlet la serie (35.88) converge.

De la desigualdad de Abel (35.88) se puede obtener otro criterio más de convergencia de una serie.

**Teorema 19 (criterio de Abel).** *Si la sucesión* $\{a_n\}$ *es monótona y acotada, y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n \in C$, $n = 1, 2, \ldots$ *, converge, entonces la serie* (35.78) *también converge.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la acotación de la sucesión $\{a_n\}$ existe un número $M > 0$ tal que para todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad $|a_n| \leqslant M$.

Sea ahora dado $\varepsilon > 0$. De la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ se deduce la existencia de un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los enteros $p \geqslant 0$ se cumple la desigualdad $\left| \sum_{k=0}^{n} b_{n+k} \right| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Por esto para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los enteros $p \geqslant 0$ por el lema 4, es válida la desigualdad

$$\left| \sum_{k=0}^{p} a_{n+k} b_{n+k} \right| < \frac{\varepsilon}{3M} (|a_n| + 2|a_{n+p}|) < \varepsilon.$$

Por el criterio de Cauchy de convergencia de las series esto significa que la serie (35.84) converge. □

Señalemos que el teorema 19 puede ser obtenido del teorema 18. En efecto, si se cumplen las condiciones del teorema 19, entonces por la monotonía y la acotación de la secesión $\{a_n\}$ existe el límite finito $a = \lim_{n \to \infty} a_n$ y por consiguiente la sucesión $c_n = a_n - a$, $n = 1, 2, \ldots$ , tiende a cero monótonamente. La sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es acotada ya que esta serie converge por condición. Por esto, según el teorema 18 la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n$ converge. Pero $c_n b_n = a_n b_n - a b_n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a b_n = a \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también converge. Por consiguiente, como suma de dos series convergentes, converge también la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ejemplo. Investigamos la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha \cos \frac{\pi}{n}}{\ln \ln n}. \tag{35.89}$$

Observemos que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\ln \ln n}$ converge por el criterio de Dirichlet: la sucesión $\frac{1}{\ln \ln n}$ tiende a cero monótonamente y la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{sen} n\alpha$ es acotada (véase el ejemplo anterior). La sucesión $\cos\frac{\pi}{n}$, $n = 2, 3, \ldots$, es monótona, por esto, según el criterio de Abel la serie (35.89) converge para todos los $\alpha$.

### 35.14.*. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LOS RESTOS DE LAS SERIES CONVERGENTES Y DE LAS SUMAS PARCIALES DE ALGUNAS SERIES DIVERGENTES

De forma semejante a las integrales impropias, para las series es necesario a veces aclarar no sólo la cuestión de su convergencia, sino en el caso de convergencia de la serie estimar su velocidad, y en el caso de divergencia aclarar el carácter del comportamiento de sus sumas parciales cuando crece su número.

En el caso de las series de tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

donde $f$ es una función decreciente no negativa, para problemas semejantes a veces se logra obtener respuesta con ayuda del método aplicado en la demostración del criterio integral de convergencia de las series (véase el p. 35.7). En efecto, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, y por consiguiente converge la integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$, entonces, denotando como siempre, por $r_n$ el resto de la serie analizada obtendremos la desigualdad

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} f(x)dx = \int_{n}^{+\infty} f(x)dx. \tag{35.90}$$

Esta es la estimación buscada del resto de la serie que muestra que cuando $n \to \infty$ este resto decrece no más lento que la integral $\int_n^{+\infty} f(x)dx$.

Análogamente se obtiene la estimación inferior para el resto de la serie:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \geqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)dx = \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx. \tag{35.91}$$

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ diverge y por consiguiente diverge también la integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$, entonces, observando que

$$0 \leqslant f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k) - f(k+1)$$

y sumando estas desigualdades por $k$ desde 1 hasta $n$, obtendremos:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)dx \leqslant f(1) - f(n+1) < f(1).$$

De las desigualdades anteriores se deduce que la sucesión

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

crece monótonamente y es acotada superiormente y por eso tiende a un límite finito. Dicho de otro modo, existe una constante $c$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \left[ \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)dx \right] = c. \tag{35.92}$$

Esta igualdad se puede transcribir en la forma

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_{1}^{n+1} f(x)dx + c + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.93}$$

donde $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$. Ella muestra que con exactitud hasta una sucesión infinitesimal las sumas parciales de la serie divergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ crecen, así como $\int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx + c$ donde $c$ es cierta constante.

Ejemplos. 1. Analicemos la serie armónica $\sum\limits_{n=1}^{n} \dfrac{1}{n}$, que suponiendo $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \geqslant 1$, escribiremos en la forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \geqslant 1$ satisface las condiciones del teorema 10 y por cuanto $\int\limits_{1}^{n+1} \dfrac{dx}{x} = \ln(n+1)$, entonces de lo demostrado se deduce que existe una constante $C$ tal que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + C + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$. Esta constante $C$ se llama *constante de Euler*. Observando que $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \to 0$ cuando $n \to \infty$ en la fórmula obtenida se puede sustituir $\ln(n+1)$ por $\ln n$ (además, naturalmente, varía la sucesión $\varepsilon_n$, pero ésta permanece siendo una sucesión infinitesimal)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{35.94}$$

Es curioso observar que hasta ahora no se logra aclarar la naturaleza de la constante euleriana en el sentido que no se conoce incluso si es un número racional o no.

De la fórmula (35.94) evidentemente se deduce la igualdad asintótica

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \ln n, \quad n \to \infty.$$

2. Analicemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

En este caso tomemos la función $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \geqslant 1$, entonces

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$

De (35.92) y (35.93) para el caso dado se deduce que existe una constante $c_\alpha$, tal que

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} + c_\alpha + \varepsilon_n,$$

donde $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. De aquí obtenemos la igualdad asintótica

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

3. Analicemos la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$.

Tomando de nuevo en calidad de función $f$ la función $\frac{1}{x^\alpha}$ y observando que

$$\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

en virtud de las fórmulas (35.90) y (35.91) obtendremos:

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}},$$

de donde

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

4. Analicemos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \qquad (35.95)$$

Ya sabemos que esta serie converge y que su límite es igual al número (véase el ejemplo 6 en el p. 4.9):

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{35.96}$$

Estimemos el resto $r_n$ de esta serie

$$0 = r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots\right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n!(n+1)^2} < \frac{1}{n!n}. \tag{35.97}$$

Por consiguiente si $s_n$ es una suma parcial de la serie (35.96), entonces

$$e = s_n + r_n \tag{35.98}$$

y por la desigualdad (35.97) es válida la siguiente estimación del error al cambiar $e$ por $s_n$:

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}.$$

De esta forma el número $e$ se puede calcular aproximadamente en forma de la suma

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

además, la estimación obtenida señala la exactitud de las aproximaciones obtenidas.

OBSERVACIÓN. Si hacemos

$$\theta_n \overset{\text{def}}{=} r_n n! n,$$

entonces de (35.97) obtendremos

$$0 < \theta_n < 1,$$

y por consiguiente en virtud de (35.98)

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}, \quad 0 < \theta_n < 1, \quad n = 1, 2, \dots \tag{35.99}$$

De aquí se deduce fácilmente que el número $e$ es irracional. En efecto si $e$ fuera un número racional: $e = \frac{m}{n}$, $m \in N$, $n \in N$, entonces por (35.99) sería válida la igualdad

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n},$$

de donde

$$n!m - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) n!n = \theta_n.$$

Pero esta igualdad es imposible ya que a la izquierda aparece un número entero y a la derecha $\theta_n$, donde $0 < \theta_n < 1$. □

## 35.15. SOBRE LA SUMABILIDAD DE SERIES POR EL MÉTODO DE LAS MEDIAS ARITMÉTICAS

A veces tiene interés el estudio de las series divergentes, es decir, de las series cuyas sumas parciales no tienden a un límite finito. Como ya vimos series semejantes dan la posibilidad de obtener fórmulas asintóticas (véanse el p. 35.14* y también el p. 37.10*). El estudio de las series divergentes es conveniente en particular en el caso cuando para ellas se logra definir con el método adecuado el concepto de suma. Los distintos métodos de definición de las sumas de series se llaman *métodos de sumación de series*. El método de sumación de una serie se llama regular si para una serie convergente su suma definida por este método coincide con su suma ordinaria (en este caso se dice: el método regular suma a la serie convergente a su suma).

Analicemos el así llamado método de sumación de la serie con las medias aritméticas de sus sumas parciales. Sea dada la serie

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

y sea

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

una sucesión de sus sumas parciales. Denotemos por $\sigma_n$ la media aritmética de los primeros $n$ términos de esta sucesión

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}.$$

**Definición 5.** *Una serie se llama sumable por el método de las medias aritméticas al número $\sigma$, si la sucesión $\{\sigma_n\}$ de las medias aritméticas de sus sumas parciales converge a $\sigma$:*

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma.$$

El método de sumación con las medias aritméticas es un método regular de sumación, pues, del hecho de que cierta sucesión $\{x_n\}$ tiene límite se deduce que la sucesión compuesta por las medias aritméticas de sus primeros $n$ términos

$$\left\{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

tiene ese mismo límite (véase el ejemplo 5 en el p. 3.1).

Por otro lado, existen series divergentes que se suman por el método de las medias aritméticas. Tal ejemplo es la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{35.100}$$

En este caso $s_{2k} = 0$, $s_{2k-1} = 1$, $\sigma_{2k} = \frac{1}{2}$, $\sigma_{2k-1} = \frac{k}{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$, es decir, la serie (35.100) se suma por el método de las medias aritméticas.

Con la aplicación de la sumación de las series por el método de las medias aritméticas nos encontraremos en el p. 55.6.

Ejercicios. Investíguense la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{-n}}{n^3+1}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n \ln n}{n^2}$.

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$.

22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{n+1}{n-1}$.

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln\frac{n-1}{n+1}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right]$.

25. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}\right]$.

**Problema 23 (criterio de Du Bois Reymond*) de convergencia de una serie).** Demuéstrese que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ($a_n$ y $b_n$ son números complejos) converge, si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente.

*) P. Du Bois Reymond (1831 — 1899), matemático alemán.

**Problema 24 (criterio de Dedekind de convergencia de una serie).** Demuéstrese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ($a_n$ y $b_n$ son números complejos) converge, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_{n+1})$ converge absolutamente, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son acotadas.

# § 36. SUCESIONES FUNCIONALES Y SERIES DE FUNCIONES

## 36.1. CONVERGENCIA DE SUCESIONES FUNCIONALES Y SERIES DE FUNCIONES

En el presente párrafo analizaremos las sucesiones y series cuyos términos son ciertas funciones de valores complejos, es decir, las sucesiones

$$f_n(x) \in C, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.1}$$

y respectivamente las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad u_n(x) \in C, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{36.2}$$

Para cada valor fijo del argumento $x$ estas sucesiones y series, evidentemente, representan las sucesiones y series numéricas y analizadas.

Sea $X$ cierto conjunto de elementos, en particular, el conjunto de puntos de una recta, de un plano de un espacio $n$-dimensional o en general de elementos de naturaleza arbitraria y sea (36.1), una sucesión de funciones que están definidas sobre el conjunto $X$ y cuyos valores son en general números complejos.

**Definición 1.** *La sucesión* (36.1) *se llama acotada sobre el conjunto $X$, si existe una constante $M > 0$ tal que para todos los $x \in X$ y todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumplen las desigualdades*

$$|f_n(x)| \leqslant M.$$

(A veces en este caso la sucesión (36.1) se llama también *uniformemente acotada.*)

**Definición 2.** *La sucesión* (36.1) *se llama decreciente (creciente) sobre el conjunto $X$ si para todos los $x \in X$ y todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumplen las desigualdades*

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$$

*(respectivamente, si para todos los $x \in X$ y todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumplen las desigualdades*

$$f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)).$$

Esta definición, evidentemente, supone que las funciones $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, toman valores reales.

**Definicion 3.** *La sucesión* (36.1) *se llama convergente en el punto**) $x_0 \in X$, *si la sucesión numérica* $\{f_n(x_0)\}$ *converge.*

*) Llamamos puntos a los elementos del conjunto $X$.

*La sucesión* (36.1) *se llama convergente sobre el conjunto $X$ si converge en cada punto del conjunto $X$.*

*Si* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x \in X$, *entonces se dice que la sucesión* (36.1) *converge a la función* $f(x)$, $x \in X$.

Una definición análoga se puede dar también para la serie (36.2).

**Definición 3'**. *La serie* (36.2) *se llama convergente en el punto $x_0 \in X$ si converge la serie numérica* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

*La serie* (36.2) *se llama convergente sobre el conjunto $X$ si converge en cada punto de este conjunto.*

**Definición 4.** *La serie* (36.2) *se llama convergente absolutamente sobre el conjunto $X$ si sobre el conjunto $X$ converge la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$. De forma semejante al caso de las series numéricas, la suma

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

se llama suma parcial $n$-ésima de la serie (36.2), el límite de las sumas parciales de la serie (36.2) convergente sobre el conjunto $X$ se llama su *suma* $s(x)$

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

La serie

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \tag{36.3}$$

se llama *resto n*-ésimo *de la serie* (36.2). El resto de la serie converge sobre $X$ si y sólo si sobre $X$ converge la misma serie (36.2). Si en este caso la suma del resto de la serie la denotamos por $r_n(x)$, entonces

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x).$$

Como en el caso de las series numéricas, por definición, cada serie de funciones es un par de sucesiones $\{u_n(x)\}$ y $\{s_n(x)\}$ donde $u_n(x)$ son sus términos y $s_n(x)$, sus sumas parciales

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Además para cada sucesión funcional (36.1) existe la serie (36.2) para la cual es una sucesión de sus sumas parciales. Los términos de esta serie se definen unívocamente

$$u_1(x) = f_1(x), \quad u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \ldots$$

Esta circunstancia da la posibilidad de parafrasear cualquier teorema, demostrado para las series de funciones, en el teorema correspondiente para las sucesiones funcionales y viceversa. Utilizaremos repetidas veces esta circunstancia.

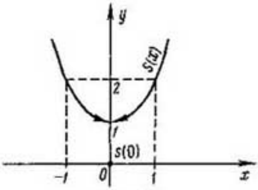



FIG. 148

Ejemplos 1. Sea dada la serie

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \tag{36.4}$$

$z$ es un número complejo. Investiguemos su convergencia absoluta, es decir, la convergencia de la seire con término $n$-ésimo $u_n = \frac{|z|^n}{n!}$. Aplicando el criterio de D'Alembert obtendremos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$$

para cualquier complejo $z$. De esta forma la serie (36.4) converge absolutamente y, entonces, sencillamente converge para cualquier complejo $z$ o, como se dice comúnmente, sobre todo el plano complejo.

2. Estudiemos la convergencia de la serie

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots, \tag{36.5}$$

$x$ es número real. Esta serie converge para todos los $x$. En efecto, si $x \neq 0$, entonces tenemos la suma de una progresión geométrica con denominador

$$q = \frac{1}{1+x^2}, \quad 0 < q < 1.$$

Y en este caso la suma $s(x)$ de la serie (36.5) se calcula fácilmente:

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Si $x = 0$, entonces todos los términos de la serie (36.5) son iguales a cero, por esto evidentemente la serie converge y $s(0) = 0$.

De esta forma

$$(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x = 0. \\ 1 + x^2 & \text{para } x \neq 0. \end{cases}$$

La gráfica de la función $s(x)$ está representada en la fig. 148.

Como se ve, a pesar de que todos los términos de la serie (36.5) son funciones continuas y la serie converge en todos los puntos del eje real, su suma es una función discontinua. Por consiguiente en el caso de las series convergentes (36.2) cuyos términos son funciones reales continuas $u_n(x)$ su suma $s(x)$, en general, no es continua, es decir

$$\lim_{x \to x_0} s(x) \neq s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

o lo que es lo mismo

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

De esta forma, el límite de la suma de un número infinito de sumandos no es igual obligatoriamente a la suma de sus límites.

La serie analizada (36.5) muestra, cómo en procesos límites (la progresión geométrica) de funciones continuas sencillas surgen funciones discontinuas que son de naturaleza mucho más compleja.

En el futuro aclararemos las condiciones, para las cuales se puede garantizar la continuidad de la suma de una serie convergente de funciones continuas.

Ejercicios.. Investiguense la convergencia y la convergencia absoluta de las series:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \operatorname{sen} nx}{1+n^2}$.

## 36.2. CONVERGENCIA UNIFORME DE LAS SUCESIONES FUNCIONALES

**Definición 5.** *Sean dadas la sucesión de funciones* (36.1) *y la función $f$, definidas sobre el conjunto $X$. Diremos que la sucesión señalada converge a la función $f$ uniformemente sobre el conjunto $X$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $n_\varepsilon$ tal que si $n \geqslant n_\varepsilon$ entonces para todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{36.6}$$

*La sucesión* (36.1) *se llama convergente uniformemente sobre el conjunto $X$, si existe una función $f$ a la cual ella uniformemente converge sobre $X$.*

Es evidente que si la sucesión (36.1) converge uniformemente a la función $f$ sobre el conjunto $X$, entonces también converge sencillamente a esta función sobre $X$.

Si la sucesión $\{f_n\}$ converge sobre el conjunto $X$ a la función $f$, entonces escribiremos esto simbólicamente de la siguiente forma

$$f_n \underset{X}{\to} f.$$

Si esta sucesión converge uniformemente sobre $X$ a la función $f$, entonces escribiremos

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f.$$

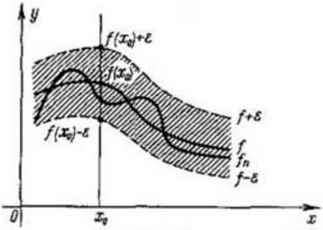



FIG. 149

Observemos que si la sucesión (36.1) converge sencillamente a la función $f$ sobre el conjunto $X$, entonces esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $x \in X$ existe el número $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ dependiente tanto de $\varepsilon$, como de $x$, tal que para todos los números $n \geqslant n_0$ tiene lugar la desigualdad (36.6).

La esencia de la convergencia uniforme de una sucesión de funciones consiste en que para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede elegir un número $n_\varepsilon$ dependiente sólo del $\varepsilon$ dado y no dependiente de la elección del punto $x \in X$, tal que para $n \geqslant n_\varepsilon$ la desigualdad (36.6) se cumplirá en todos los puntos sobre el conjunto $X$, es decir, "las gráficas" de las funciones $f_n$ estarán situadas en la "$\varepsilon$-franja" que rodea a la gráfica de la función $f$ (fig. 149).

De esta forma, en el caso de la convergencia uniforme para cualquier $\varepsilon > 0$, para todos los $n$ suficientemente grandes (precisamente para $n \geqslant n_\varepsilon$), los valores de las funciones $f_n$ aproximan a la función $f$ con un error menor que $\varepsilon$, en todos los puntos del conjunto $X$.

Escribamos, para mayor claridad, las definiciones de sucesiones convergentes y convergentes uniformemente sobre el conjunto $X$ con ayuda de los símbolos de existencia y universalidad:

$$f_n \underset{X}{\to} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists n_\varepsilon)(\forall n \geqslant n_\varepsilon) |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon)(\forall x \in X)(\forall n \geqslant n_\varepsilon): |f_n/(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

En esta escritura una definición se diferencia de la otra por la permutación de los símbolos $(\forall x \in X)$ y $(\exists n_\varepsilon)$.

Ejemplos. 1. La sucesión

$$1, x, x^2, \dots, x^n \dots \tag{36.7}$$

sobre el segmento $[0, q]$, $0 < q < 1$, converge uniformemente a la función idénticamente igual a cero. En efecto, si $0 \leqslant x \leqslant q$, entonces

$$0 \leqslant x^n \leqslant q^n, \quad n = 1, 2, \dots \tag{36.8}$$

Por cuanto $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo existe un $n_\varepsilon$ tal que

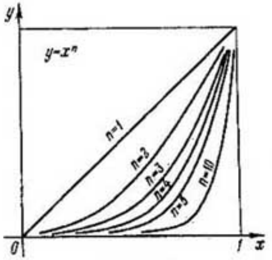



FIG. 150

$q^n < \varepsilon$ para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$. En virtud de la desigualdad (36.8) $0 \leqslant x^n < \varepsilon$ para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in [0, q]$.

2. La misma sucesión (36.7) sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$ también, evidentemente converge a la función idénticamente igual a cero: $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, $0 \leqslant x < 1$. No obstante en este caso la convergencia ya no es uniforme (fig. 150). En efecto, si la sucesión $x^n$, $n = 1, 2, \dots$, convergiera uniformemente sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$ a cierta función, entonces también convergería sencillamente a esta función. Por esto la sucesión (36.7) puede, sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$, uniformemente converger, sólo a la función igual a cero en todos los puntos de este intervalo semiabierto.

Observemos que para cualquier $n$ natural fijo $\lim\limits_{x\to 1} x^n = 1$. Por consiguiente cualquiera que sea $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, para un $n$ fijo se halla un $x_\varepsilon$, $0 < x_\varepsilon < 1$, tal que $x_\varepsilon^n \geqslant \varepsilon$ (por ejemplo, para $x_\varepsilon = \sqrt[n]{\varepsilon}$ tendremos $x_\varepsilon^n = \varepsilon$). Por esto para un $\varepsilon$ fijo, $0 < \varepsilon < 1$, no existe un número $N$ tal que para todos los $n \geqslant N$ y todos los $x \in [0, 1)$ se cumplirá la desigualdad (36.6) cuando $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$, $0 \leqslant x < 1$. Más aún, cualquiera que sea $N$ que tomemos, para cada $n \geqslant N$ se encuentra un $x \in [0, 1)$ tal que para él se cumplirá la desigualdad contraria a la desigualdad (36.6), es decir,

$$|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$$

(en calidad de $x$ concreto aquí podemos tomar por ejemplo, $x_\varepsilon$).

Así la convergencia no uniforme de la sucesión (36.7) sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$ está demostrada. Observemos que de los razonamientos realizados se deduce que la sucesión (36.7) tampoco converge uniformemente sobre cualquier intervalo del tipo $(r, 1)$ donde $0 \leqslant r < 1$, en particular, sobre el intervalo $(0, 1)$.

Se debe prestar atención a que si la sucesión de las funciones $f_n(x)$ definidas sobre el conjunto $X$ no converge uniformemente sobre cierto subconjunto $X_0 \subset X$, entonces a ciencia cierta no converge uniformemente tampoco sobre el propio conjunto $X$; si las condiciones de la definición 1 no se cumplen para todos los puntos $x \in X_0$ entonces éstas, a ciencia cierta no se cumplen para todos los puntos del conjunto $X$. Al mismo tiempo, si la sucesión de funciones converge uniformemente sobre determinado conjunto, entonces tanto mucho converge uniformemente sobre cada uno de sus subconjuntos.

De aquí se deduce, por ejemplo, que la sucesión (36.7) convergente sobre el segmento $[0, 1]$ a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{cuando} \quad x = 1, \end{cases}$$

no converge sobre este uniformemente ya que no converge uniformemente sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$.

Pasemos a la descripción de los criterios de convergencia uniforme. Para la función $f$ y la sucesión de funciones $\{f_n\}$ dadas sobre cierto conjunto $X$ analizaremos la sucessión de números (finitos o infinitos)

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.9}$$

pertenecientes, en general, al conjunto ampliado de los números reales $\overline{R}$ (véase el p. 2.5) y su límite (véase el p. 3.2).

Si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre el conjunto $X$, hacia la función $f$, entonces existe un número $n_0$, tal que, para todos los $n \geqslant n_0$ las cotas superiores (36.9) son finitas. En efecto, si $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, entonces por la definición de convergencia uniforme, para cualquier $\varepsilon > 0$, por ejemplo, para $\varepsilon = 1$, existe un número $n_0$, tal que, para todos los $n \geqslant n_0$ y todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < 1$$

y por lo tanto, también la desigualdad

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1.$$

Por esto, para $n \geqslant n_0$, todas las cotas superiores (36.9) son finitas.

**Teorema 1.** *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$, definidas sobre el conjunto $X$, converge uniformemente sobre este conjunto, hacia la función $f$, si y sólo si*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{36.10}$$

**Corolario.** *Para que la sucesión $\{f_n\}$ converja uniformemente hacia la función $f$ sobre el conjunto $X$, es necesario y suficiente, que se encuentre una sucesión numérica $\{a_n\}$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \quad a_n \geqslant 0, \tag{36.11}$$

*y exista un número $n_0$ tal que, para todos los $n \geqslant n_0$ y todos los $x \in X$, se cumpla la desigualdad*

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n. \tag{36.12}$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Si se cumplen las condiciones de la definición 5, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $n_\varepsilon$ tal que, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$, se cumple la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando el $n_\varepsilon$ *señalado, para todos los* $n \geqslant n_\varepsilon$, tendremos

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

y esto, por la definición de límite de una sucesión numérica, significa que se cumple la condición (36.10).

Por el contrario, si la condición (36.10) se cumple, entonces por la definición de límite finito para una sucesión de elementos de $\overline{R}$, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

De aquí se deduce que, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y para todos los $x \in X$, es válida la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

es decir, se cumplen las condiciones de la definición 5. □

Debido a que casi todos los términos de la sucesión de cotas superiores (36.9) para las sucesiones de funciones uniformemente convergentes son finitos, el criterio (36.10) en esencia, reduce el concepto de convergencia uniforme de una sucesión funcional, al concepto de convergencia de una sucesión numérica.

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Si $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, entonces por lo dicho anteriormente, existe un número $n_0$ tal que para todos los $n \geqslant n_0$ todas las cotas superiores (36.9) son finitas. Por esto, en calidad de sucesión $\{a_n\}$ podemos tomar,

$$a_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|, \quad n = n_0, n_0 + 1, \ldots,$$

(evidentemente $a_n \geqslant 0$), eligiendo los primeros términos, $a_1, \ldots, a_{n_0 - 1}$, de una forma arbitraria. Entonces para $n \geqslant n_0$, la condición (36.12) se cumple de una forma evidente, y según (36.10), tendremos $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Si existe la sucesión numérica $\{a_n\}$, que satisface las condiciones (36.11) y (36.12), entonces por (36.12) para cualquier $n \geqslant n_0$ se cumple la desigualdad

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n.$$

Pasando en ella al límite cuando $n \to \infty$, obtendremos por (36.11), que

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

El cumplimiento de esta condición significa (véase el teorema 1) la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ a la función $f$ sobre el conjunto $X$. □

Ejemplos. 3. Demostremos otra vez más con ayuda de la condición (36.10), que la sucesión $x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, no converge uniformemente sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$. Ya que el límite de la sucesión señalada sobre el intervalo se-

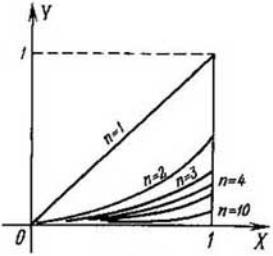



FIG. 151

miabierto analizado es igual a cero, entonces la afirmación hecha se deduce inmediatamente de la igualdad evidente (para cualquier $n = 1, 2, \ldots$, dado), $\sup\limits_{x \in [0,1)} |x^n - 0| = 1$, de la cual se ve claramente que la condición (36.10) de convergencia uniforme, en el caso dado, no se cumple.

4. La sucesión $f_n(x) = \frac{1}{n} x^n$, $n = 1, 2, \ldots, 0 \leqslant x \leqslant 1$, converge uniformemente sobre el segmento $[0, 1]$ (fig. 151).

En efecto, ya que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ y $0 < \frac{1}{n} x^n \leqslant \frac{1}{n}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces la afirmación expresada se deduce del corolario del teorema 1.

Enunciemos y demostremos el criterio de convergencia uniforme de una sucesión, habitualmente llamado criterio de Cauchy.

**Teorema 2 (criterio de Cauchy de convergencia uniforme de sucesiones).** *Para que la sucesión de funciones $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, definidas sobre un conjunto $X$, converja uniformemente sobre este conjunto, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$, todos los enteros $p \geqslant 0$ y todos los puntos $x \in X$ se cumple la desigualdad*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{36.13}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre el conjunto $X$. Entonces, por la definición de convergencia uniforme, existe una función $f$ tal que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número $n_\varepsilon$ tal que, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por esto, si $n \geqslant n_\varepsilon$ y $p \geqslant 0$, entonces para todas las $x \in X$ obtendremos

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Si se cumple la condición (36.13), entonces para cualquier $x \in X$ dado, la sucesión

$$f_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.14}$$

es una sucesión numérica que satisface el criterio de Cauchy (véanse el p. 3.7 y el p. 23.3), y por esto converge.

Denotemos el límite de la sucesión (36.14) sobre el conjunto $X$ por $f(x)$. Mostremos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función $f$ sobre el conjunto $X$. En efecto, por la condición (36.13) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $n_\varepsilon$ tal que, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$, todos los enteros $p \geqslant 0$ y todas las $x \in X$, es válida la desigualdad

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{36.15}$$

Observando que $\lim\limits_{p \to \infty} f_{n+p}(x) = f(x)$, pasemos el límite en la desigualdad (36.15) cuando $p \to \infty$, entonces para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$ obtendremos

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

y esto significa que $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$. □

Para concluir, señalemos dos propiedades de las sucesiones uniformemente convergentes.

1°. *Si las sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen uniformemente a las funciones $f$ y $g$, respectivamente, sobre el conjunto $X$, entonces cualquier combinación lineal $\{\lambda f_n + \mu g_n\}$, $\lambda \in C$, $\mu \in C$, de las sucesiones dadas también converge uniformemente sobre este conjunto a la misma combinación lineal de las funciones límites, es decir, a $\lambda f + \mu g$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\lambda = \mu = 0$, entonces la afirmación es evidente. Sea al menos uno de los números $\lambda$ ó $\mu$ diferente de cero, es decir, $|\lambda| + |\mu| > 0$. Fijemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. En virtud de las condiciones $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$ y $g_n \underset{X}{\rightrightarrows} g$, existe un número $n_0$, tal que, para todos los $n \geqslant n_0$ y todos los $x \in X$, se cumplen las desigualdades

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}, \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}$$

y por esto, también la desigualdad

$$\begin{aligned} |[\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)] - [\lambda f(x) + \mu g(x)]| &\leqslant \\ \leqslant |\lambda|\,|f_n(x) - f(x)| &+ |\mu|\,|g_n(x) - g(x)| < \\ &< |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} + |\mu| \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Según la definición de convergencia uniforme, esto significa que $\lambda f_n + \mu g_n \underset{X}{\rightrightarrows} \lambda f + \mu g$. □

2°. *Si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre el conjunto $X$ a la función $f$, y la función $g$ es acotada sobre este conjunto, entonces la sucesión $\{gf_n\}$ también converge uniformemente sobre $X$ a la función $gf$.*

DEMOSTRACIÓN. La acotación de la función $g$ sobre el conjunto $X$ significa que existe un $M > 0$ tal que, para todas las $x \in X$ se cumple la desigualdad $|g(x)| \leqslant M$. En virtud de la convergencia uniforme sobre el conjunto $X$ de la sucesión $\{f_n\}$ a la función $f$, existen un número $n_0$ tal que, para todos los $n \geqslant n_0$ y todos los $x \in X$, se cumple la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M},$$

y por esto también la desigualdad

$$|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| = |g(x)|\,|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Esto significa que $gf_n \underset{X}{\rightrightarrows} gf$. □

### 36.3. SERIES DE FUNCIONES UNIFORMEMENTE CONVERGENTES

Para las series, naturalmente, también se puede introducir el concepto de convergencia uniforme.

**Definición 6.** *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.16}$$

*cuyos términos son funciones, definidas sobre el conjunto $X$, se llama uniformemente convergente sobre este conjunto, si la sucesión de sus sumas parciales converge uniformemente sobre $X$.*

De esta forma, la convergencia uniforme de la serie (36.16) significa la existencia de una función $s(x)$ tal que

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x) \tag{36.17}$$

(aquí, como siempre $s_n(x)$ es la suma parcial de orden $n$ de la serie (36.16), $n = 1, 2, \ldots$).

Ya que de (36.17) se deduce que $s_n(x) \to s(x)$ sobre $X$, entonces $s(x)$ es la suma de la serie (36.16).

Hagamos

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Entonces $s(x) - s_n(x) = r_n(x)$ y la condición (36.17) para la serie convergente sobre $X$ se puede transcribir en la forma equivalente:

$$r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0, \tag{36.18}$$

de donde en virtud de la equivalencia de la definición 5 de convergencia uniforme de una sucesión de funciones y la condición (36.10) se deduce que *para que la serie* (36.16) *convergente sobre $X$ converja uniformemente sobre el conjunto $X$, es necesario y suficiente que*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |r_n(x)| = 0. \tag{36.19}$$

De esta forma, de la convergencia uniforme de la serie, en particular, se deriva que a partir de un cierto número las cotas superiores

$$\sup_{x \in X} |r_n(x)|$$

son finitas, y la condición (36.19) reduce el concepto de convergencia uniforme de la serie al concepto de tendencia a cero de la sucesión numérica de estas cotas superiores.

Señalemos una propiedad esencial de las series uniformemente convergentes.

**Teorema 3 (condición necesaria de la convergencia uniforme de una serie).** *Si la serie* (36.16) *converge uniformemente sobre el conjunto $X$, entonces la sucesión de sus términos $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$; tiende hacia cero uniformemente sobre $X$, es decir,*

$$u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0.$$

De forma breve esta propiedad se expresa de la forma siguiente: *el término general de una serie uniformemente convergente tiende uniformemente a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie (36.16) converge uniformemente sobre el conjunto $X$. Denotemos sus sumas parciales, como es usual, por $s_n(x)$, y su suma por $s(x)$, $x \in X$. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $n_\varepsilon$ tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad

$$|s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por esto para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$ es válida también la desigualdad

$$|u_{n+1}(x)| = |s_{n+1}(x) - s_n(x)| = |[s_{n+1}(x) - s(x)] + [s(x) - s_n(x)]| \leqslant$$
$$\leqslant |s_{n+1}(x) - s(x)| + |s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto significa la convergencia uniforme (sobre el conjunto $X$) a cero da la sucesión de términos de la serie uniformemente convergente sobre este conjunto. □

Señalemos que en virtud de la condición (36.10), el hecho de que el término general de la serie (36.16) tienda uniformemente a cero, significa que

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |u_n(x)| = 0.$$

Con ayuda del teorema 3, a veces se logra establecer que la serie analizada no converge uniformemente. Así, la serie cuyos términos forman una progresión geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ no converge uniformemente sobre el intervalo $(0, 1)$, ya que como esto fue mostrado en el p. 36.2 (véase el ejemplo 2), la sucesión $x^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, de los términos de esta serie no converge uniformemente a cero sobre este intervalo. De aquí, a propósito, se deduce que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, donde $z$ es un número complejo, tampoco converge uniformemente en el círculo unitario $|z| < 1$, puesto que no converge uniformemente ya sobre el subconjunto $(0, 1)$ de este círculo.

A menudo resulta útil el siguiente criterio suficiente de la convergencia uniforme.

**Teorema 4 (criterio Weierstrass).** *Sean dadas dos series: una de funciones* (36.16), *cuyos términos son las funciones* $u_n(x)$, *definidas sobre el conjunto* $X$, *y otra numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{36.20}$$

*Si la serie* (36.20) *converge y para cualquier* $x \in X$ *se cumple la desigualdad*

$$|u_n(x)| \leqslant a_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.21}$$

*entonces la serie* (36.16) *converge absoluta y uniformemente sobre el conjunto* $X$.

La convergencia absoluta de la serie (36.16) sobre $X$, en el caso de convergencia de la serie (36.20) se deduce inmediatamente, por el criterio de comparación, de la desigualdad (36.21). La convergencia uniforme de esta serie se deduce fácilmente del teorema 1 de este punto. Sin embargo, daremos su demostración directa.

Sea $s(x)$ la suma de la serie (36.21) y $s_n(x)$, su suma parcial. En virtud de la convergencia de la serie (36.20) para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número $n_\varepsilon > 0$ tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad (véase (35.10)), $\sum_{m=n}^{\infty} a_m < \varepsilon$. Pero entonces, cuando todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$, para los restos $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ de la serie (36.16) (según lo demostrado anteriormente es absolutamente convergente, por lo tanto, simplemente convergente, por esto, la igualdad $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$, tiene sentido), tendremos

$$|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| = \left| \sum_{m=n}^{\infty} u_m(x) \right| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} |u_m(x)| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} a_m \leqslant \varepsilon.$$

Esto significa, por la definición 5, la convergencia absoluta de la serie (36.16) sobre el conjunto $X$. □

Señalemos que la serie (36.20) se llama serie que mayorea la serie (36.16).

En calidad de ejemplo tomemos otra vez la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, cuyos términos forman una progresión geométrica. Analicémosla en el círculo de radio $r$: $|z| \leqslant r$, donde $0 < r < 1$. Por cuanto la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ con términos no negativos que forman una sucesión geométrica infinitamente decreciente, converge y para los términos de la serie funcional dada es válida la estimación $|z^n| \leqslant r^n$, ya que $|z| \leqslant r$, entonces según el criterio de Weierstrass converge uniformemente en cualquier círculo $|z| \leqslant r < 1$. Al mismo tiempo, como fue demostrado anteriormente, esta serie no converge uniformemente en el círculo $|z| < 1$.

El criterio de Weierstrass da sólo las condiciones suficientes para la convergencia uniforme de una serie, las que de ningún modo son necesarias. Es muy fácil convencerse de esto para las series, en las cuales a medida que crecen los números de términos se alternan sus signos. En efecto, la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (como toda serie numérica convergente), puede ser analizada como una serie uniformemente convergente, por ejemplo, sobre todo el eje numérico $R$: sus términos $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ son funciones constantes sobre $R$. Al mismo tiempo toda serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, que satisface la condición $|u_n| \leqslant a_n$, es decir, en el caso dado la condición $\frac{1}{n} \leqslant a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, diverge según el criterio de comparación. De esta forma, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge uniformemente, y la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, que satisface las condiciones del criterio de Weierstrass, no existe.

Se puede mostrar que más aún, las condiciones del criterio de Weierstrass no son necesarias para la convergencia uniforme, incluso de las series cuyos términos son todos no negativos. Para convencerse de esto, citemos un ejemplo de una serie uniformemente convergente sobre el segmento $[0, 1]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ con términos no negativos, para la cual tampoco existe la serie numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, que satisfaga la condición (36.21).

Definamos el término de la serie $u_n(x)$ de la forma siguiente: $u_n(x) = 0$ sobre los segmentos $\left[0, \frac{1}{n+1}\right]$ y $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $u_n\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}$ y la función $u_n(x)$ es lineal y continua sobre cada uno de los segmentos $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right]$ y $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right), \frac{1}{n}\right]$. Su gráfica está representada en la fig. 152.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente sobre el segmento $[0, 1]$. En efecto, si $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ es el resto de esta serie, $n = 1, 2, \ldots$, entonces para cualquier $x \in [0, 1]$, entre sus términos existe no más de uno, para el cual $u_k(x) \neq 0$, $k \geqslant n + 1$. En este caso, evidentemente, $0 \leqslant u_k(x) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n+1}$, por esto $0 \leqslant r_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1}$ y, por lo tanto, $r_n(x) \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} 0$, cuando $n \to \infty$, es decir, la serie analizada converge uniformemente sobre el segmento $[0, 1]$.

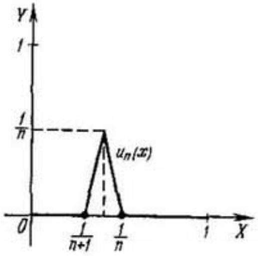



FIG. 152

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie numérica tal que, para todos los $x \in [0, 1]$, se cumple la desigualdad $0 \leqslant u_n(x) \leqslant a_n$, entonces

$$\frac{1}{n} = \max_{[0,1]} u_n(x) \leqslant a_n.$$

Por cuanto la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, entonces también diverge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. De esta forma, en el caso analizado, una serie numerica que satisfaga, con respecto a la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, las condiciones del criterio de Weierstrass, a ciencia cierta no existe.

Pasemos ahora a las condiciones de convergencia uniforme de una serie, que son simultáneamente necesarias y suficientes.

Observando que

$$s_{n+p}(x) - s_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x), \tag{36.22}$$

del teorema 2 obtenemos el siguiente criterio de convergencia uniforme.

**Teorema 5 (criterio de Cauchy de convergencia uniforme de las series).** *Para que la serie* (36.16) *converja uniformemente sobre el conjunto $X$, es necesario y suficiente, que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número $n_\varepsilon$ tal que, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$, todos los enteros $p \geqslant 0$ y todos los $x \in X$, se cumpla la desigualdad*

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \tag{36.23}$$

Es evidente, que del criterio de Cauchy de convergencia uniforme de una serie, se obtiene otra vez (si en (36.23) hacemos $p = 0$), el teorema 3, es decir, la condición necesaria para la convergencia de la serie (36.16).

Ejercicio 3. Aclárese, si la serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ($a_n$ y $z$ son números complejos), que tiene un número infinito de coeficientes diferentes de cero, puede converger uniformemente sobre todo el plano complejo.

Ejemplos. 1. Analicemos de nuevo la serie (véase el p. 36.1)

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{36.4}$$

y mostremos que, cualquiera que sea el número $r > 0$, la serie (36.4) converge uniformemente en el círculo $|z| \leqslant r$.

Como ya hemos visto, la serie (36.4) converge para cualquier complejo $z$, en particular, para $z = r$, es decir, la serie numérica

$$1 + r + \frac{r^2}{2!} + \ldots + \frac{r^n}{n!} + \ldots$$

converge. Tomándola en calidad de serie de comparación (36.20) para la serie (36.4), cuando $|z| \leqslant r$, tenemos $\left|\frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \frac{r^n}{n!}$. Por esto nuestra afirmación sobre la convergencia uniforme de la serie (36.4) se deduce directamente del teorema 4.

Mostremos que la serie (36.4) no converge uniformemente sobre todo el plano complejo. Esto se deduce del hecho de que en el caso dado, no se cumple la condición necesaria de la convergencia uniforme de una serie (véase el teorema 3). En efecto, para cualquier $n_0$ fijo

$$\lim_{|z| \to \infty} |z^{n_0}/n_0!| = +\infty. \tag{36.24}$$

Por esto, si $\varepsilon > 0$ es dado, entonces cualquiera que sea $n_0 > 0$ según (36.24), se puede elegir $z_0$ de tal forma que

$$|z_0^{n_0}/n_0!| > \varepsilon,$$

es decir, $z^n/n!$, no tiende uniformemente a cero sobre todo el plano complejo.

2. Investiguemos la convergencia uniforme de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} nx}{\sqrt{1 + n^2(1 + nx^2)}}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{36.25}$$

Ante todo observemos que

$$\left|\frac{x \operatorname{sen} nx}{\sqrt{1 + n^2(1 + nx^2)}}\right| \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{1 + n^2(1 + nx^2)}}. \tag{36.26}$$

Más adelante, $1 + nx^2 \geqslant 2|x|\sqrt{n}$ *), por esto

$$\frac{|x|}{\sqrt{1 + n^2(1 + nx^2)}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n(1 + n^2)}} \leqslant \frac{1}{2n^{3/2}}. \tag{36.27}$$

Ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ converge, entonces por el criterio de Weierstrass debido a las desigualdades (36.26) y (36.27), la serie inicial (36.25) converge uniformemente sobre todo el eje real.

3. Analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^5x^2} \operatorname{sen} nx. \tag{36.28}$$

Evidentemente, $|e^{-n^5x^2} \operatorname{sen} nx| \leqslant n|x|e^{-n^5x^2}$. Hallemos el máximo de la función

$$v_n(x) = n|x|e^{-n^5x^2}$$

para un $n$ dado. La función $v_n(x)$ es par, por esto es suficiente analizar solamente el caso $x \geqslant 0$ (¿por qué?). La derivada $v_n'(x) = n(1 - 2n^5x^2)e^{-n^5x^2}$ se anula en el punto $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}n^{5/2}}$. Por cuanto $v_n(x) \geqslant 0$ para todas los $x$, $v_n(0) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} v_n(x) = 0$, entonces en el punto $x_0$ la función $v_n(x)$ tiene un máximo (¿por qué?).

Por esto

$$v_n(x) \leqslant v_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}n^{5/2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}n^{3/2}}e^{-1/2} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

y ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, entonces por el criterio de Weierstrass, la serie (36.28) converge uniformemente sobre todo el eje real.

El método, utilizado para establecer la convergencia uniforme de la serie (36.28) (la investigación con respecto al extremo del módulo del término general o de su mayorante, con los métodos del cálculo diferencial), es suficientemente general y con frecuencia se utiliza en la práctica. Con este método se hubiera podido investigar la convergencia uniforme de la serie (36.25), sin embargo, el método utilizado más arriba en la investigación de esta serie conduce más rápidamente al objetivo.

4. Analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2 + n}. \tag{36.29}$$

---

*) Hemos utilizado aquí desigualdad $2ab \leqslant a^2 + b^2$, la que se obtiene inmediatamente de la desigualdad evidente $(a - b)^2 \geqslant 0$.

Por el criterio de Leibniz (véase el p. 35.9), converge para cualquier $x$ real, y como fue señalado allí mismo, el resto de la serie se estima por su primer término:

$$|r_n(x)| < \frac{1}{x^2 + n + 1} < \frac{1}{n + 1}.$$

De esto se deduce que

$$r_n(x) \rightrightarrows 0 \text{ cuando } -\infty < x < +\infty,$$

es decir, la serie (36.29) converge uniformemente sobre todo el eje real.

Mostremos que esta serie no converge absolutamente en todos los puntos. En efecto, escojamos para un número $x$ dado, cualquier natural $n_x$ tal que $x^2 \leqslant n_x$. Entonces para todos los $n \geqslant n_x$ se cumplirá la desigualdad $x^2 \leqslant n$, y, por lo tanto, también la desigualdad

$$\frac{1}{x^2 + n} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

Y ya que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces por el criterio de comparación, la serie (36.29) no converge absolutamente.

Ejercicio 4. Cítese un ejemplo de serie, que converja absolutamente en todos los puntos de un cierto conjunto, pero que no converja uniformemente sobre este conjunto.

*Indicación*. Es útil recordar el ejemplo 2 del p. 36.1.

Demostremos ahora un criterio suficiente de convergencia uniforme, aplicable, a diferencia del criterio de Weierstrass, a las series que no convergen absolutamente. Este criterio, por su enunciado, recuerda el criterio de Dirichlet para la convergencia de las series numéricas (véase el p. 35.13) y por primera vez aparece en los trabajos de Hardy*).

**Teorema 6.** *Sea dada la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{36.30}$$

*en la cual las funciones $a_n(x)$ y $b_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, están definidas sobre el conjunto $X$ y tales que*

1) *La sucesión $\{a_n(x)\}$ es monótona para cada $x \in X$ y tiende uniformemente a cero sobre $X$;*

2) *la sucesión de las sumas parciales $B_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

*está acotada sobre el conjunto $X$.*

*Entonces la serie* (36.30) *converge uniformemente sobre el conjunto $X$.*

---

*) G. Hardy (1877 — 1947), matemático inglés.

DEMOSTRACIÓN. Por la condición 2 del teorema existe un $B > 0$ tal que $|B_n(x)| \leqslant B$, para todos los $x \in X$ y todos los $n = 1, 2, \ldots$, y por esto

$$\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x) = |B_{n+p}(x) - B_{n-1}(x)| \leqslant |B_{n+p}(x)| + |B_{n-1}(x)| \leqslant 2B$$

para todos los $x \in X$, todos los $n = 2, 3, \ldots$, y todos los enteros $p \geqslant 0$. De la condición 1 del teorema se deduce, que para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo, existe un número $n_\varepsilon$ tal que, para todos los $x \in X$ y todos los $n \geqslant n_\varepsilon$, se cumple la desigualdad

$$0 \leqslant |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B}.$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Abel (véase el p. 35.13), obtendremos que

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant 2B[|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|] < \varepsilon$$

para todos los $x \in X$, todos los $x \geqslant n_\varepsilon$ y todos los enteros $p \geqslant 0$. Esto demuestra la convergencia uniforme de la serie (36.30). □

En calidad de ejemplo para la utilización del teorema 6, analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

Por el teorema 6, esta serie converge uniformemente sobre cualquier segmento $[a, b]$, que no contenga puntos del tipo $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. En efecto, la sucesión $a_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, en el caso dado es una sucesión numérica, esta sucesión decrece monótonamente y tiende a cero (y por lo tanto, también tiende a cero uniformemente), y las sumas $\sum\limits_{k+1}^{\infty} \operatorname{sen} kx$ satisfacen la desigualdad

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|} \leqslant \max_{[a,b]} \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} < +\infty$$

(véase el p. 35.13), es decir, están acotadas sobre cualquiera de los segmentos señalados.

Sobre cualquier segmento, que contenga puntos del tipo $x = 2k\pi$, la serie analizada no converge uniformemente. Por las propiedades del seno es suficiente demostrar esto para el segmento $[0, \pi]$. Hagamos $x_n = \frac{1}{2n}$; entonces para todos los $k = n + 1, n + 2, \ldots, 2n$ tendremos $0 < kx_n \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, en virtud de la desigualdad $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > \frac{2}{\pi}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (véase (14.1)), obtendremos

$$\frac{\operatorname{sen} kx_n}{k} = \frac{\operatorname{sen} kx_n}{kx_n}\frac{1}{2n} \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n} = \frac{1}{\pi n}, \quad k = n + 1, \ldots, 2n.$$

De aquí

$$\frac{\operatorname{sen}(n+1)x_n}{n+1}+\frac{\operatorname{sen}(n+2)x_n}{n+2}+\ldots+\frac{\operatorname{sen}2nx_n}{2n}>\underbrace{\frac{1}{\pi n}+\ldots+\frac{1}{\pi n}}_{n\text{ veces}}=\frac{1}{\pi}.$$

Por esto, para ningún $\varepsilon<\frac{1}{\pi}$ sobre el segmento $[0, \pi]$ se cumple el criterio de Cauchy de convergencia uniforme.

Observemos que con ayuda del criterio de Weierstrass, no se puede demostrar la convergencia uniforme de la serie analizada sobre un segmento que no contenga puntos del tipo $x = 2k\pi$. Por ejemplo, para el segmento $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ tenemos

$$\max_{\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]}\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right|=\frac{1}{n}.$$

Por esto no existe una serie numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right| \leqslant a_n$ sobre $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, ya que entonces $a_n \geqslant \frac{1}{n}$, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge.

De forma semejante al caso de las series numéricas, utilizando la desigualdad de Abel, se puede obtener un criterio más de convergencia uniforme de las series funcionales, análogo al criterio de Abel para las series numéricas. Este criterio también aparece por primera vez en los trabajos de Hardy.

**Teorema 7.** *Si*

1) *la sucesión* $\{a_n(x)\}$ *está acotada sobre el conjunto* $X$:

$$|a_n(x)| \leqslant M, \quad x \in X, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

*y decrece o crece para cada* $x \in X$;

2) *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *converge uniformemente sobre el conjunto* $X$,

*entonces la serie* (36.30) *también converge uniformemente sobre* $X$.

DEMOSTRACIÓN. Sea dado $\varepsilon > 0$. Por la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$, existe un número $n_\varepsilon$ tal que, para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$, todos los enteros $p \geqslant 0$ y todos los puntos $x \in X$, se cumple la desigualdad

$$\left|\sum_{k=0}^{p} b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

De aquí, por la desigualdad de Abel (véase el p. 35.77) para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$, todos los enteros $p \geqslant 0$ y todos los puntos $x \in X$, será válida la desigualdad

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(x)b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}(|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \leqslant \varepsilon.$$

Por el criterio de Cauchy, esto significa, que la serie (36.30) converge uniformemente. □

Ejemplo. Analicemos la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx \cos \frac{x}{n}}{\ln \ln n}$.

Sobre cualquier segmento, que no contenga puntos del tipo $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \ldots$, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{\ln \ln n}$, por el teorema 6, converge uniformemente, y la sucesión $\cos \frac{x}{n}$ $n = 2, 3, \ldots$, está acotada y crece monótonamente a partir de cierto número, además se puede elegir un número tal que a partir de este número esta sucesión crecerá en todos los puntos del segmento señalado. Por esto, sobre un segmento, que no contenga puntos del tipo $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \ldots$, la serie analizada converge uniformemente.

Para concluir observemos que de las dos propiedades de las sucesiones uniformemente convergentes, demostradas al final del p. 36.2, se deduce directamente la validez de las propiedades correspondientes para las series uniformemente convergentes:

1°. *Si las series* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ convergen uniformemente sobre el *conjunto* $X$, *entonces para números cualesquiera* $\lambda \in C$ *y* $\mu \in C$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n(x) + \mu v_n(x)$ *también converge uniformemente sobre el conjunto* $X$.

2°. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *converge uniformemente sobre el conjunto* $X$ *y la función* $g(x)$ *está acotada sobre este conjunto, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} g(x) u_n(x)$ *también converge uniformemente sobre* $X$.

Ejercicios.. Investíguense con respecto a la convergencia, la convergencia absoluta y la convergencia uniforme de las series:

5. $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)x^n$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^\alpha}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + x^n)$.

(En todos los casos $x$ es número real).

### 36.4. PROPIEDADES DE LAS SERIES Y SUCESIONES UNIFORMEMENTE CONVERGENTES

Hemos visto que la suma de una serie convergente, todos los términos de la cual son funciones continuas, puede no ser una función continua. El siguiente teorema contiene las condiciones suficientes para la continuidad de la suma de una serie.

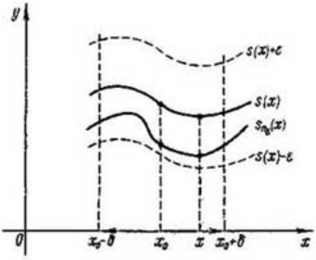



FIG. 153

Se debe prestar atención al hecho de que el análisis de funciones continuas sobre cierto conjunto impone una restricción adicional al conjunto: éste no puede ser un conjunto de naturaleza arbitraria (como ha sido hasta ahora el conjunto $X$, sobre el que han sido dados los términos de las series analizadas, los elementos de las sucesiones, etc.), sino que debe ser tal que, para las funciones dadas sobre él, esté definido el concepto de continuidad. Cuando hablemos de derivadas e integrales, tendremos que restringir aún más la clase de los conjuntos $X$ admisibles.

**Teorema 8.** *Si las funciones $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, son continuas en el punto $x_0$ del conjunto $X \subset R^m$*), y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente sobre $X$, entonces su suma $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ también es continua en el punto $x_0$.*

DEMOSTRACIÓN.

Fijemos un $\varepsilon > 0$ cualquiera. Sea

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad x \in X.$$

Por la condición del teorema,

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x),$$

por esto, existe un número $n_\varepsilon$ tal que

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{36.31}$$

para todos los $x \in X$, todos los $n \geqslant n_\varepsilon$, y, en particular, para $n = n_\varepsilon$. La función $s_{n_\varepsilon}(x)$ como suma de un número finito de funciones $u_k(x)$, continuas sobre $X$,

*) Aquí, como en todos los casos cuando no se haya acordado lo contrario, se analizan funciones $u_n(x)$ de valores complejos; véase el concepto de continuidad para estas funciones en el p. 23.3; $R^m$ como es usual, denota el espacio euclídeo $m$-dimensional

$k = 1, 2, \ldots, n_\varepsilon$, es continua en el punto $x_0 \in X$. Por esto, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todos los puntos $x \in X$, que satisfacen la condición $\rho(x, x_0) < \delta$, tenemos

$$|s_{n_\varepsilon}(x) - s_{n_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{36.32}$$

Ahora, observando que

$$s(x) - s(x_0) = [s(x) - s_{n_\varepsilon}(x)] + [s_{n_\varepsilon}(x) - s_{n_\varepsilon}(x_0)] + [s_{n_\varepsilon}(x_0) - s(x_0)]$$

(fig. 153), de la desigualdad (36.31), tomada en los puntos $x_0$ y $x$, y de la desigualdad (36.32) obtendremos cuando $\rho(x, x_0) < \delta$ y $x \in X$

$$|s(x) - s(x_0)| < |s(x) - s_{n_\varepsilon}(x)| + |s_{n_\varepsilon}(x) - s_{n_\varepsilon}(x_0)| + \\ + |s_{n_\varepsilon}(x_0) - s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

lo que demuestra la continuidad de la función $s(x)$ en el punto $x_0$. □

En el caso, cuando $x_0$ es un punto de acumulación del conjunto $X$, a la afirmación del teorema se le puede dar la forma

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} s(x) = s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

y ya que cada función $u(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, es continua en el punto $x \in X$, entonces $u_n(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} u_n(x)$, por esto

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} u_n(x).$$

De esta forma, en las condiciones del teorema 8, el límite de la suma de la serie es igual a la suma de los límites de sus términos, es decir, en la serie analizada es permitido el paso al límite término a término.

Se ha señalado anteriormente. que a cada sucesión de funciones le corresponde una serie de funciones, para la cual ella es la sucesión de sus sumas parciales. En este caso, si la sucesión dada converge uniformemente sobre cierto conjunto, entonces también la serie señalada, evidentemente, converge uniformemente sobre este conjunto. Esta circunstancia permite parafrasear los teoremas sobre las series uniformemente convergentes, en los correspondientes teoremas sobre sucesiones uniformemente convergentes. Por ejemplo, el teorema 8 puede ser parafraseado de la siguiente forma..

**Teorema 8'**. *Si las funciones $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, son continuas en el punto $x_0 \in X \subset R^m$ y $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, entonces $f$ es continua en $x_0$.*

Esto significa, que para el punto $x_0 \in X$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f_n(x),$$

es decir, los pasos al límite por $n$ y por $x$ pueden ser conmutados.

En efecto, el límite $f$ de la sucesión $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, por el teorema 8', es una función continua en el punto $x_0 \in X$, y por esto el primer miembro de la igualdad es igual a $f(x_0)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0),$$

pero el segundo miembro de la igualdad analizada, según la continuidad de la función $f_n$, también es igual a $f(x_0)$:

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0). \ \square$$

**Problema 25 (teorema de Dini*)).** Supongamos que las funciones $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, son continuas y, creciendo o decreciendo monótonamente, tienden a la función $f$ sobre el compacto $X \subset R^m$. Demuéstrese que para que la función $f$ sea continua, es necesario y suficiente que la sucesión $\{f_n\}$ converja uniformemente sobre el conjunto $X$. Parafraséese este resultado para las series.

Ahora pasemos a la cuestión de la integración y diferenciación término a término de las series. Ya que la derivada y la integral están definidas sólo en el dominio real, entonces a partir de aquí y hasta el final del párrafo, consideraremos que todas las funciones analizadas están definidas sobre intervalos del eje real y toman valores reales.

Analicemos inicialmente un ejemplo que nos convencerá de que sólo la convergencia de la serie de funciones no es suficiente para que la integral de la función, igual a su suma, pueda ser hallada integrando término a término. En otras palabras, mostremos que incluso si las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx$ convergen, entonces la igualdad

$$\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx$$

puede no ser cierta, incluso en el caso cuando todas las integrales escritas existen.

Parafraseemos inicialmente esta afirmación en términos de sucesiones. Si hacemos $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ entonces tendremos

$$\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \int\limits_a^b s(x)dx = \int\limits_a^b \lim_{n \to \infty} s_n(x)dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)dx =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b \left[ \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right] dx = \lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b s_n(x)dx.$$

---

*) U. Dini (1845 — 1918), matemático italiano.

Mostremos que la igualdad

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)dx$$

no es válida siempre, cuando sobre el segmento $[a, b]$ existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ y todas las funciones analizadas son integrables, es decir, que en este caso no siempre se puede pasar al límite bajo el signo de la integral.

Sea $s_n(x) = nx\,e^{-nx^2}$, $n = 1, 2, \dots, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Entonces $s_n(0) = 0$ y para cualquier $x \neq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = 0$. De esta forma $s_n \underset{[0,1]}{\to} 0$ y, por lo tanto, la integral de la función límite, es decir, de cero, también es igual a cero. Sin embargo

$$\int_0^1 s_n(x)dx = n\int_0^1 xe^{-nx^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^n e^{-t}dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-n}).$$

Por esto, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)dx = \dfrac{1}{2}$, es decir, en efecto, para la sucesión $\{s_n(x)\}$ analizada, tiene lugar la desigualdad

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} s_n(x)dx = 0.$$

Si se construye la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, para la cual la sucesión $\{s_n(x)\}$ es la sucesión de sus sumas parciales, es decir, haciendo

$$u_1(x) = s_1(x),\ u_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

entonces para esta serie tendremos

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx \neq \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)dx.$$

**Teorema 9.** *Sean las funciones $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, continuas sobre el segmento $[a, b]$ y la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.33}$$

*converge uniformemente sobre $[a, b]$. Entonces cualquiera que sea el punto $c \in [a, b]$, la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)dt \tag{36.34}$$

*también converge uniformemente sobre $[a, b]$, y si*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{36.35}$$

*entonces*

$$\int_c^x s(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.36}$$

Si esta fórmula se transcribe en la forma

$$\int_c^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t)dt,$$

entonces, se ve que esto significa la legitimidad, para las condiciones enunciadas en el teorema 9, *de la integración término a término de la serie.*

DEMOSTRACIÓN. Por la convergencia uniforme de la serie (36.33), según el teorema 8, la función $s(x)$ (véase (36.35)), es continua sobre el segmento $[a, b]$ y por esto es integrable sobre cualquier segmento con extremos en los puntos $c \in [a, b]$ y $x \in [a, b]$.

Mostremos, que la serie (36.34) sobre el segmento $[a, b]$ converge uniformemente a la función

$$\sigma(x) = \int_c^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right] dt = \int_c^x s(t)dt. \tag{36.37}$$

Sea

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad \text{y} \quad r_n(x) = s(x) - s_n(x).$$

Entonces para cualquier $x \in [a, b]$ tenemos

$$\begin{aligned} \left| \sigma(x) - \sum_{k=1}^{n} \int_c^x u_k(t)dt \right| &= \left| \int_c^x s(t)dt - \int_c^x \left[ \sum_{k=1}^{n} u_k(t) \right] dt \right| = \\ &= \left| \int_c^x s(t)dt - \int_c^x s_n(t)dt \right| \leqslant \left| \int_c^x |s(t) - s_n(t)|dt \right| = \\ &= \left| \int_c^x |r_n(t)|dt \right| \leqslant \sup_{[a,b]} |r_n(t)| \left| \int_c^x dt \right| \leqslant \\ &\leqslant |x - c| \sup_{[a,b]} |r_n(t)| \leqslant (b - a) \sup_{[a,b]} |r_n(x)|. \end{aligned} \tag{36.38}$$

La sucesión $\sup_{[a,b]} |r_n(x)|$, $n = 1, 2, \ldots$, es una sucesión numérica. Por la convergencia uniforme de la serie (36.33) tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{[a,b]} |r_n(x)| = 0$$

(véase el p. 36.3); por esto de la desigualdad (36.38), según el criterio de Weierstrass de convergencia uniforme de una sucesión, se deduce que la sucesión de sumas parciales de la serie (36.34) converge uniformemente hacia la función (36.37), y esto implica la convergencia uniforme de la serie (36.34) a la función (36.37). El teorema y, en particular, la fórmula (36.36) están demostrados. □

Parafraseemos el resultado obtenido para las sucesiones de funciones.

**Teorema 9'**. *Si una sucesión de funciones $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, continuas sobre el segmento $[a, b]$, converge uniformemente a la función $f$ sobre este segmento, entonces cualquiera que sea el punto $c \in [a, b]$,*

$$\int_c^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int_c^x f(t)dt \text{ sobre } [a, b],$$

*en particular,*

$$\lim_{n \to \infty} \int_c^x f_n(t)dt = \int_c^x [\lim_{n \to \infty} f_n(t)]dt.$$

Ejercicio 9. Demuéstrese, que si

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n & \text{cuando } x = \dfrac{1}{2n}, \\ 0 & \text{cuando } x = 0 \text{ y } \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

y $f_n(x)$ es lineal sobre los segmentos $\left[0, \dfrac{1}{2n}\right]$ y $\left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right]$ entonces para todos los $x \in [0, 1]$ tiene lugar la igualdad

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \text{ y } \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

Pasemos ahora a la cuestión sobre la diferenciación de las series.

**Teorema 10.** *Sean las funciones $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, continuamente diferenciables sobre el segmento $[a, b]$ y la serie, formada por sus derivadas*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{36.39}$$

*converge uniformemente sobre el segmento $[a, b]$. Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge al menos en un punto $c \in [a, b]$, entonces ella converge uniformemente sobre todo el segmento $[a, b]$, su suma*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.40}$$

*es continuamente diferenciable y*

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{36.41}$$

Si esta fórmula se transcribe en la forma

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

entonces se ve que ella significa la legitimidad, para las suposiciones hechas, de la diferenciación *término a término* de la serie.

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{36.42}$$

En virtud de la convergencia uniforme de esta serie, su suma es una función continua y puede ser integrada término a término

$$\int_c^x \sigma(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.43}$$

Por el teorema 9, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{36.44}$$

es convergente. Converge, por condición del teorema, también la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c) \tag{36.45}$$

y por esto converge también la suma de las series (36.44) y (36.45), es decir, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.46}$$

De aquí se deduce que la igualdad (36.43) puede transcribirse en la forma

$$\int_c^x \sigma(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$$

o, lo que es lo mismo (véase (36.40)), en la forma

$$\int_c^x \sigma(t)dt = s(x) - s(c). \tag{36.47}$$

La función que se encuentra en el primer miembro tiene derivada respecto a $x$, por lo tanto también la función $s(x)$ tiene derivada. Diferenciando la igualdad (36.47), obtendremos (véase el p. 29.2)

$$s'(x) = \sigma(x), \tag{36.48}$$

donde la función $\sigma(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ ya que representa la suma de la serie uniformemente convergente (36.39), cuyos términos son funciones continuas. Sustituyendo (36.42) en (36.48), obtendremos la fórmula buscada (36.41).

Resta sólo señalar que de la igualdad (36.43) por la convergencia demostrada de las series (36.44) y (36.45) se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c).$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)dt$ converge uniformemente sobre el segmento $[a, b]$ (véase el teorema 9), y $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ es una serie numérica, por esto también su suma, es decir, la serie (36.40), converge uniformemente sobre el segmento $[a, b]$. □

Así, si una serie convergente de funciones continuamente diferenciables es tal que la serie formada por sus derivadas converge uniformemente, entonces la suma de la serie es una función diferenciable y su derivada se obtiene diferenciando la serie término a término.

Por cuanto de las premisas de este teorema se deduce la convergencia uniforme de la serie, entonces, sin perder generalidad, se puede parafrasearlo de la siguiente forma.

*Si una serie de funciones continuamente diferenciables y la serie formada por sus derivadas convergen uniformemente, entonces la suma de la serie inicial es continuamente diferenciable y su derivada es igual a la suma de las derivadas de los términos de la serie dada (es decir, la serie puede ser diferenciada término a término).*

Parafraseemos ahora el teorema 10 para las sucesiones.

**Teorema 10′**. *Supongamos que la sucesión de funciones*

$$f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.49}$$

*continuamente diferenciables sobre el segmento* $[a, b]$, *converge al menos en un punto* $c \in [a, b]$, *y la sucesión de sus derivadas* $f'_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *converge uniformemente sobre* $[a, b]$. *Entonces la sucesión* (36.49) *converge uniformemente sobre* $[a, b]$, *su límite es una función continuamente diferenciable sobre este segmento y*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{df_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Ejemplos de la aplicación de estas teoremas serán dados en el párrafo siguiente.

Ejercicios. 10. ¿Será válida la igualdad

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 (\lim_{n \to \infty} x^n) dx?$$

¿Puede ser establecida la validez con ayuda del teorema 9?

11. Constrúyase un ejemplo de una sucesión de funciones continuamente diferenciables, convergente sobre un segmento, cuyo límite también sea una función continuamente diferenciable, no obstante, las derivadas de los términos de la sucesión no convergen a la derivada de la función límite.

# § 37. SERIES DE POTENCIAS

## 37.1. RADIO DE CONVERGENCIA Y CÍRCULO DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE POTENCIAS

**Definición 1.** *Las series funcionales del tipo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{37.1}$$

*donde $a_n$ y $z_0$ son números complejos dados, y $z$ es una variable compleja, se llaman series de potencias. Los números*

$$a_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

*se llaman coeficientes de las series de potencias* (37.1).

Suponiendo que los coeficientes de la serie y el número $z_0$ están dados, investigaremos el comportamiento de la serie (37.1) para los diferentes $z$.

Si en la serie (37.1) efectuamos un cambio de variable, haciendo $\zeta = z - z_0$, entonces obtendremos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n. \tag{37.2}$$

Evidentemente, la investigación de la convergencia de la serie (37.1), es equivalente a la investigación de la convergencia de la serie (37.2), por esto en el futuro analizaremos las series del tipo (37.2), utilizando, es cierto, como regla, para designar la variable la letra $z$ y no la letra $\zeta$.

**Teorema 1 (de Abel).** *Si la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{37.3}$$

*converge para $z = z_0 \neq 0$, entonces converge, y además absolutamente, para cualquier $z$, para el cual $|z| < |z_0|$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \tag{37.4}$$

converge. Entonces su término $n$-ésimo $a_n z_0^n$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ (véase el p. 35.1), y por esto la sucesión $\{a_n z_0^n\}$ está acotada, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que

$$|a_n z_0^n| \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Por esto, para el término $n$-ésimo de la serie (37.2), se obtiene la estimación

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Si $|z| < |z_0|$ (fig. 154), entonces la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$, al ser la suma de una progresión geométrica con denominador $q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, converge. Por esto, por el criterio de comparación (véase el p. 35.5) también converge la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ y esto significa la convergencia absoluta de la serie (37.3) cuando $|z| < |z_0|$. □

**Corolario 1.** *Si la serie de potencias* (37.3) *diverge para $z = z_0$, entonces diverge para cualquier $z$,* para el cual $|z| > |z_0|$.

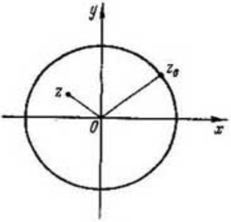



FIG. 154

En efecto, si $|z| > |z_0|$ y la serie (37.4) diverge, entonces también diverge la serie (37.3), ya que si convergiera, entonces por lo demostrado, convergería también la serie (37.4).

**Definición 2.** *Sea dada la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Si R es un número no negativo o* $+\infty$ *y tiene la propiedad de que para todos los z, para los cuales* $|z| < R$, *la serie* (37.3) *converge, y para todos los z, para los cuales* $|z| > R$, *la serie* (37.3) *diverge, entonces este número se llama radio de convergencia de la serie de potencias* (37.3).

*El conjunto de los puntos z, para los cuales* $|z| < R$, *se llama círculo de convergencia de la serie* (37.3).

**Teorema 2.** *Para cualquier serie de potencias* (37.3), *existe un radio de convergencia R. En el círculo de convergencia, es decir, para cualquier z, para el cual* $|z| < R$, *la serie* (37.3) *converge absolutamente. Sobre cualquier círculo* $|z| \leqslant r$, *donde r es fijo y* $r < R$, *la serie* (37.3) *converge uniformemente.*

DEMOSTRACIÓN. Designemos por $A$ el conjunto de todos los números no negativos en los cuales la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{37.5}$$

converge. Ya que para $x = 0$, esta serie converge a ciencia cierta, entonces el conjunto $A$ es no vacío, y por esto tiene cota superior finita o infinita. Mostremos que $\sup A = R$. En efecto, sea $z \in C$ y $|z| < R$. Por la definición de cota superior existe $x \in A$ tal que $|z| < x < R$ (véase la definición 6′ en el p. 3.4). Por la definición del conjunto $A$, para el $x$ señalado la serie (37.5) converge, por lo tanto, según el teorema de Abel en el punto $z$ escogido converge también la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Si $|z| > R$, entonces escogemos un número real $x$ tal que $R < x < |z|$; entonces, otra vez por la definición del conjunto $A$, la serie (37.5) diverge en este punto $x$, pues está sobre el eje real más a la derecha que todos los puntos en los cuales la serie (37.5) converge. Por esto, según el corolario del teorema de Abel para el $z$ escogido diverge también la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

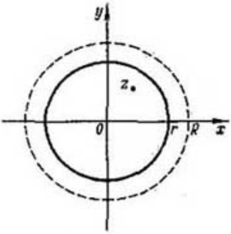



FIG. 155

Así, en efecto, $R$ es el radio de convergencia de la serie (37.3).

Si ahora $0 < r < R$, entonces, por lo demostrado, la serie (37.3) para $z = r$ converge absolutamente, es decir, converge la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n.$$

Y ya que para cualquier punto $z$ del círculo $|z| \leqslant r$ (fig. 155)

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

entonces, por el criterio de Weierstrass (véase el p. 36.3), sobre este circulo, la serie (37.3) converge uniformemente. □

De esta forma, la región de convergencia de cualquier serie de potencias es siempre un "círculo"*), excluyendo, puede ser, cierto conjunto de sus puntos de frontera. En los puntos de frontera del círculo de convergencia, la serie puede tanto converger como diverger (véanse los ejemplos a continuación).

Subrayemos, que el radio de convergencia de la serie de potencias (37.3) tiene la siguiente propiedad: para cada número $z$ tal que $|z| < R$, la serie señalada *absolutamente*, y para cada $z$ tal que $|z| > R$, sencillamente, y por lo tanto, aún más, diverge *absolutamente* (diverge la serie formada por las magnitudes absolutas de los términos de la serie dada). Esto se deduce evidentemente de la definición del radio de convergencia y del teorema 2.

Los términos de la serie de potencias son funciones continuas y, como fue mostrado, sobre cualquier círculo que se encuentre junto con su frontera dentro del círculo de convergencia, la serie de potencias converge uniformemente, y por esto su suma es continua sobre cualquier círculo señalado. Es evidente, que para cualquier punto $z$ del círculo de convergencia, $|z| < R$, se puede escoger un círculo que contenga este punto y que esté junto con su frontera en el círculo de convergencia (es suficiente tomar su radio $r$ tal que $|z| < r < R$), por esto, *la serie de potencias es*

---

*) La palabra "circulo" está escrita entre comillas ya que en el caso de $R = +\infty$ el "círculo" significa todo el plano.

*continua en cada punto de su círculo de convergencia* $|z| < R$ (subrayemos que aquí se habla de un círculo abierto).

Analicemos ahora el caso cuando la serie de potencias converge en el punto $z = R$, que está sobre la frontera de su círculo de convergencia. Señalemos que el caso de $z = -R$ puede ser reducido al caso de $z = R$ con el sencillo cambio de variable $\zeta = -z$.

**Teorema 3 (de Abel).** *Si $R$ es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y esta serie converge para $z = R$, entonces converge uniformemente sobre el segmento* $[0, R]$.

**Corolario.** *Si la serie de potencias* (37.3) *converge para $z = R$, entonces su suma es continua sobre el segmento* $[0, R]$.

Esta afirmación con frecuencia se llama *segundo teorema de Abel* sobre las series de potencias.

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 \leqslant x \leqslant R$. Representemos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en la forma de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. Ya que los términos de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ no dependen de $x$, entonces su convergencia implica también su convergencia uniforme. La sucesión $\{(x/R)^n\}$ es acotada sobre el segmento $[0, R]$, sus términos son no negativos: $0 \leqslant \left(\frac{x}{R}\right)^n \leqslant 1$ y ella decrece monótonamente en cada punto (para $x = R$ ella decrece no estrictamente, más exactamente, es estacionaria). Por esto, según el criterio de Abel de convergencia uniforme de las series (véase el teorema 7 en el p. 36.3), la serie (37.3) converge uniformemente sobre el segmento $[0, R]$. ☐

El corolario se deriva de que la suma de una serie uniformemente convergente de funciones continuas, también es una función continua.

Todo lo dicho se traslada a las series de potencias generales del tipo (37.1), con ayuda de la transformación del tipo $z = \zeta - \zeta_0$ ($\zeta$ es una nueva variable, $\zeta_0$ está fijo). En particular, la región de convergencia de esta serie consta de un círculo del tipo $|z - z_0| < R$ y cierto conjunto de los puntos sobre su frontera (este conjunto puede ser vacío).

Este círculo se llama círculo de convergencia de la serie (37.1), y $R$, su radio se convergencia.

Ejemplos. 1. El radio de convergencia $R$ de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ es igual a cero, es decir, esta serie converge sólo para $z = 0$[*)].

En efecto, investigando la convergencia absoluta de esta serie, por el criterio de D'Alembert, para cualquier $z \neq 0$, obtendremos

*) Para $z = 0$, evidentemente, converge cualquier serie del tipo (37.3).

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|(n+1)!z^{n+1}|}{|n!z^n|} = \lim_{n \to \infty} (n+1)|z| = +\infty.$$

De esta forma, la serie analizada no converge absolutamente para todo $z \neq 0$; de aquí, por el corolario del teorema de Abel, diverge para cualquier $z \neq 0$.

2. El radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ es igual a $+\infty$, ya que, como hemos visto (véase el p. 36.1), esta serie converge para cualquier $z$.

3. La suma de la progresión geométrica infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{37.6}$$

converge para $|z| < 1$ y diverge para $|z| \geqslant 1$. Por esto, su radio de convergencia es $R = 1$. Señalemos, que en todos los puntos de la frontera del círculo de convergencia, es decir, en todos los puntos de la circunferencia $|z| = 1$, la serie (37.6) diverge, ya que para el término general de la serie tenemos $|z^n| = 1$, y, por lo tanto, no tiende a cero cuando $n \to \infty$.

4. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \tag{37.7}$$

converge para $|z| \leqslant 1$, ya que cuando se cumple esta condición $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$ y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Para $|z| > 1$, la serie (37.7) diverge, ya que en este caso $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{z^n}{n^2} = +\infty$*), es decir, no se cumple la condición necesaria para la convergencia de una serie. El radio de convergencia de la serie (37.7), como el de la serie (37.6), es igual a la unidad, sin embargo, en cada punto de la frontera del círculo de convergencia la serie (37.7), a diferencia de la serie (37.6), converge.

5. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

tiene radio de convergencia $R = 1$.

En efecto, aplicando el criterio de D'Alembert para la definición de $z$, para los cuales la serie converge absolutamente (respectivamente, diverge), obtendremos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|z^{n+1}/(n+1)|}{|z^n/n|} = |z| \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = |z|$$

---

*) En efecto, es fácil, por ejemplo, con ayuda de la regla de L'Hospital convencerse de que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|z|^x}{x^2} = +\infty$ (véase el ejemplo 2 en el p. 12.2).

y, por consiguiente, para $|z| < 1$, la serie dada converge, además absolutamente, y para $|z| > 1$, diverge. Para $z = 1$, se obtiene la serie armónica divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, y para $z = -1$, la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (véanse el p. 35.3 y el p. 35.9). De esta forma, en este ejemplo sobre la frontera del círculo de convergencia hay puntos en los cuales la serie converge y hay puntos en los cuales diverge.

De los ejemplos analizados (véase también el p. 36.1) se ve que a veces el radio de convergencia $R$ de la serie de potencias se halla con ayuda del criterio de D'Alambert de convergencia de las series con términos positivos (véase el teorema 8 en el p. 35.6). Efectivamente, es válida la siguiente afirmación: *si existe el límite (finito o infinito)* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, *entonces*

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{37.8}$$

En efecto, si el número $R$ está definido por esta fórmula y $|z| < R$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{a_n z^n} = |z| \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|}{R} < 1,$$

y por esto la serie (37.3) para este $z$ converge (y además absolutamente).

Si $|z| > R$, entonces $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|z|}{R} > 1$ y, por consiguiente, la serie (37.3) diverge absolutamente. De esta forma, $R$, en efecto, es el radio de convergencia de la serie (37.3).

De forma análoga se puede hallar la magnitud del radio de convergencia $R$ con ayuda del criterio de Cauchy (véase el teorema 9 en el p. 35.6), si sólo existe el límite (finito o infinito) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. En este caso

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{37.8'}$$

En efecto, si el número $R$ está dado por esta fórmula y si $|z| < R$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R} < 1,$$

y por esto la serie (37.3) converge. Si $|z| > R$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \frac{|z|}{R} > 1$$

y, por lo tanto, la serie (37.3), no converge absolutamente.

De esta forma, $R$ es el radio de convergencia de la serie (37.3).

Al aplicar este método de determinación del radio de convergencia de una serie de potencias pueden surgir dificultades, por ejemplo, en el caso cuando en la serie analizada se tienen coeficientes, con números tan grandes como se quiera, iguales a cero. En este caso se puede probar utilizar el método señalado, renumerando previa y consecutivamente todos los términos de la serie con coeficientes distintos de cero (por lo que su convergencia y suma, en caso de que converja, no varían).

Aclaremos lo dicho en un ejemplo. Supongamos que se exige determinar el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{donde} \quad a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad n = 1, 3, 5, \ldots, \\ 0 & \text{si} \quad n = 0, 2, 4, \ldots. \end{cases}$$

El criterio D'Alembert no es aplicable para determinar la convergencia de esta serie, ya que la relación $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ no tiene sentido para los números pares $n$. Tampoco nos da respuesta en este caso el criterio de Cauchy, ya que no es difícil comprobar que aquí el límite $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ no existe. Sin embargo, si hacemos $b_k = \frac{1}{2k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, y escribimos la serie dada en la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1},$$

entonces, investigando la convergencia absoluta de esta serie con ayuda del criterio de D'Alembert, obtendremos

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|b_{k+1} z^{2k+3}|}{|b_k z^{2k+1}|} = |z|^2 \lim_{k \to \infty} \frac{2k+1}{2k+3} = |z|^2.$$

De aquí se deduce que la serie analizada converge absolutamente, cuando $|z^2| < 1$, es decir, cuando $|z| < 1$, y diverge absolutamente cuando $|z| > 1$. De esta forma, el radio de convergencia de esta serie de potencias es igual a 1.

Subrayemos, que con ayuda del criterio de D'Alembert y del criterio de Cauchy se puede hallar el radio de convergencia no para una serie de potencias arbitrarias, sino sólo para aquella para la cual existen los límites señalados anteriormente (es posible, después de una nueva numeración de sus términos).

Ejercicios. Determínense los radios de convergencia de las series:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n$.
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n z^{2n}$.

## 37.2*. FÓRMULA DE CAUCHY — HADAMARD PARA EL RADIO DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE POTENCIAS

Hallemos ahora la fórmula para determinar el radio de convergencia de una serie de potencias arbitraria, a través de sus coeficientes en el caso general.

**Teorema 4.** *Sea R el radio de convergencia de la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{37.3}$$

*entonces*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \ ^{*)}. \tag{37.9}$$

La fórmula (37.9) se llama *fórmula de Cauchy-Hadamard***).

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $\rho = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Analicemos inicialmente el caso de $\rho = 0$. Mostremos que en este caso la serie (37.3) converge para cualquier $z$. Tomemos cualquier $z \neq 0$ y $\varepsilon$ tal que $0 < \varepsilon < 1$. Entonces (véase el teorema 10 en el p. 4.12*) existe $N$ tal que

$\sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{\varepsilon}{|z|}$ para todos los $n \geqslant N_1$, es decir,

$$|a_n|\,|z|^n < \varepsilon^n \text{ para todos los } n \geqslant N_1.$$

De aquí, por el criterio de comparación se deduce que la serie (37.3) converge absolutamente, y por lo tanto, sencillamente converge para el $z$ dado, y ya que $z$ era arbitrario, entonces esto significa que $R = +\infty$.

Tomemos otro caso extremo: sea $\rho = +\infty$. Mostremos que en este caso la serie (37.3) diverge para cualquier $z \neq 0$. En efecto, si $\rho = +\infty$, entonces existe la sucesión $n_k$, $k = 1, 2, \dots$, de la serie natural, tal que $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty$. Por esto, cualquiera que sea $z \neq 0$, existe un número $k$ tal que para $k > k_z$

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant \frac{1}{|z|}, \text{ es decir, } |a_{n_k} z^{n_k}| \geqslant 1.$$

De esta forma, no se cumple la condición necesaria de convergencia de una serie, o sea, la tendencia a cero de su término $n$-ésimo, por esto para un $z \neq 0$ dado, la serie diverge y ya que $z \neq 0$ era arbitrario, entonces esto significa que $R = 0$.

Sea ahora $0 < \rho < +\infty$. Mostremos que para cualquier $z$ tal que $|z| < \dfrac{1}{\rho}$ la serie (37.3) converge. Elijamos $\varepsilon > 0$ de tal modo que $|z| < \dfrac{1}{\rho + \varepsilon}$***), entonces el número $q$, definido por la igualdad $q = (\rho + \varepsilon)\,|z|$, va a satisfacer la desigualdad $q < 1$. Por la propiedad del límite superior existe un número $N_1$ tal que para $n \geqslant N_1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon,$$

*) Sobre el límite superior véase en el p. 4.12*.

**) J. Hadamard (1865 — 1963), matemático francés.

***) Para esto es suficiente tomar $\varepsilon < \dfrac{1}{|z| - \rho}$.

por esto para $n \geqslant N_1$

$$|z|\sqrt[n]{|a_n|} < |z|(\rho + \varepsilon) = q, \quad \text{es decir,} \quad |a_n z^n| < q^n, \quad 0 < q < 1,$$

y por el criterio de comparación la serie (37.3), para el $z$ analizado, converge absolutamente, y por lo tanto, sencillamente converge.

Mostremos ahora, que la serie (37.3), para cualquier $z$ tal que $|z| > \dfrac{1}{\rho}$, diverge.

Escojamos $\varepsilon > 0$ de tal modo que

$$|z| > \frac{1}{\rho - \varepsilon} > 0, \tag{37.10}$$

entonces $|z|(\rho - \varepsilon) > 1$. Según la propiedad del límite superior (véase el teorema 10 del p. 4.12*), existe la subsucesión $n_k$, $k = 1, 2, \ldots$, de números naturales tal que

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \rho - \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

De esto, en virtud de (37.10) se deduce que

$$|z| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > |z|(\rho - \varepsilon) > 1$$

y, por lo tanto,

$$|a_{n_k} z^{n_k}| > 1,$$

es decir, en este caso no se cumple la condición necesaria de la convergencia de una serie, o sea, la tendencia a cero de su término $n$-ésimo, y por esto para el $z$ analizado la serie (37.3), diverge.

De esta forma, la serie (37.3) converge si $|z| < \dfrac{1}{\rho}$ y diverge, si $|z| > \dfrac{1}{\rho}$, y esto significa que $R = \dfrac{1}{\rho}$. $\square$

### 37.3. FUNCIONES ANALÍTICAS

**Definición 3.** *La función $f(z)$ se llama analítica en el punto $z_0$ si existe $R > 0$ tal que en el círculo $|z - z_0| < R$ ella es representable por una serie de potencias del tipo* (37.1), *es decir, existen los números complejos $a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, tales que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R. \tag{37.11}$$

La suma, la deferencia y el producto de funciones analíticas en un punto es otra vez una función analítica en este punto (¿por qué?).

**Lema 1.** *Si $R$ es el radio de convergencia de la serie* (37.11), $R > 0$ *y*

$$r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

*es el resto de la serie* (37.11), *entonces*

$$r_n(z) = O((z - z_0)^{n+1}) \text{ cuando } z \to z_0, \tag{37.12}$$

*y, por lo tanto,*

$$r_n(z) = o((z - z_0)^n) \text{ cuando } z \to z_0. \tag{37.13}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $|z - z_0| < R$, entonces

$$r_n(z) = (z - z_0)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z - z_0)^{k-n+1}$$

y la serie, que se obtiene después de sacar el factor $(z - z_0)^{n+1}$, converge. Por esto la función $\varphi(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z - z_0)^{k-n-1}$ como la suma de una serie de potencias, es continua en el circulo $|z - z_0| < R$.

Si ahora $0 < r < R$, entonces la función $\varphi(z)$, siendo continua sobre el circulo cerrado $|z - z_0| \leqslant r$, será, además, acotada sobre él, es decir, se encuentra una constante $M > 0$ tal que (véase el p. 23.3) para $|z - z_0| \leqslant r$ se cumple la desigualdad $|\varphi(z)| \leqslant M$. Por cuanto $r_n(z) = (z - z_0)^{n+1} \varphi(z)$, entonces para $|z - z_0| \leqslant r$ obtendremos:

$$|r_n(z)| = |z - z_0|^{n+1}|\varphi(z)| \leqslant M|z - z_0|^{n+1},$$

y esto significa (37.12). La condición (37.13) se deduce directamente de (37.12). □

**Teorema 5.** *La representación de la función $f(z)$, analítica en el punto $z_0$, en la forma de serie de potencias* (37.11) *es única, es decir, si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R, \quad R > 0, \tag{37.14}$$

*entonces*

$$a_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

DEMOSTRACIÓN. De la igualdad (37.14) para $n = 0$, según la fórmula (37.12) se deduce que cuando $z \to z_0$

$$a_0 + O(z - z_0) = b_0 + O(z - z_0).$$

Pasando en esta igualdad al límite para $z \to z_0$, obtendremos $a_0 = b_0$.

Supongamos que ya está demostrado que

$$a_j = b_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n - 1,$$

entonces por (37.12) y (37.14)

$$a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + O((z - z_0)^{n+1}) =$$
$$= b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots + b_n(z - z_0)^n + O((z - z_0)^{n+1}).$$

Eliminando los términos iguales en ambos miembros de esta igualdad y dividiendo ambos miembros por $(z - z_0)^n$ tendremos

$$a_n + O(z - z_0) = b_n + O(z - z_0), \quad z \to z_0.$$

De aquí, en el límite cuando $z \to z_0$ obtendremos que $a_n = b_n$ (compárese con el teorema 2 en el p. 13.2). □

Puede suceder que sólo analizando la serie en el dominio de los números complejos se puede explicar la magnitud de su radio de convergencia. Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

que es la suma de la progresión geométrica con denominador $-x^2$, converge para $|x| < 1$ y diverge para $|x| \geqslant 1$. Su suma sobre el intervalo $(-1; 1)$ es igual a $\frac{1}{1+x^2}$. La función $\frac{1}{1+x^2}$ está definida y es infinitamente diferenciable sobre todo el eje real, por esto no se entiende por qué al descomponerla en la serie

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

obtenemos una serie que sólo converge para $|x| < 1$. Esto se hace completamente natural, si analizamos esta función en el dominio de los números complejos, ya que la función $\frac{1}{1+z^2}$ tiene un "punto singular" para $z = i$ (en este punto la función no está definida y cuando se acerca a él, tiende al infinito), es decir, precisamente en la frontera del círculo $|z| \leqslant 1$.

## 37.4. FUNCIONES ANALÍTICAS REALES

En el presente punto en lo fundamental se estudiarán las series de potencias con términos reales. Sin embargo, previamente demostraremos un lema, válido para las series de potencias en el dominio complejo.

**Lema 2.** *Los radios de convergencia de las series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{37.15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}, \tag{37.16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{37.17}$$

*son iguales.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $R$ el radio de convergencia de la serie (37.15); $R_1$, el radio de convergencia de la serie (37.16) y $R_2$, el radio de convergencia de la serie (37.17). De las desigualdades

$$\left|\frac{a_n z^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant |z|\,|a_n z^n| \leqslant |z^2|\,|n a_n z^{n-1}|,\ n = 1, 2, \ldots,$$

y del teorema de comparación (véase el teorema 6 en el p. 35.5) se deduce que si en cierto punto $z$ converge la serie (37.17), entonces en este punto converge también la serie (37.16) y si en cierto punto $z$ converge la serie (37.16), entonces en este mismo punto converge también la serie (37.15). De aguí se deduce que

$$R_2 \leqslant R \leqslant R_1. \tag{37.18}$$

Mostremos ahora que

$$R_1 \leqslant R_2. \tag{37.19}$$

Supongamos que la serie (37.16) converge en el punto $z_0$ y $0 < |z_0| < R_1$. Escojamos el número real $r$ tal que $|z_0| < r < R_1$. Entonces para $n = 1, 2, \ldots$, obtendremos

$$|na_n z_0^{n-1}| = \frac{n(n+1)}{|z_0|^2}\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| \left|\frac{z_0}{r}\right|^{n+1}. \tag{37.20}$$

En virtud de la convergencia de la serie (37.16) para $z = r$, el término general de esta serie para $z = r$ tiende a cero, cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| = 0.$$

Por lo tanto, la sucesión $\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right|$, $n = 1, 2, \ldots$, es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que para todos los $n = 1, 2, \ldots$, se cumple la desigualdad

$$\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant M.$$

Haciendo $q = \left|\frac{z_0}{r}\right|$ de (37.20) obtendremos la desigualdad

$$|na_n z_0^{n-1}| \leqslant \frac{n(n+1)}{|z_0|^2} M q^{n+1}, \quad 0 < q < 1.$$

Ya que la serie con término general $\frac{n(n+1)}{|z_0|^2} M q^{n+1}$ converge (es fácil convencerse de esto, por ejemplo, según el criterio de D'Alembert), entonces para $z = z_0$ converge también la serie (37.17). La desigualdad (37.19) está demostrada. De las desigualdades (37.18) y (37.19) se deduce que

$$R = R_1 = R_2. \ \square$$

OBSERVACIÓN. La afirmación del lema puede ser demostrada de una forma más sencilla si se utiliza la fórmula de Cauchy — Hadamard para el radio de convergencia de una serie de potencias (véase el p. 37.2*). No hemos hecho esto, ya que la demostración dada tampoco es complicada y por cuanto no utiliza la fórmula de Cauchy — Hadamard, entonces el punto 37.2* puede ser omitido en la primera lectura (lo que señala el asterisco adjunto a su número).

En lo adelante de este párrafo en todos los casos cuando no se diga lo contrario, supondremos que los coeficientes de todas las series analizadas son reales y que las variables $z$ y $z_0$ también son reales (en este caso las denotaremos por $x$ y $x_0$). Cierto es, que todas las propiedades de las series de potencias analizadas a continuación se trasladan también, en cierto sentido, sobre las series de potencias en el dominio complejo; sin embargo para esto tendríamos que generalizar el concepto de derivada e integral para las funciones de argumento complejo, y esto no se incluye en el objetivo del presente curso.

Así, analizaremos las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{37.21}$$

donde $a_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$, $x$ y $x_0$ son reales. Si $R$ es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)$ donde $z$ es un número complejo, es decir, la serie con los mismos coeficientes que la serie (37.21), pero analizada en el dominio complejo. entonces, evidentemente, la serie (37.21) converge si $|x - x_0| < R$ y diverge si $|x - x_0| > R$.

En este caso $R$, como hasta ahora, se llama *radio de convergencia de la serie* (37.21), y el intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ *es su intervalo de convergencia.*

**Teorema 6.** *Si $R$ es el radio de convergencia de la serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \tag{37.22}$$

$R > 0$, *entonces*

1) *la función $f$ tiene en el intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ derivadas de todos los órdenes, las cuales se hallan a partir de la serie* (37.22) *diferenciando término a término;*

2) *para cualquier $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

*es decir, en el interior del intervalo de convergencia la serie de potencias puede ser integrada término a término;*

3) *las series de potencias que se obtienen de la serie* (37.22) *como resultado de la diferenciación o de la integración término a término, tienen el mismo radio de convergencia que la propia serie* (37.22).

DEMOSTRACIÓN. Por el lema, demostrado al inicio de este párrafo, los radios de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1},$$

obtenida de la serie (37.22) diferenciando término a término, y de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

obtenida de la misma serie integrando término a término, son iguales al radio de convergencia de la serie (37.22) (para convencerse de esto, es suficiente hacer el cambio de variable $x - x_0 = z$).

Por cuanto cualquier serie de potencias de la forma (37.22) con radio de convergencia $R$, converge uniformemente sobre el segmento $[x_0 - r, x_0 + r]$, $0 < r < R$ (véase el teorema 2 en el p. 37.1), entonces la afirmación del teorema sobre la posibilidad de la diferenciación y de la integración término a término de las series de potencias reales, se deduce directamente de los teoremas correspondientes sobre la diferenciabilidad e integrabilidad de las series funcionales, demostrados en el punto 36.4. □

Observemos que, por ejemplo, la posibilidad de integración término a término de la serie de potencias (37.22) dentro del intervalo de convergencia $(x_0 - R, x_0 + R)$ se deriva inmediatamente (véase el teorema 9 en el p. 36.4) de que la serie de potencias converge uniformemente sobre cualquier segmento $[x_0 - r, x_0 + r]$, $0 < r < R$. De aquí se deduce que durante la integración término a término el radio de convergencia de una serie de potencias no disminuye. El teorema demostrado contiene una afirmación más completa, que el radio de convergencia señalado, además, no aumenta, es decir, permanece igual.

**Teorema 7.** *Si la función $f$ es analítica en el punto $x_0$, es decir, es representable en un entorno de este punto, por la serie* (37.22) *con radio de convergencia $R > 0$, entonces*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{37.23}$$

*es decir,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

DEMOSTRACIÓN. Diferenciando $n$ veces ambos miembros de la igualdad (37.22), obtendremos (véase el teorema 6):

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot a_n + (n+1)n\ldots 2n_{n+1}(x - x_0) + \\ + (n+2)(n+1)\ldots 3a_{n+2}(x - x_0)^2 + \ldots .$$

De aquí, para $x = x_0$ se obtiene la fórmula (37.23). □

Observemos que del teorema demostrado se deduce otra vez la propiedad de la unicidad del desarrollo de una función en serie de potencias (cierto está, esta vez a base de las restricciones hechas sólo en el dominio real, compárese con el p. 37.3).

## 37.5. DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIES DE POTENCIAS. DIFERENTES FORMAS DE ESCRITURA DEL TÉRMINO RESIDUAL DE LA FÓRMULA DE TAYLOR

**Definición 4.** *Sea la función $f$ definida en cierto entorno del punto $x_0$ y tiene en este punto derivadas de todos los órdenes. Entonces la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{37.24}$$

*se llama serie de Taylor de la función $f$ en el punto $x_0$.*

Para $x_0 = 0$ la serie (37.24) se llama también serie de Maclaurin de la función $f(x)$.

Como sabemos, cualquier función analítica en el punto $x_0$ es infinitamente diferenciable en cierto entorno de este punto y es igual en este entorno a la suma de su serie de Taylor. Resulta que lo contrario, en general, no es cierto: existen funciones infinitamente diferenciables, pero que no son analíticas, y por consiguiente, no representables por su serie de Taylor.

Un ejemplo de esta función es la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{para} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases} \tag{37.25}$$

Para $x \neq 0$ esta función tiene derivadas de todos los órdenes, las que se calculan fácilmente:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad f''(x) = -\frac{6}{x^4} e^{-1/x^2} + \frac{4}{x^6} e^{-1/x^2},$$

y en general

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$$

donde $P_n(1/x)$ es un polinomio de cierto grado respecto a $1/x$ ($n$ es el número de orden y no el grado del polinomio), es decir, $f^n(x)$ es una combinación lineal de los sumandos del tipo

$$\frac{1}{x^m} e^{-1/x^2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{37.26}$$

Esto se comprueba fácilmente por inducción. Haciendo el cambio de variable $t = \dfrac{1}{x^2}$ hallamos, aplicando la regla de L'Hospital, el límite del módulo de la expresión (37.26) cuando $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{1}{x^m} e^{-1/x^2} \right| = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{m/2}}{e^t} = 0.$$

De aquí se deduce que el límite de la expresión (37.26) cuando $x \to 0$ también es igual a cero y que para cualquier $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lim_{x \to 0} f^n(x) = \lim_{x \to 0} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0. \tag{37.27}$$

De la fórmula (37.27) para $n = 0$ y $n = 1$ se deduce que la función $f$ es continua en el punto $x = 0$ y $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$, por esto (véase el corolario 3 del teorema 3 del p. 11.2) $f'(0)$ existe y $f'(0) = 0$. Por inducción es fácil convencerse en forma semejante de que $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ .

De esta forma, todos los términos de la serie de Taylor de la función (37.25) en el punto $x_0 = 0$ son iguales a cero, por esto su suma para todos los $x$, también es igual a cero y, por lo tanto, no coincide con la propia función $f$. Observemos también que por el teorema 5 del p. 37.3, la función (37.25) no puede ser descompuesta en ninguna serie de potencias (ya que si esto fuera posible ésta sería una serie de Taylor), y esto significa que la función no es analítica.

Ejercicios. 6. ¿Se puede desarrollar la función $f(x) = e^{-1/x}$, $x > 0$, sobre el segmento $[0, 1]$ en una serie de Maclaurin?

7. Sea

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x \geqslant 0, \\ -1 & \text{cuando } x < 0. \end{cases}$$

Demuéstrese que la función $\theta(x)e^{-1/x^2}$ puede definirse complementariamente para $x = 0$ de tal forma que como resultado se obtenga una función infinitamente diferenciable sobre todo el eje numérico.

Observemos que si una función se descompone, en cierto entorno de un punto dado, en una serie de potencias, entonces esta serie es única (véase el teorema 5 ó el teorema 7) y es su serie de Taylor. Sin embargo, una misma serie de potencias puede ser serie de Taylor para distintas funciones. Así, la serie de potencias con coeficientes nulos $\sum_{n=0}^{\infty} 0x^n$ es tanto serie de Taylor de la función idénticamente nula sobre todo el eje numérico: $f(x) = 0$, $x \in R$, como serie de Taylor para la función (37.25) en el punto $x = 0$.

Surge la pregunta: ¿cuándo la *serie de Taylor* (37.24) de la función $f(x)$ sobre cierto intervalo converge a $f(x)$? Para investigar esta cuestión, escribamos la *fórmula de Taylor* para la función $f$ (véase el p. 13.1):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x) \tag{37.28}$$

la que es válida para cualquier $n = 0, 1, 2, \ldots$ . En esta fórmula $r_n(x)$ denota el término residual de la fórmula de Taylor, y no el resto de la serie de Taylor, ya que con el resto de la serie no se puede operar hasta que se establezca que la serie converge, sólo en este caso se puede afirmar que el término residual de la fórmula de Taylor coincide con el resto de la serie de Taylor. Suponiendo

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

escribamos la fórmula (37.28) en la forma

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x) \tag{37.29}$$

donde $s_n(x)$ es la suma parcial $n$-ésima de la serie de Taylor. De aquí se ve que para que la función $f$ sea igual, sobre el segmento analizado, a la suma de su serie de Taylor, es decir, para que $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, es necesario y suficiente que *para todos los x de este intervalo su término residual en la fórmula de Taylor tienda a cero*,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{37.30}$$

Si esto tiene lugar, entonces de la fórmula (37.29) se deduce que el término residual de la fórmula de Taylor $r_n(x)$ es también la suma del resto $n$-ésimo de la serie de Taylor (37.24).

**Teorema 8.** *Sea la función $f$ definida y continua junto con todas sus derivadas hasta el orden $n + 1$ inclusive, sobre el intervalo $(x_0 - h, x_0 + n)$, $h > 0$. Entonces el término residual $r_n(x)$ de su fórmula de Taylor* (37.29) *para todos los $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ puede ser escrito en las tres formas siguientes:*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{37.31}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{37.32}$$

*donde $\xi$ pertenece al intervalo con extremos en los puntos $x_0$ y $x$, y*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{n!}(1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1} \tag{37.33}$$

*donde $0 < \theta < 1$.*

*La fórmula* (37.31) *se llama término residual de la fórmula de Taylor en forma integral, la fórmula* (37.32), *en la forma de Lagrange, y la* (37.33), *en la forma de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN. Del teorema fundamental del cálculo diferencial e integral (véase en el p. 29.3 el teorema 4), tenemos

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f'(t)\,d(x - t).$$

Integrando por partes la integral en la parte derecha, obtendremos

$$f(x) = f(x_0) + [-f'(t)(x - t)]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)\,dt =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\int_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)\,dt.$$

Supongamos que está demostrado para cierto $m \leqslant n$, que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x - t)^{m-1}\,dt. \tag{37.34}$$

Integremos por partes el último término otra vez:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x - t)^{m-1}\,dt = -\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)\,d(x - t)^m =$$
$$= -\left.\frac{f^{(m)}(t)(x - t)^m}{m!}\right|_{x_0}^{x} + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x - t)^m\,dt =$$
$$= \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x - t)^m\,dt$$

y sustituyamos esta expresión en (37.34):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x - t)^m dt.$$

Como resultado se ha obtenido la fórmula (37.34), en la cual $m$ ha sido sustituida por $m + 1$.

De esta forma, la fórmula (37.34) está demostrada por el método de inducción para todos los $m \leqslant n$. Para $m = n$ su término residual tiene la forma (37.31).

Apliquemos ahora el primer teorema integral sobre el valor medio a la integral (37.31), sacando fuera del signo de la integral "el valor medio" de la derivada $f^{(n+1)}$ (véase el corolario del teorema 1 en el p. 28.2):

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(x - t)^{n+1}}{n+1}\right]_{x_0}^{x} = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

donde $\xi$ está sobre el intervalo con extremos en los puntos $x_0$ y $x$.

La fórmula (37.32) está demostrada.

Si aplicamos el teorema integral sobre el valor medio a la integral (37.31), sacando fuera del signo de la integral "el valor medio" de toda la función subintegral (véase el p. 28.2), entonces obtendremos

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n (x - x_0), \tag{37.35}$$

donde $\xi$, como antes, está sobre el intervalo con extremos en los puntos $x_0$ y $x$, es decir,

$$\xi = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1.$$

De aquí $x - \xi = x - x_0 - \theta(x - x_0) = (x - x_0)(1 - \theta)$. Substituyendo esta expresión en (37.35), obtenemos la fórmula (37.33). □

Señalemos ahora una condición suficiente del desarrollo de una función en serie de potencias.

**Teorema 9.** *Sean la función $f$ y todas sus derivadas acotadas en conjunto sobre el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que para todos los $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ y todos los $n = 0, 1, 2, \ldots$, se cumple la desigualdad*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M. \tag{37.36}$$

*Entonces sobre el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$ la función $f$ se desarrolla en la serie de Taylor*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < h. \tag{37.37}$$

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, observemos que cualquiera que sea el número $a$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \tag{37.38}$$

(véase el ejemplo 4 en el p. 4.9, además, esta igualdad se deduce directamente de que la expresión $a^n/n!$ es el término general de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ (véase el (36.4)).

Para demostrar la fórmula (37.37) es suficiente convencerse (véase (37.30)) de que

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \tag{37.39}$$

donde $r_n(x)$ es el término residual en la fórmula de Taylor de la función $f$. Tomemos $r_n(x)$ en la forma de Lagrange (véase (37.32)). De la desigualdad (37.36) se deduce que

$$|r_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

donde $|\xi-x_0|<|x-x_0|<h$. Por cuanto según (37.38)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

entonces para $|x-x_0|<h$ se cumple la condición (37.39). □

Ejercicio 8. Sustituyamos en el teorema 8 la condición de acotación de las derivadas $f^{(n)}(x)$, $n=1,2,\ldots$, sobre el intervalo $(x_0-h, x_0+h)$ por la condición de su acotación sólo en el punto $x_0$, es decir, supongamos que existe $M>0$ tal que para todos los $n$ se cumple la desigualdad $|f^{n}(x_0)|\leqslant M$. Entonces, evidentemente, la serie (37.37) converge y además absolutamente sobre todo el intervalo $(x_0-h, x_0+h)$ ya que $\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\right|\leqslant$ $\leqslant\frac{M(x-x_0)^n}{n!}$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}$ converge para todos los $x$ (véase la serie (36.4)). ¿Si se deduce de aquí la afirmación del teorema 9?

## 37.6. DESARROLLO DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES EN SERIES DE TAYLOR

Ante todo hallemos el desarrollo en serie de algunas de las principales funciones elementales.

1. *Desarrollo en serie de la función* $f(x)=e^x$. Ya que $f^{(n)}(x)=e^x$, entonces para cualquier $h>0$ dado, para todos los $x\in(-h,h)$ y todos los $n=0,1,\ldots$

$$0<f^n(x)<e^h.$$

De esta forma, las condiciones del teorema 9 se cumplen ($x_0=0$), por esto la función $e^x$ se desarrolla en la serie de Taylor (37.34) sobre cualquier intervalo finito y, por consiguiente, sobre todo el eje real. Por cuanto en el caso dado $f^{(n)}(0) = 1$, entonces esta descomposición tiene la forma

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{37.40}$$

Recordemos que en el p. 36.1 se estableció que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge absolutamente sobre todo el plano complejo*). Vemos ahora, que para los $z = x$ reales su suma es igual a $e^x$. En el caso de $z$ esencialmente complejos, su suma por analogía se denota por $e^z$; de esta forma, la fórmula

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{37.41}$$

para los complejos $z$ es la definición de la función $e^z$.

La definición dada es natural, en primer lugar porque en el caso de $z = x$ real esta función coincide con la función exponencial $e^x$, y en segundo lugar porque la función $e^z$ conserva una serie de propiedades características de la función $e^x$. Mostremos, por ejemplo, que

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \tag{37.42}$$

para $z_1$ y $z_2$ complejos cualesquiera.

Sabemos que la serie (37.41) converge absolutamente, por esto las series

$$e^{z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}, \quad e^{z_2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}$$

pueden multiplicarse término a término (véase el p. 35.10), además, ya que la serie que se obtiene en este caso también absolutamente converge, sus términos se pueden colocar en orden arbitrario. Juntemos todos los términos que contengan el producto $z_1^n z_2^m$ con igual suma $n + m$, y coloquemos estos grupos de términos según el crecimiento de $n + m$:

$$e^{z_1}e^{z_2} = \sum_{n+m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+m} \frac{z_1^{(n+m-k)}}{(n+m-k)!} \cdot \frac{z_2^k}{k!} =$$

$$= \sum_{n+m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m)!} \sum_{k=0}^{n+m} \frac{(n+m)!}{(n+m-k)!k!} z_1^{n+m-k} z_2^k =$$

$$= \sum_{n+m=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^{n+m}}{(n+m)!} = e^{z_1+z_2}.$$

---

*) Esto se deduce, por el teorema de Abel, también de la convergencia de la serie (37.40), demostrada por nosotros, sobre todo el eje real.

2. *Desarrollo en serie de* sh $x$ *y* ch $x$. Sustituyendo en la fórmula (37.40) $x$ por $-x$ (esto significa sencillamente un cambio de notación), obtenemos

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}. \tag{37.43}$$

Sumando y restando las igualdades (37.40) y (37.43), y después dividiéndolas por dos, obtenemos

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{37.44}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{37.45}$$

En las partes derechas de estas fórmulas, por la unicidad del desarrollo de funciones en series de potencias están las series de Taylor de las funciones ch $x$ y sh $x$.

Ya que la función $e^z$ está definida ahora para todos los $z$ complejos, entonces sobre los valores esencialmente complejos del argumento se pueden extender también las funciones hiperbólicas sh $x$ y ch $x$, haciendo

$$\operatorname{ch} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Las funciones ch $z$ y sh $z$, definidas de esta forma, para los $z$ complejos se desarrollan en las series de potencias (37.44) y (37.45), que convergen sobre todo el plano complejo (en ellas por $x$ en este caso se entiende un número complejo).

3. *Desarrollo en serie del* sen $x$ *y del* cos $x$. *Fórmulas de Euler*. Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ (véase el ejemplo 3 en el p. 10.1), por esto $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ para todos los reales $x$. Por el teorema 9, de aquí se deduce que la función sen $x$ se desarrolla en una serie de potencias sobre todo el eje real. Recordando la fórmula de Taylor para el seno (véase el p. 13.3), obtenemos la serie de Taylor para el sen $x$:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{37.46}$$

Razonando de forma análoga y recordando la fórmula de Taylor para el coseno (véase el p. 13.3), obtenemos para ella la fórmula de Taylor

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \tag{37.47}$$

que también converge sobre todo el eje real.

Por el teorema de Abel (véase el p. 37.1), las series que se encuentran en los segundos miembros de las fórmulas (37.46) y (37.47), convergen también para cualquier complejo $x$; esto permite extender el seno y el coseno sobre los valores complejos del argumento, haciendo para cualquier complejo $z$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{37.48}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}. \tag{37.49}$$

En el dominio complejo es fácil establecer la relación entre la función exponencial y las trigonométricas. Sustituyendo en la serie (37.41) $z$ inicialmente por $iz$ y después por $-iz$, tenemos

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!}; \quad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}. \tag{37.50}$$

Observando ahora que

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{cuando } n = 4k, \\ i & \text{cuando } n = 4k+1, \\ -1 & \text{cuando } n = 4k+2, \\ -i & \text{cuando } n = 4k+3, \end{cases}$$

y, por consiguiente, $i^{2k} = (-1)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, de (37.50) tendremos

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Comparando estas fórmulas con (37.48) y (37.49), obtendremos

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{37.51}$$

De ellas se deduce directamente también la fórmula

$$\cos z + i \operatorname{sen} z = e^{iz}. \tag{37.52}$$

Estas fórmulas, naturalmente, son válidas, en particular, para los $z$ reales.

Las fórmulas (37.51) y (37.52) se llaman *fórmulas de Euler*. Señalemos dos aplicaciones sencillas de ellas.

Si en la fórmula (37.52) $z = \varphi$ es un número real, entonces

$$\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi = e^{i\varphi}.$$

Por esto el número complejo con módulo $r$ y argumento $\varphi$

$$r = z(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

se puede escribir en la forma

$$z = re^{i\varphi}.$$

Haciendo aquí $z = -1$, y, por consiguiente, $\varphi = \pi$, obtendremos

$$e^{i\pi} = -1$$

que es una relación entre los números $e$, $\pi$ e $i$.

Recordemos que los números $\pi$, $e$ e $i$ surgieron en matemática por motivos completamente distintos y alejados unos de otros: el número $\pi$, como la relación de la longitud de la circunferencia con respecto al diámetro; $e$, como la base de la función exponencial para la cual la derivada de la función coincide con la propia función y la unidad imaginaria $i$ fue introducida para que cada ecuación cuadrática tuviera solución.

Con auyda de la fórmula de Euler es fácil hallar el módulo y el argumento del número $e^z$, donde $z = x + iy$. En efecto (véase (37.42)),

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y),$$

es decir, $|e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} e^z = y$.

El seno y el coseno en el dominio complejo tienen muchas propiedades que las poseen también en el dominio real, sin embargo no todas; surgen también nuevas propiedades.

Ejercicios. Demuéstrese que para cualquier complejo $z$:

9. $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$, $\cos(-z) = \cos z$.
10. $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.
11. $\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z$, $\cos(z + 2\pi) = \cos z$.
12. Demuéstrese que para todos los $z \in C$ es válida la desigualdad $e^z \neq 0$.
13. Sea $\operatorname{tg} z \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$. Demuéstrese que para todos los $z \in C$ se cumple la desigualdad $\operatorname{tg} z \neq \pm i$. *Indicación.* Exprésese $\operatorname{tg} z$ a través de la función exponencial $e^z$.
14. ¿Se pueden desarrollar las funciones $\sqrt{z}$, $\operatorname{sen}\sqrt{z}$, $\cos\sqrt{x}$ en la serie de potencias (37.3)?

Mostremos que los valores absolutos del seno y el coseno en el dominio complejo pueden ser mayores que la unidad y, más aún, tener no acotados sus valores absolutos.

Sustituyamos en las series (37.48) y (37.49) $z$ por $iz$:

$$\operatorname{sen} iz = i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos iz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Comparando las series obtenidas con las series (37.44) y (37.45) (para $x = z$), obtendremos

$$i\operatorname{sh} z = \operatorname{sen} iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz.$$

En particular para $z = y$ real

$$|\operatorname{sen} iy| = |\operatorname{sh} y| \quad \text{y} \quad |\cos iy| = \operatorname{ch} y$$

de donde se ve que sobre el eje imaginario las funciones sen $z$ y cos $z$ no son acotadas en valor absoluto.

En calidad de propiedad de nuevo tipo, que aparece para la función exponencial $e^z$ en el domino complejo, señalemos ahora su periodicidad*). Precisamente, demostremos que la función $e^z$ tiene periodo $2\pi i$:

$$e^{z + 2\pi i} = e^{x + i(y + 2\pi)} = e^x[\cos(y + 2\pi) + i\,\mathrm{sen}(y + 2\pi)] =$$
$$= e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y) = e^{x + iy} = e^z, z = x + iy.$$

4. *Desarrollo en serie de la función* $\ln(1 + x)$. La fórmula de Taylor para $\ln(1 + x)$ tiene la forma (véase el p. 13.3)

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Escribamos el término residual $r_n(x)$ en la fórmula de Lagrange. Notando que

$$[\ln(1 + x)]^{n+1} = (-1)^n \frac{n!}{(1 + x)^{n+1}}$$

obtendremos

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n + 1)(1 + \theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, entonces $0 < \dfrac{1}{1 + \theta x} \leqslant 1$ y por esto $|r_n(x)| < \dfrac{1}{n + 1}$ de donde

$$\lim_{x \to \infty} r_n(x) = 0. \tag{37.53}$$

Si $-1 < x < 0$, entonces es conveniente escribir el término residual $r_n(x)$ en la forma de Cauchy:

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{(1 - \theta)^n}{(1 + \theta x)^{n+1}} x^{n+1}.$$

En este caso

$$0 < \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} = \frac{1 - \theta}{1 - \theta|x|} < 1,$$

ya que en el numerador de la fraccion $\dfrac{1 - \theta}{1 - \theta|x|}$ de la unidad se resta un número mayor que en el denominador, además de esto

$$\frac{1}{1 + \theta x} = \frac{1}{1 - \theta|x|} < \frac{1}{1 - |x|}.$$

---

*) Si la función $f$ está definida sobre cierto conjunto de números (en general complejos) $X$, entonces el número $T \in C$ se llama su *período* si para cada $x \in X$ tenemos $x \pm T \in X$ y $f(x + T) = f(x)$. La función que tiene período se llama *periódica*.

por esto

$$|r_n(x)| \leqslant \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \cdot \frac{1}{|1+\theta x|}\,|x|^{n+1} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

de donde para $-1 < x < 0$ también obtenemos (37.53).

De esta forma,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \tag{37.54}$$

para todos los $x \in (-1;\ 1]$.

Para $x = -1$ la serie, que aparece en el segundo miembro de la igualdad (37.54), se diferencia de la serie armónica sólo en el factor $-1$ y por esto diverge. Diverge también para todos los valores de $x$ tales que $|x| > 1$, ya que en este caso el término $n$-ésimo de la serie (37.54) no tiende a cero, más aún (véase el p. 12.2),

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n}\right| = +\infty.$$

5. *Desarrollo en serie del binomio* $(1+x)^\alpha$. La fórmula de Taylor para la función binominal tiene la forma (véase el p. 13.3)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x). \tag{37.55}$$

Analicemos la serie correspondiente (llamada serie binominal con exponente $\alpha$):

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \tag{37.56}$$

Si $\alpha$ es un entero no negativo, entonces la serie (37.56) contiene solamente un número finito de términos, distintos de cero, y, por lo tanto, converge para todos los $x$.

Analicemos ahora el caso cuando $\alpha$ no es un entero no negativo. En este caso en la serie (37.56) todos los términos son distintos de cero para $x \neq 0$.

Para la investigación de la convergencia absoluta de la serie (37.56) utilicemos el criterio de D'Alembert. Dicho de otra forma, apliquemos el criterio de D'Alembert a la serie con término $n$-ésimo:

$$u_n = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right|.$$

Observando que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha-n}{n+1}x\right| = |x|$ obtendremos que la serie (37.56) converge absolutamente, y por consiguiente, sencillamente converge para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 1$.

Sin embargo, del solo hecho de la convergencia de la serie binominal (37.56) para $|x| < 1$, no se puede aún hacer la conclusión de que su suma es igual a $(1+x)^\alpha$.

Para esto es necesario demostrar que en la fórmula (37.55) $r_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Observando que

$$[(1 + x)^\alpha]^{(n+1)} = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n)(1 + x)^{\alpha - n - 1},$$

escribamos el término residual $r_n(x)$ de la fórmula (37.55) en la forma de Cauchy:

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n)(1 + \theta x)^{\alpha - n - 1}}{n!}(1 - \theta)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

($\theta$ depende de $x$ y de $n$). Hagamos

$$A_n(x) = \frac{(\alpha - 1) \ldots [(\alpha - 1) - (n - 1)]}{n!} x^n,$$

$$B_n(x) = \alpha x(1 + \theta x)^{\alpha - 1}, \quad C_n(x) = \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta x}\right)^n;$$

entonces

$$r_n(x) = A_n(x) B_n(x) C_n(x).$$

Es evidente que $A_n(x)$ es el término general de la serie binominal con exponente $\alpha - 1$, y por consiguiente, por la convergencia de la serie binominal para $|x| < 1$, demostrada anteriormente,

$$\lim_{n \to \infty} A_n(x) = 0, \quad |x| < 1.$$

Más adelante, de que $1 - |x| < 1 + \theta x < 1 + |x|$ se deduce que los valores de $|B_n(x)|$ están incluidos entre las magnitudes

$$|\alpha x|(1 - |x|)^{\alpha - 1} \quad \text{y} \quad |\alpha x|(1 + |x|)^{\alpha - 1}$$

que no depende de $\theta$, es decir, la sucesión $\{B_n(x)\}$ para un $x \in (-1, 1)$ dado, es acotada. Por último,

$$|C_n(x)| = \left|\frac{1 - \theta}{1 - \theta x}\right|^n \leqslant \left|\frac{1 - \theta}{1 - \theta |x|}\right|^n < 1.$$

De las propiedades establecidas de $A_n(x)$, $B_n(x)$ y $C_n(x)$ se deduce, que

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0, \quad |x| < 1.$$

De esta forma, para cualquier $x \in (-1, 1)$ es válida la igualdad

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n.$$

**Problema 26.** Demuéstrese que 1) en el punto $x = 1$ para $\alpha > -1$ la serie binominal converge, y para $\alpha \leqslant -1$ diverge;

2) en el punto $x = -1$ para $\alpha \geqslant 0$ la serie binominal converge absolutamente, y para $\alpha < 0$ diverge.

Además, cada vez, cuando la serie binominal (37.56) converge, su suma es igual a $(1 + x)^\alpha$.

## 37.7. MÉTODOS DE DESARROLLO DE LAS FUNCIONES EN SERIES DE POTENCIA

Diferenciando o integrando los desarrollos conocidos, en series de Taylor, se puede obtener el desarrollo de nuevas funciones en series de potencias. Así, por ejemplo, integrando la fórmula de la progresión geométrica

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^n t^n + \ldots \tag{37.57}$$

en los límites desde 0 hasta $x$, $|x| < 1$ (esto es válido, ya que la serie (37.57) converge uniformemente sobre el segmento con extremos en los puntos 0 y $x$ para $|x| < 1$), obtenemos la conocida fórmula (37.54):

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots .$$

Antes esta fórmula fue demostrada sobre el intervalo semiabierto $(-1; 1]$ y ahora sólo para el intervalo $(-1; 1)$. No obstante, por el segundo teorema de Abel sobre las series de potencias (p. 37.1), de la validez de la fórmula (37.54) sobre el intervalo $(-1; 1)$ se deduce inmediatamente su validez para $x = 1$. En efecto, la serie en la parte derecha de esta fórmula converge para $x = 1$ y, por lo tanto, su suma es continua en este punto (véase el teorema 3 en el p. 37.1), la función $\ln(1 + x)$ también es continua para $x = 1$, por esto en ambos miembros de la igualdad (37.54) (si es conocido que es válida sobre el intervalo $(-1; 1)$) se puede pasar al límite cuando $x \to 1 - 0$ y de esta forma demostrar su validez también para $x = 1$:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Como resultado de la diferenciación o de la integración de la serie de potencias dada, a veces se logra obtener una serie, cuya suma ya es conocida; esto permite calcular también la suma de la serie de potencias inicial.

Ejemplos. 1. Hallemos el desarrollo de la función $\arcsen x$ en serie. Observando que

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

desarrollemos $(\arcsen x)'$ en serie según la fórmula de desarrollo de una potencia del binomio (véase el p. 37.6):

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n} \tag{37.58}$$

El radio de convergencia de la serie obtenida es igual a la unidad (véase allí mismo). Integrando la serie (37.58) desde 0 hasta $x$, $|x| < 1$, obtendremos:

$$\arcsen x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

2. Desarrollemos la función arctg$x$ en serie de potencia y con ayuda de ella hallemos la serie numérica, cuya suma es igual a $\pi$.

Actuando para $|x| < 1$ de forma análoga al ejemplo 1, tenemos:

$$\operatorname{arctg} x = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (37.59)$$

Observemos que la serie obtenida para $x = \pm 1$, por el criterio de Leibniz (véase el p. 35.9, el teorema 11) converge, ya que converge la serie con términos de signo variable:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Ya que la función arctg$x$ es continua para $x = \pm 1$, entonces por el segundo teorema de Abel para las series de potencias (véase en el p. 37.1, el teorema 3) la suma de la serie (37.59), siendo una función continua sobre el segmento $[-1, 1]$ y coincidiendo con arctg$x$ sobre el intervalo $(-1, +1)$, coincide con él también en los puntos extremos $x = \pm 1$. Dicho de otra forma, el desarrollo (37.59) es válido para el segmento $[-1, +1]$. Tomando en este desarrollo, por ejemplo, $x = 1$ y observando que $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, obtendremos

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Esta serie se llama *serie de Leibniz*.

Señalemos que el arco tangente está definido sobre todo el eje numérico, en particular, también fuera del segmento $[-1, 1]$. Sin embargo, su desarrollo en la serie de potencias (37.59) es válido sólo sobre este segmento. Fuera de este segmento la serie (37.59) diverge, de lo que es fácil convencerse, hallando su radio de convergencia, por ejemplo, a base de la fórmula (37.8'). El análisis de este fenómeno se realiza en la teoría de las funciones de variable compleja.

3. Hallemos la suma de la serie

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n. \qquad (37.60)$$

El radio de convergencia de esta serie es igual a la unidad. Es fácil convencerse de esto, por ejemplo, a partir del criterio de D'Alembert

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx} \right| = |x|.$$

Por lo tanto, la serie (37.60) converge absolutamente para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 1$. De (37.60) se deduce que

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad |x| < 1.$$

Integremos esta serie término a término desde 0 hasta $x$, $|x| < 1$:

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

y después diferenciamos la identidad obtenida:

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Como resultado obtenemos

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

4. Hallemos la suma de la serie

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \tag{37.61}$$

El radio de convergencia de esta serie es igual a la unidad; es fácil convencerse de ello, por ejemplo, de la misma forma que en el caso de la serie (37.60). Diferenciando la serie (37.61), término a término

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

y utilizando el desrrollo del logaritmo (véase el p. 37.6), obtendremos

$$xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1 \quad \text{ó} \quad S'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Observando que $S(0) = 0$, definitivamente obtendremos

$$S(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt.$$

De esta forma la respuesta aquí no se expresa en funciones elementales.

5. Durante el desarrollo de las funciones racionales en serie de Taylor es cómodo utilizar su desarrollo en fracciones elementales (véase el p. 23.6). Aclaremos este método con un ejemplo: hallemos el desarrollo de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

en serie de Taylor en los entornos de los puntos $z_0 = 0$, $z_0 = \frac{3}{2}$ y $z_0 = 4$. Desarrollando la función $f(z)$ en fracciones elementales, obtendremos

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z}.$$

Hallemos inicialmente la serie de Taylor para $f(z)$ en el entorno de $z_0 = 0$. Observemos que las fracciones

$$\frac{1}{1-z} \quad \text{y} \quad \frac{2}{2-z} = \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

representan las sumas de las progresiones geométricas infinitas

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

con denominadores $z$ y $\frac{z}{2}$ a condición de que $|z| < 1$ y, respectivamente, que $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$. Ambas condiciones se cumplen cuando se cumple la primera. De esta forma

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) z^n, \quad |z| < 1.$$

Este es el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de Taylor en un entorno del punto $z_0 = 0$, además, el radio de convergencia de la serie obtenida es igual a 1. En efecto, por lo demostrado, éste no puede ser menor que 1 (la serie de potencias obtenida converge para $|z| < 1$), y por otra parte tampoco puede ser mayor que 1, ya que a la distancia unidad del punto $z_0 = 0$ se tiene el punto $z_1 = 1$, para el cual $\lim\limits_{z \to z_1} f(z) = \infty$ y por esto el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de potencias no puede converger en el punto $z_1$.

Para obtener la serie de Taylor de la función $f(z)$ en el entorno del punto $z_0 = \frac{3}{2}$, utilicemos otra vez la suma de la progresión geométrica infinitamente decreciente, pero hagamos esto de otra forma, eliminando en los denominadores de las fracciones elementales, en las que se desarrolla la fracción $f(z)$, los términos $z - \frac{3}{2}$:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z} = -\frac{1}{\frac{1}{2} + \left(z - \frac{3}{2}\right)} -$$

$$-\frac{2}{\frac{1}{2} - \left(z - \frac{3}{2}\right)} = -\frac{2}{1 + 2\left(z - \frac{3}{2}\right)} - \frac{4}{1 - 2\left(z - \frac{3}{2}\right)} =$$

$$= -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n \left(z - \frac{3}{2}\right)^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(z - \frac{3}{2}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}[(-1)^{n+1} - 2] \left(z - \frac{3}{2}\right)^n.$$

Este cálculo es válido para la condición de que $2\left|z - \frac{3}{2}\right| < 1$ (la magnitud absoluta del denominador de las progresiones geométricas analizadas es menor que la unidad), es decir, si $\left|z - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$. Razonando igual que en el caso de $z_0 = 0$, obtenemos que el radio de convergencia de la serie obtenida es igual a $\frac{1}{2}$

Por último, en el caso de $z_0 = 4$ tenemos

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z} = \frac{1}{-3-(z-4)} - \frac{2}{-2-(z-4)} =$$

$$= -\frac{1}{3\left(1 + \frac{z-4}{3}\right)} + \frac{1}{1 + \frac{z-4}{2}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-4)^n}{3^n} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-4)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^n}\right] (z-4)^n.$$

Todo esto es válido cuando $\left|\frac{z-4}{2}\right| < 1$, es decir, para $|z - 4| < 2$. De aquí, como anteriormente, se deduce que el radio de convergencia de la serie obtenida es igual a 2.

Prestemos atención a que en todos los tres casos, el radio de convergencia de las series de potencias obtenidas es igual a distancia desde el punto $z_0$, en cuyo entorno se determinaba el desarrollo señalado, hasta el "punto singular" de la función, más cercano a él. En el caso dado hasta el punto tal que $\lim\limits_{z \to z_1} f(z) = \infty$. En el caso de $z_0 = 0$ este punto es 1 y $|z_0 - z_1| = 1$; en el caso de $z_0 = \frac{3}{2}$ es $z_1 = 1$ ó $z_1 = 2$ y aquí $|z_1 - z_0| = \frac{1}{2}$; por último para $z_0 = 4$ tenemos $z_1 = 2$ y $|z_1 - z_0| = 2$. Este no es un fenómeno casual, se estudia detalladamente en la teoría de funciones de variable compleja.

Aplicando el método analizado se puede desarrollar en los correspondientes dominios las funciones racionales también en las series no sólo según las potencias positivas de $z$, sino también según las negativas.

Por ejemplo, para $|z| > 2$, tenemos

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)\frac{1}{z^n}$$

y en el anillo $1 < |z| < 2$:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}.$$

En el primer caso el desarrollo obtenido contiene sólo potencias negativas de $z$, en el segundo, tanto positivas como negativas. La teoría general de semejantes desarrollos también se estudia en la teoría de las funciones de variable compleja.

Se reduce también al desarrollo de fracciones racionales en series de potencias, el desarrollo en tales series, de las funciones de la forma $\ln\frac{P(x)}{Q(x)}$, $\operatorname{arctg}\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\operatorname{arcctg}\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son ciertos polinomios. Para obtener los desarrollos necesarios se puede diferenciar las funciones dadas, como resultado se obtienen fracciones racionales. Al desarrollar estas fracciones racionales en series de potencias y al integrarlas, tendremos los desarrollos buscados.

Ejercicios. 14. Descompóngase en serie de potencia la función $(\operatorname{arcsen} x)^2$.

15. Hállese la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$.

### 37.8. FÓRMULA DE STIRLING

Con ayuda del desarrollo de la función logarítmica en serie de potencias se puede hallar fácilmente la fórmula, que describe el comportamiento asintótico del factorial $n!$ cuando $n \to \infty$. Está fórmula se llama *fórmula de Stirling* *) y puede ser escrita en la forma

$$n! \sim \frac{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}, \quad n \to \infty; \tag{37.62}$$

*) J. Stirling (1692 — 1770), matemático inglés.

según la definición de igualdad asintótica para las sucesiones (véase el p. 23:3) esto significa que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}=1.$$

Del desarrollo

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$$

se deduce que

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^n}{n}\right)=2x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

Suponiendo aquí $x=\dfrac{1}{2n+1}$, $n=1, 2, \ldots$, obtendremos

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{1+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{1}{2n+1}}=$$
$$=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right]>\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

de donde

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>1$$

o, potenciando y teniendo en cuenta que la función $\ln x$ es creciente,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}>e. \tag{37.63}$$

Hagamos

$$x_n\overset{\text{def}}{=}\frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}; \tag{37.64}$$

por cuanto según (37.63)

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}>1,$$

entonces $x_n > x_{n+1}$, es decir, la sucesión $\{x_n\}$ decrece, y, además, está acotada inferiormente, $x_n \geqslant 0$. Por lo tanto, existe el límite

$$\lim_{n \to \infty} x_n \overset{\text{def}}{=} a.$$

Por esto

$$x_n = a(1 - \varepsilon_n) \tag{37.65}$$

donde $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$.

Mostremos que $a \neq 0$. Ya que

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots < \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{\dfrac{1}{(2n+1)^2}}{1 - \dfrac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{12n(n+1)},$$

entonces

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$$

y, por consiguiente,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Por esto

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} < \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}},$$

es decir

$$x_n e^{-\frac{1}{12n}} < x_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

De esta forma, la sucesión $y_n = x_n e^{-\frac{1}{12n}}$, $n = 1, 2, \ldots$, crece y ya que, evidentemente, $y_n < x_n$, entonces está acotada superiormente y, por lo tanto, tiene límite

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} x_n \lim_{n \to \infty} e^{-\frac{1}{12n}} = a.$$

Además, para cualquier $n$ es válida la desigualdad $a > y_n > 0$, por esto $a > 0$.

Sustituyamos (37.65) en (37.64)

$$n! = a\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}(1 + \varepsilon_n). \tag{37.66}$$

Para obtener la fórmula (37.62) resta sólo mostrar que $a = \sqrt{2\pi}$. Por la forma de Wallis (véase (30.8) en el p. 30.2)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \tag{37.67}$$

y según (37.66)

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{(1+\varepsilon_n)^2}{1+\varepsilon_{2n}}.$$

Sustituyendo esta expresión en (37.67), obtendremos

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1}a^2\frac{n}{2}\,\frac{(1+\varepsilon_n)^4}{(1+\varepsilon_{2n})^2} = \frac{a^2}{4},$$

de donde $a = \sqrt{2\pi}$. □

## 37.9* FÓRMULA Y SERIE DE TAYLOR PARA LAS FUNCIONES VECTORIALES

Analicemos la función vectorial $f\colon [a, b] \to R^n$, donde $R^n$ es un espacio vectorial $n$-dimensional. Como ya se ha señalado, para las funciones vectoriales se generalizan los conceptos de límite, continuidad, derivada, diferencial e integral (véanse en el § 15 el p. 18.4 y el p. 30.4) sobre los cuales se extienden muchas propiedades de estos conceptos válidas para las funciones numéricas. No obstante, no para todas las propiedades esto tiene lugar. Así, en el p. 15.2 fue mostrado, que la afirmación, análoga a la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange, ya no es válida para las funciones vectoriales. Por esto, no es válida, naturalmente, tampoco su generalización en forma de fórmula de Taylor con término residual en forma de Lagrange. Mostremos que para las funciones vectoriales es válida la fórmula de Taylor con término residual en forma integral.

**Teorema 10.** *Supongamos que la función $f\colon (t_0 + h, t_0 - h) \to R^n$ es continua junto con todas sus derivadas, hasta la de orden $n + 1$ inclusive, sobre el intervalo $(t_0 - h, t_0 + h)$, $h > 0$. Entonces para cualquier $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$* es válida la fórmula

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^n \cdot f^{(n+1)}\tau\, d\tau. \tag{37.68}$$

**Corolario.**

$$\left|f(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}t_0(t-t_0)\right|^k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n!}(t - t_0)^{n+1} \sup_{(t_0 - h,\, t_0 + h)} |f^{(n+1)}(\tau)|,$$

$t \in (t_0 - h, t_0 + h)$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Ante todo recordemos que si

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)), \tag{37.69}$$

entonces

$$f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t)), \quad t \in (t_0 - h, t_0 + h), \tag{37.70}$$

$$\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau = \left( \int_{t_0}^{t} f_1(\tau)d\tau, \dots, \int_{t_0}^{t} f_n(\tau)d\tau \right). \tag{37.71}$$

De las suposiciones del teorema se deduce que cada función de coordenadas $f_i$ es continua sobre el intervalo $(t_0 - h, t_0 + h)$ junto con todas sus derivadas, hasta la de orden $n + 1$ inclusive, y por esto para ella es válida la fórmula de Taylor con término residual en forma integral

$$f_i(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f_i^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k +$$

$$= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} (t - \tau)^n f_i^{(n+1)}(\tau)d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

De aquí, por (37.70) y (37.71) se deduce inmediatamente la validez de la fórmula (37.68). □

El corolario se deriva de la desigualdad

$$\left| \int_{t_0}^{t} (t - \tau)^n f^{n+1}(\tau)d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant |t - t_0|^n \int_{t_0}^{t} \left| f^{(n+1)}(\tau)d\tau \right| \leqslant |t - t_0|^n \sup_{(t_0 - h, t_0 + h)} |f^{(n+1)}(\tau)| \left| \int_{t_0}^{t} d\tau \right| =$$

$$= |t - t_0|^{n+1} \sup_{(t_0 - h, t_0 + h)} |f^{(n+1)}(\tau)|. \ \square$$

Para las funciones vectoriales es válida también la fórmula de Taylor con término residual en la forma de Peano: si la función $f\colon (t_0 - h, t_0 + h) \to R^n$ tiene en el punto $t_0$ derivada de orden $n$, entonces

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + o((t - t_0)^n).$$

Esto también se deduce inmediatamente de que para cada función de coordenadas $f_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, en las suposiciones del teorema, tiene lugar la fórmula de Taylor con término residual en la forma de Peano, en el entorno del punto $t_0$ (véase el p. 13.1).

Si la función vectorial $f\colon (t_0 - h, t_0 + h) \to R^n$ tiene en el punto $t_0$ derivadas de todos los órdenes y para cualquier $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$ se cumple la condición

$$\lim_{n \to \infty} \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k \right] = 0,$$

entonces, sobre el intervalo $(t_0 - h, t_0 + h)$ la función $f$ se desarrolla en una serie de potencias con coeficientes vectoriales

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n$$

llamada su *serie de Taylor.*

## 37.10*. SERIES DE POTENCIAS ASINTÓTICAS

Es sabido (véase el p. 13.1), que si la función $f$ está definida en un entorno del punto $x_0$ y es $n$ veces diferenciable en él, entonces existe un polinomio $P_n(x)$ de grado, no mayor que $n$, precisamente el polinomio de Taylor tal que

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{37.72}$$

Además

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{37.73}$$

De (37.72) y (37.73) se deduce que la diferencia $f(x) - P_{n-1}(x)$ es representable en la forma

$$f(x) - P_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

y, de esta forma, tiene lugar la igualdad asintótica

$$f(x) - P_{n-1}(x) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \to x_0.$$

De esta forma, los términos del polinomio de Taylor $P_n(x)$ (serie de Taylor, si la función $f$ es infinitamente diferenciable en el punto $x_0$) se pueden definir sucesivamente como los sumandos de la forma $a_n(x - x_0)^n$ iguales asintóticamente a la diferencia $f(x) - P_{n-1}(x)$ cuando $x \to x_0$.

De forma análoga se puede actuar durante el estudio de las funciones en el infinito. Sea ahora, para mayor definición, la función $f$ definida para $x \geqslant a$, y existe el límite finito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a_0 \tag{37.74}$$

y, por lo tanto $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - a_0] = 0$.

A veces surge la pregunta: ¿Cómo tiende precisamente la diferencia $f(x) - a_0$ a cero? ¿Cuál es el orden de decrecimiento de esta diferencia? Puede suceder que la diferencia señalada tiene al menos orden $\frac{1}{x}$, más aún que existe un número $a_1$ tal que

$$f(x) - a_0 \sim \frac{a_1}{x}, \quad x \to +\infty, \tag{37.75}$$

es decir, (véase el teorema 1 en el p. 8.3)

$$f(x) - a_0 = \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.76}$$

de donde

$$x[f(x) - a_0] = a_1 + xo(1/x), \quad x \to +\infty,$$

y ya que por la definición del símbolo $o$, $\lim\limits_{x \to +\infty} xo(1/x) = 0$, entonces

$$a_1 = \lim_{x \to +\infty} x[f(x) - a_0]. \tag{37.77}$$

Viceversa, de (37.77) se deduce que

$$x[f(x) - a_0] = a_1 + \varepsilon(x), \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0,$$

y, por lo tanto

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty,$$

es decir, se cumple la igualdad asintótica (37.76). Si el $a_1$ señalado está hallado, entonces con frecuencia es necesario hallar, como se dice, "el término siguiente del desarrollo asintótico" de la función $f$, es decir, hallar el comportamiento asintótico de la diferencia $f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right)$ cuando $x \to +\infty$. Esta diferencia, por (37.76), no es otra cosa que $o(1/x)$, $x \to +\infty$. Puede suceder que el número $a_2$ sea ral, que la diferencia señalada tiene al menos orden $\frac{1}{x^2}$, más aún, que existe

$$f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right) \sim \frac{a_2}{x^2},$$

o lo que es lo mismo

$$f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right) = \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to +\infty.$$

Esta condición es equivalente a la existencia del límite

$$\lim_{x \to +\infty} x^2\left[f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right)\right] = a_2.$$

En general, si

$$S_{n-1}(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{37.78}$$

es un polinomio de grado no mayor que $n - 1$ respecto a la variable $1/x$ tal que

$$f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{x^{n-2}}\right) \sim \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}, \quad x \to +\infty, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

entonces puede ocurrir que existe la constante $a_n$, para la cual tiene lugar la igualdad asintótica

$$f(x) - S_{n-1}(x) \sim \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty. \tag{37.79}$$

Esta condición es equivalente a lo siguiente:

$$f(x) - S_{n-1}(x) = \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to \infty \tag{37.80}$$

lo que, suponiendo

$$S_n(x) = S_{n-1}(x) + \frac{a_n}{x^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k}, \tag{37.81}$$

se puede escribir en la forma

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.82}$$

o, lo que es lo mismo, en la forma

$$\lim_{x \to +\infty} x^n [f(x) - S_n(x)] = 0. \tag{37.83}$$

Aquí, como antes, para $n = 1$, es fácil mostrar que la condición (37.80) es equivalente a la existencia del límite finito

$$\lim_{x \to +\infty} x^n [f(x) - S_{n-1}(x)] = a_n. \tag{37.84}$$

Si los límites señalados $a_n$, existen para todos los $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces se puede formar la serie

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots . \tag{37.85}$$

Las series de este tipo también se pueden llamar *series de potencias*, más exactamente, series de potencias según las potencias enteras negativas de la variable $x$.

**Definición 5.** *Sea la función $f$ definida para $x \geqslant a$ y* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a_0$. *Si existe la serie de la forma* (37.85), *las sumas parciales* (37.78) *de la cual satisfacen o bien la condición* (37.79), *o bien, lo que es equivalente, una de las condiciones* (37.82) *ó* (37.83), *entonces esta serie se llama serie asintótica* (*o desarrollo asintótico*) *en el sentido de Poincaré*) de la función $f$ cuando $x \to +\infty$.*

En este caso se escribe

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}. \tag{37.86}$$

Subrayemos que aquí el signo $\sim$ significa no la igualdad asintótica en el sentido, como por ejemplo, se entiende en la fórmula (37.79), es decir, en el sentido de la definición 3 del p. 8.2, sino la correspondencia: la serie (37.85) corresponde a la función $f$.

Como se ha señalado, la condición (37.80) es equivalente a la condición (37.84), por esto, si la función $f$ tiene, cuando $x \to +\infty$, la serie asintótica (37.85), entonces sus coeficientes $a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, pueden ser sucesivamente hallados por la fór-

*) A. Poincaré (1854 — 1912), matemático francés.

mula (37.84). Para $n = 0$ se debe utilizar la fórmula (37.74). De aquí se deduce que si la función tiene, para $x \to \infty$, serie asintótica, entonces ésta es única y sus coeficientes se expresan por las fórmulas (37.74) y (37.84).

Recordemos que durante el desarrollo de una función en serie de potencias, también fue demostrada la unicidad de la serie de potencias en la que se desarrolla la función, más precisamente, fue demostrada su coincidencia con la serie de Taylor. Sin embargo, allí fue señalado que una misma serie de potencias puede ser serie de Taylor para diferentes funciones. Una situación semejante tiene lugar también para las series asintóticas: una misma serie de la forma (37.85) puede ser serie asintótica de diferentes funciones cuando $x \to +\infty$. Por ejemplo, la serie nula, es decir, la serie todos los coeficientes de la cual son iguales a cero,

$$a_n = 0, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

es serie asintótica para $x \to +\infty$ tanto de la función, igual a cero en todos los puntos del eje numérico: $f_1(x) = 0$, $-\infty < x < +\infty$, como de la función $f_2(x) = e^{-x}$, de lo que es fácil convencerse, calculando en estos casos sucesivamente los límites (37.84).

A diferencia del desarrollo de las funciones en series de potencias cuando la suma de la serie es la función dada, y, por lo tanto, la serie de potencias analizada converge, en la construcción de la serie asintótica de una función puede suceder que la serie obtenida no sólo no converge a la función dada, sino que en general diverge en todos los puntos. A pesar de esto, la serie asintótica (37.86) es un instrumento útil para su estudio, en particular para el cálculo de sus valores. Esto, evidentemente, está relacionado con que las sumas parciales de la serie asintótica (37.86) de la función, por la condición (37.82), dan una aproximación suficientemente buena de la propia función, además, mucho mejor mientras mayor sea $x$.

Aclaremos lo dicho en el ejemplo de la función

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\, dt, \quad x > 0. \tag{37.87}$$

Integrando $n$ veces por parte, obtenemos

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + \\ + (-1)^n n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\, dt. \tag{37.88}$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \tag{37.89}$$

es el desarrollo asintótico de la función (37.87). En efecto, si $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$, $n = 1, 2, \ldots$, es decir, $S_n(x)$ son las sumas parciales de la serie (37.89), entonces integrando por partes, según (37.88), tendremos:

$$|f(x) - S_n(x)| = n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{n!}{x^{n+1}} - (n+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\,dt \leqslant \frac{n!}{x^{n+1}} = o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

es decir, se cumple la condición (37.82).

Al mismo tiempo, es fácil convencerse, según el criterio de D'Alembert, de que la serie (37.89) converge para todos los $x \in (-\infty, +\infty)$. Efectivamente, suponiendo

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

obtenemos

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{|x|} = +\infty.$$

Así, la serie asintótica (37.89) de la función (37.87) diverge en todos los puntos. Sin embargo, a pesar de esto los valores de la función (37.87), por la condición (37.82), pueden ser calculados, con un gran grado de exactitud, mediante las sumas parciales de esta serie.

Mostremos que si la serie (37.85) converge a cierta función $f$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \geqslant a > 0, \tag{37.90}$$

entonces es también la serie asintótica de esta función cuando $x \to +\infty$.

En efecto, sea

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k},$$

y, por consiguiente,

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Mostremos que

$$R_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.91}$$

y por esto, más aún, que

$$R_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty,$$

es decir, que

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty,$$

dicho de otra forma, que se cumple la condición (37.82). Para esto analicemos la función $F(t) \overset{\text{def}}{=} f(1/t)$, $0 < t \leqslant 1/a$. Por (37.90) obtenemos la igualdad

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

en la cual la serie, que se encuentra en el segundo miembro, converge cuando $0 < t < 1/a$, de donde, por el teorema de Abel, se deduce que converge para todos los $t$ tales que $|t| < 1/a$. Si

$$r_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k t^k, \quad |t| < 1/a,$$

entonces (véase el lema 1 en el p. 37.3), $r_n(t) = O(t^{n+1})$, $t \to 0$. Efectuando aquí el cambio de variable $t = \dfrac{1}{x}$ obtenemos (37.91).

Para concluir señalemos que la condición (37.82) de desarrollo de una función en serie asintótica de potencias, se puede sustituir por otra condición que externamente es más fuerte, pero que en esencia es equivalente. Enunciémosla en forma de lema.

**Lema 3.** *Para que la serie* (37.85) *sea asintótica, cuando* $x \to +\infty$, *para la función* $f$ *es necesario y suficiente que*

$$f(x) - S_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \to +\infty, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{37.92}$$

La suficiencia de esta condición es evidente, ya que $O\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right) = o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ (recordemos que igualdades semejantes se leen sólo de izquierda a derecha), y, por consiguiente, cuando se cumple la condición (37.92) se cumplirá (37.82).

Viceversa, si se cumple la condición (37.82):

$$f(x) - S_{n+1}(x) = o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \to +\infty,$$

entonces, ya que $S_{n+1}(x) = S_n(x) + \dfrac{a_{n+1}}{x^{n+1}}$ obtendremos

$$f(x) - S_n(x) = \frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} + o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right). \ \square$$

### 37.11*. PROPIEDADES DE LAS SERIES ASINTÓTICAS DE POTENCIAS

En este punto serán enunciadas y demostradas algunas de las propiedades fundamentales de los desarrollos de funciones en series asintóticas de potencias. En el futuro, en el p. 54.6., serán analizadas de forma más general las series asintóticas, no obligatoriamente las de potencias. Por cuanto en el presente punto se estudiarán sólo los desarrollos asintóticos de las funciones, cuando $x \to +\infty$, en series de potencias de la forma (37.85), entonces las llamaremos sencillamente *desarrollos asintóticos*.

I. *Si*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{37.93}$$

*entonces para cualesquiera números* $\lambda$ *y* $\mu$

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda a_n + \mu b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

*es decir, el desarrollo asintótico de la combinación lineal de funciones, que tienen desarrollo asintótico, es igual a la misma combinación lineal de los desarrollos asintóticos de estas funciones.*

En efecto, si

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.94}$$

entonces para cualesquiera números $\lambda$ y $\mu$

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda a_k + \mu b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty. \ \square$$

II. *Si tienen lugar los desarrollos asintóticos* (37.93), *entonces*

$$f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

*donde* $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, *es decir, el desarrollo asintótico del producto de funciones que tienen desarrollos asintóticos, es igual al producto de estos desarrollos distribuidos según las potencias crecientes de* $1/x$.

En efecto, si tiene lugar (37.94), entonces

$$f(x)g(x) = \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right)\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n} + \right.$$

$$\left. + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right) = a_0 b_0 + \frac{a_0 b_1 + a_1 b_0}{x} + \ldots + \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{x^n} +$$

$$o\left(\frac{1}{x^n}\right), x \to +\infty. \ \square$$

III. *Si*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{37.95}$$

*y $a_0 \neq 0$, entonces la función $1/f(x)$ también tiene el desarrollo asintótico*

$$f(x) \sim \frac{1}{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

*y el coeficiente $d_n$ de este desarrollo se expresa por los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ del desarrollo* (37.95), $n = 0, 1, 2, \ldots$.

En efecto, de (37.95) se deduce (véase (37.74)), que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a_0$. Por esto existe el límite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0}.$$

Más adelante, se puede mostrar sucesivamente la existencia de los límites (37.84) para la función $1/f(x)$, calculándolos directamente. Por ejemplo

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0}\right) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{a_0}\right) =$$

$$= -\lim_{x \to +\infty} \frac{a_1 + xo(1/x)}{a_0\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = -\frac{a_1}{a_0^2},$$

es decir, $d_1 = -a_1/a_0^2$.

De forma análoga se calcula $d_2, d_3, \ldots$ □

IV. *Si la función $f$ es continua para $x \geqslant a > 0$ y tiene el desarrollo asintótico, que comienza con el término de orden $\frac{1}{x^2}$*

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{37.96}$$

*entonces*

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}}, \quad x \to +\infty, \tag{37.97}$$

*es decir, en el caso señalado las series asintóticas se pueden integrar término a término.*

Demostremos esto. Sea

$$S_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{x^k}, \quad R_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - S_n(x) \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Por cuanto las funciones $f$ y $S_n$ són continuas para $x \geqslant a$, entonces también la función $R_n$ es continua para $x \geqslant a$. Por (37.96)

$$R_n(x) = o(1/x^n), \quad x \to +\infty.$$

Por esto para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \geqslant a$ tal que para todos los $x \geqslant x_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{x^n}.$$

De aquí se deduce, en primer lugar, que la integral $\int\limits_{x_\varepsilon}^{+\infty} R_n(t)dt$ y por esto, también la integral $\int\limits_{x}^{+\infty} R_n(t)dt$, $x \geqslant x_\varepsilon$, existen y en segundo lugar, que para $x \geqslant x_\varepsilon$ tiene lugar la desigualdad

$$\left|x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} R_n(t)dt\right| \leqslant x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} |R_n(t)|\,dt \leqslant \varepsilon x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{\varepsilon}{n-1}$$

y, por lo tanto, en virtud de que $\varepsilon > 0$ es arbitrario,

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} R_n(t)dt = 0. \tag{37.98}$$

Ahora, integrando la igualdad $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$ obtendremos

$$\int\limits_x^{+\infty} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{(k-1)x^{k-1}} + \int\limits_x^{+\infty} R_n(t)dt. \tag{37.99}$$

Por cuanto se cumple la condición (37.98), la igualdad (37.99) implica la validez del desarrollo asintótico (37.97) (véase 37.83)). ☐

V. *Si la función $f$ se desarrolla en la serie asintótica*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{37.100}$$

*y si ella tiene para $x \geqslant a$ derivada continua, la cual también, para $x \to +\infty$, se desarrolla en serie asintótica, entonces esta serie se obtiene diferenciando formalmente término a término la serie* (37.100)

$$f'(x) \sim -\sum_{n=1} \frac{na_n}{x^{n+1}}, \quad x \to +\infty. \tag{37.101}$$

En efecto, sea

$$f'(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty. \tag{37.102}$$

Por la fórmula de Newton — Leibniz para $x \geqslant a$ e $y \geqslant a$ cualesquiera

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt = \int_x^y \left[b_0 + \frac{b_1}{x}\left(f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t}\right)\right] dt =$$

$$= b_0(y - x) + b_1 \ln\frac{y}{x} + \int_x^y \left[f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t}\right] dt. \quad (37.103)$$

Por (37.102) $f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ $t \to +\infty$. Por lo tanto, la integral

$$\int_x^{+\infty} \left[f' t - b_0 - \frac{b_1}{t}\right] dt$$

converge. Por (37.100) existe el límite finito

$$\lim_{y \to +\infty} f(y) = a_0.$$

Por esto, pasando al límite cuando $y \to +\infty$ en (37.103), nos convencemos de que existe el límite finito

$$\lim_{y \to +\infty} [b_0(y - x) + b_1 \ln y/x].$$

Esto es posible sólo en el caso cuando $b_0 = b_1 = 0$. De esta forma, la igualdad (37.103) en el límite se convierte en la igualdad

$$a_0 - f(x) = \int_x^{+\infty} f'(t)dt;$$

además, por la condición $b_0 = b_1 = 0$ de (37.102) tenemos:

$$f'(x) \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty;$$

de aquí, integrando término a término en los límites de $x$ a $+\infty$, por la propiedad IV, obtendremos

$$a_0 - f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{nx^n}, \quad x \to +\infty.$$

Pero de (37.100) se deduce que

$$a_0 - f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}.$$

Recordando que el desarrollo de una función, cuando $x \to +\infty$, en una serie asintótica de potencias es única, de la comparación de las series obtenidas para la función $a_0 - f(x)$ hallaremos que

$$b_{n+1} = -na_n, \quad n = 1, 2, \ldots \; \square$$

OBSERVACIÓN. Si una función $f$, continuamente diferenciable para $x \geqslant a$, se desarrolla, cuando $x \to +\infty$, en una serie asintótica, entonces su derivada puede no tener desarrollo asintótico cuando $x \to +\infty$. Por eso, la existencia del desarrollo asintótico de la derivada en la proposición V es esencial. En calidad de ejemplo analicemos la función $f(x) = e^{-x}\operatorname{sen} e^x$, $-\infty < x < +\infty$. No es difícil, con ayuda de la fórmulas (37.84), convencerse de que la función $f$, cuando $x \to +\infty$, se desarrolla en la serie asintótica nula, es decir, la serie (37.85), para la cual $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Su derivada $f'(x) = -e^{-x}\operatorname{sen} e^x + \cos e^x$ a ciencia cierta no tiene desarrollo asintótico cuando $x \to +\infty$, ya que incluso no tiene límite cuando $x \to +\infty$.

Ejercicio 16. Demuéstrese que

a) $$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \ldots, \quad x \to +\infty;$$

b) $$\int_x^{+\infty} e^{x^2-t^2}\,dt \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7} + \ldots, \quad x \to +\infty.$$

## § 38*. SERIES MÚLTIPLES

### 38.1. SERIES NUMÉRICAS MÚLTIPLES

En el presente párrafo se analizarán las así llamados series múltiples de la forma

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}, \tag{38.1}$$

donde $u_{n_1 \ldots n_k}$ son números dados (en general, complejos), numerados por $k$ índices $n_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, cada uno de los cuales recorre independientemente la serie natural de los números: $n_i = 1, 2, \ldots$. La serie (38.1) se llama serie de multiplicidad $k$, y los números $u_{n_1 \ldots n_k}$ son sus términos.

Definamos con precisión este concepto. Comencemos con el concepto de sucesión múltiple.

**Definición 1.** *Sea $X$ cierto conjunto; se llama sucesión de multiplicidad $k$ de los elementos del conjunto $X$, la aplicación* $f\colon \underbrace{N \times N \times \ldots \times N}_{k \text{ veces}} \to X$ ($N$, como siempre, denota el conjunto de los números naturales).

El elemento $x = f(n_1, \ldots, n_k)$, $n_1 \in N_1, \ldots, n_k \in N$, se denota por $x_{n_1 \ldots n_k}$ y la propia sucesión por $\{x_{n_1 \ldots n_k}\}$.

La sucesión de multiplicidad uno se llama sencillamente sucesión.

Así, los elementos de una sucesión de multiplicidad $k$ están "numerados" por $k$ índices naturales. Analizaremos sucesiones numéricas múltiples, es decir, sucesiones múltiples cuyos elementos son números complejos, en particular, reales. Para hacer sencilla la notación nos limitaremos al caso $k = 2$. La generalización al caso de un natural $k \in N$ arbitrario se hace sin gran trabajo.

**Definición 2.** *El número $a \in C$ se llama límite de la sucesión doble $\{x_{mn}\}$ y se escribe $a = \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn}$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in N$ tal que para todos los $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$, $m \in N$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $|x_{mn} - a| < \varepsilon$.*

Si una sucesión doble tiene límite, entonces se llama *convergente.*

Prestemos atención al hecho de que la definición de límite dada para una sucesión doble se diferencia de la definición de su límite, contenida en el p. 19.2, donde esta definición era un caso particular del límite de la función $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$. Aclaremos detalladamente esta diferencia. En la definición anterior $a = \lim\limits_{(m,n)\to\infty} u_{mn}$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in N$ tal que para todos los $m \in N$ y $n \in N$ tales que $\sqrt{m^2 + n^2} > n_\varepsilon$, tiene lugar la desigualdad $|u_{mn} - a| < \varepsilon$. La condición $\sqrt{m^2 + n^2} > n_\varepsilon$ se puede cumplir a cuenta de la elección de un índice suficientemente grande entre los índices, el otro puede ser incluso igual a la unidad. En la definición 2 enunciada aquí, ambos índices $m$ y $n$ deben ser lo suficientemente grandes para asegurar que se cumpla la desigualdad $|u_{mn} - a| < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. En este párrafo utilizaremos sólo la definición 2.

Señalemos que no todas las propiedades de los límites las sucesiones ordinarias se extienden a las sucesiones dobles. Así, por ejemplo, la sucesión $u_{1n} = n$, $u_{mn} = 0$, $m \neq 1$, $n = 1, 2, \ldots, m = 2, 3, \ldots$, converge: $\lim\limits_{m,n\to\infty} u_{mn} = 0$; no obstante esta sucesión, evidentemente, no está acotada.

**Definición 3.** *Una sucesión doble se llama sucesión que tiende a $+\infty$, y se escribe $\lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = +\infty$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in N$ tal que para todos los $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$, $m \in N$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $x_{mn} > \varepsilon$.*

De forma análoga se define los límites infinitos $\lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = -\infty$ y $\lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = \infty$.

Como es usual, por límite (en el caso dado de una sucesión doble) se entiende límite finito si no se dice otra cosa.

Definamos ahora una serie doble.

**Definición 4.** *Sea dada la sucesión doble $\{u_{mn}\}$. Formemos la sucesión numérica doble*

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} u_{kl} \tag{38.2}$$

*El par de sucesiones $\{u_{mn}\}$, $\{S_{mn}\}$ se llama serie doble y se denota por*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.3}$$

Los elementos de la sucesión doble $\{u_{mn}\}$ se llaman *términos de la serie* (38.3), y los elementos de la sucesión doble $\{S_{mn}\}$, *sumas parciales* de esta serie.

**Definición 5.** *La serie doble* (38.3) *se llama convergente si la sucesión de sus sumas parciales converge. Su límite se llama suma de la serie*; *además, si*

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = S, \tag{38.4}$$

*entonces se escribe*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} = S.$$

*Si el límite finito* (38.4) *no existe, entonces la serie* (38.3) *se llama divergente. Si existe uno de los límites infinitos*

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = +\infty, \quad \lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = -\infty, \tag{38.5}$$

*entonces respectivamente se escribe*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} = +\infty, \quad \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} = -\infty.$$

OBSERVACIÓN. El contenido de la definición de serie como par de sucesiones se ve claramente en el ejemplo de las series múltiples. Por ejemplo, si está dada la sucesión $\{u_{mn}\}$, entonces la sucesión de "sumas parciales" que le corresponde puede ser dada no sólo de la forma señalada anteriormente (38.2), sino también de otra forma. Junto con las sumas (38.2), definidas anteriormente y llamadas *rectangulares* (en ellas se suman los elementos $u_{kl}$, a los cuales corresponden los puntos $(k, l)$ del plano $xy$, contenidos en el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant m$, $0 \leqslant y \leqslant n$), se analizan las sumas *triangulares* $T_r = \sum\limits_{k+l<r} u_{kl}$, $r = 1, 2, \ldots$, (el punto $(k, l)$ se encuentra el el triángulo $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant r$), *las esféricas* $S_r = \sum\limits_{k^2+l^2\leqslant r^2} u_{k,l}$, $r = 1, 2, \ldots$, (el punto $(k, l)$ se encuentra en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant r^2$) y otras. De esta forma para una misma sucesión $\{u_{mn}\}$ se tienen distintas sucesiones de sumas parciales, además en el caso de que converja una de ellas no obligatoriamente converja la otra. Por esto es natural analizar cada par, formado por la sucesión $\{u_{mn}\}$ de términos de la serie y algunas de sus "sumas parciales", como una serie independiente.

Señalemos que la sucesiones de sumas parciales de las series múltiples (por ejemplo, las sumas parciales $T_r$ ó $S_r$) a diferencia de las sucesiones de las sucesiones de las sumas parciales de las series de multiplicidad uno, no siempre definen unívocamente la sucesión de los términos generales de la serie.

Al mismo tiempo, en el ejemplo de las series múltiples se ve la conveniencia de ampliar el concepto de serie, precisamente, su definición, como par formado por una sucesión (múltiple), llamada sucesión de sus términos, y cierto conjunto $\{S_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, de sumas $S_\alpha$ de sus términos. Aquí $\mathfrak{A}$ es cierto conjunto, cuyos elementos $\alpha$ son juegos de índices múltiples $(n_1, \ldots, n_k)$ (en particular los índices ordinarios) y

$$S_\alpha = \sum_{(n_1,\ldots,n_k)\in\alpha} u_{n_1\ldots n_k}.$$

Por ejemplo, para las series dobles se pueden analizar las sumas triangulares

$$S_r = \sum_{k+l\leqslant r} u_{kl}$$

para cualquier real no negativo $r$ y llamar serie doble correspondiente al par $\{u_{kl}\}$, $\{S_r\}$, $r \in R$, $r \geqslant 0$.

En el futuro vamos a analizar sólo las sumas parciales rectangulares $S_{mn}$.

Ejemplo. Sean $|p| < 1$, $|q| < 1$, $p \in C$, $q \in C$, entonces la serie $\sum\limits_{mn=0}^{\infty} p^m q^n$ converge. Efectivamente, en este caso

$$S_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} p^{\mu} q^{\nu} = \sum_{\mu=0}^{m} p^{\mu} \sum_{\nu=0}^{n} p^{\nu} = \frac{1 - p^{m+1}}{1 - p} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Por esto existe el límite $\lim\limits_{m,n \to \infty} S_{mn} = \dfrac{1}{(1-p)(1-q)}$. De esta forma

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} p^m q^n = \frac{1}{(1-p)(1-q)}, \quad |p| < 1, \quad |q| < 1.$$

A las series múltiples se extiende una serie de propiedades de las series ordinarias (de multiplicidad uno), por ejemplo:

1°. *Si la serie* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$ *converge y* $S$ *es su suma, entonces* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \lambda u_{mn} = \lambda S$ *para cualquier número* $\lambda$.

2°. *Si las series* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u'_{mn} = S'$ *y* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u''_{mn} = S''$ *convergen, entonces*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} (u'_{mn} + u''_{mn}) = S' + S''.$$

Estas afirmaciones se demuestran fácilmente, de forma análoga al caso de las series de multiplicidad uno (esto se propone que lo haga el lector).

Demostremos ahora algunos teoremas sobre las series múltiples.

**Teorema 1.** *Si la serie* (38.3) *converge, entonces*

$$\lim_{m,n \to \infty} u_{mn} = 0.$$

Esto se deduce inmediatamente de la igualdad

$$u_{mn} = S_{mn} - S_{m-1n} - S_{mn-1} + S_{m-1\ n-1}$$

y de la condición (38.4). □

**Teorema 2.** *Si todos los términos de la serie* (38.3) *son no negativos*

$$u_{mn} \geqslant 0, \quad m, n = 1, 2, \dots, \tag{38.6}$$

*entonces siempre existe el límite, finito o infinito, de sus sumas parciales* $S_{mn}$, *además*

$$\lim_{m,n \to \infty} S_{mn} = \sup_{m,n=1,2,\dots} S_{mn}. \tag{38.7}$$

DEMOSTRACIÓN. Si se cumple la condición (38.6) y $m' \geqslant m$, $n' \geqslant n$, entonces $S_{m'n'} \geqslant S_{mn}$.

Más adelante, si $S = \sup\limits_{m,n=1,2,\dots} S_{mn}$ y $S' < S$, entonces por la definición de cota superior existen los números $m_0$ y $n_0$ tales que $S_{m_0n_0} > S'$.

Hagamos $N = \max\{m_0, n_0\}$, entonces para $m \geqslant N$ y $n \geqslant N$

$$S_{mn} \geqslant S_{NN} \geqslant S_{m_0n_0} > S'$$

y ya que $S_{mn} \leqslant S$, entonces $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn} = S$, es decir, se cumple la condición (38.7). □

**Corolario.** *En las suposiciones del teorema, la serie* (38.3) *converge si y sólo si sus sumas parciales están acotadas.*

La demostración del corolario es evidente.

Para las series dobles con términos no negativos es válido el criterio de comparación.

**Teorema 3.** *Si la serie* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ *converge y existe* $c > 0$ *tal que para todos los* $m, n = 1, 2, \dots$, *se cumple la desigualdad*

$$0 \leqslant u_{mn} \leqslant ca_{mn},$$

*entonces la serie* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$ *también converge.*

Esto se deduce inmediatamente del corolario del teorema 2, ya que para cualesquiera naturales $m$ y $n$ se cumplen las desigualdades

$$\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} u_{\mu\nu} \leqslant \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}.$$

De la serie doble (38.3) se pueden formar formalmente dos series, las así llamadas series reiteradas. Para esto inicialmente se debe efectuar la sumación respecto a un índice, fijando el otro, y después realizar la sumación respecto al índice restante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \tag{38.8}$$

De forma análoga al teorema demostrado anteriormente sobre los límites reiterados (véase el teorema 1 en el p. 19.2), se demuestra el siguiente teorema.

**Teorema 4.** Si converge la serie doble (38.3) y para todos los $n = 1, 2, \dots$, converge la serie $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{mn}$, entonces la serie reiterada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{mn}$ también converge y su suma es igual a la suma de la serie dada (38.3).

**Definición 6.** *La serie* (38.3) *se llama absolutamente convergente si converge la serie formada por los valores absolutos de sus términos, es decir, la serie*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |u_{mn}|. \tag{38.9}$$

Señalemos que si la serie (38.3) converge absolutamente, entonces su término general tiende a cero cuando crece ilimitadamente al menos uno de los índices:

$$\lim_{\text{máx}\{m,\, n\} \to +\infty} u_{mn} = 0.$$

En efecto, sea $\tilde{S} = \sum\limits_{m,\, n = 1}^{\infty} |u_{mn}|$, entonces para un $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe el natural $N$ tal que para $m > N$ y $n > N$ se cumple la desigualdad

$$0 < \tilde{S} - \sum_{k,\, l = 1}^{m,\, n} |u_{kl}| < \varepsilon.$$

Por esto para máx $\{m, n\} > N + 1$ tendremos

$$|u_{mn}| \leqslant \sum_{\{\mu > m\} \cup \{\nu \geqslant n\}} |u_{\mu\nu}| \leqslant \tilde{S} - \sum_{k,\, l = 1}^{N + 1} |u_{kl}| < \varepsilon.$$

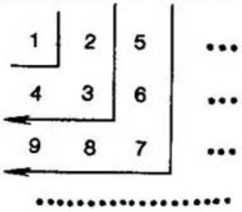
De la tendencia a cero ya señalada del término general de una serie absolutamente convergente, evidentemente se deduce que los términos de esta serie están acotados. Señalemos que para una serie convergente, que no sea absolutamente convergente, esto puede no tener lugar. Un ejemplo de tales series es, por ejemplo, la serie analizada a continuación (38.17) en el punto (1, 1).

**Teorema 5.** *Si la serie* (38.3) *converge absolutamente, entonces converge también cualquier serie* (*de multiplicidad uno, doble o reiterada*)*, obtenida cambiando de lugar los términos de la serie dada* (*en particular converge también la propia serie dada*)*. En este caso la suma de cualquiera de estas series coincide con la suma de la serie inicial* (38.3).

DEMOSTRACIÓN. Coloquemos los términos de la serie (38.3) en una matriz rectangular infinita, poniendo en su fila $m$ los términos de la serie cuyos primeros números fijos son $m$, colocados según el orden creciente del segundo índice $n$:

$$\begin{array}{l}
u_{11} u_{12} u_{13} \ldots u_{1n} \ldots \\
u_{21} u_{22} u_{23} \ldots u_{2n} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{m1} u_{m2} u_{m3} \ldots u_{mn} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Numeremos ahora a los elementos de esta tabla según el esquema siguiente



El término de la serie (38.3), que tiene según esta numeración el número $k$, será designado por $v_k$. Analicemos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \tag{38.10}$$

y mostremos que ella converge absolutamente, es decir, que converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|. \tag{38.11}$$

Denotemos las sumas parciales de la serie (38.9) por $S^*_{mn}$, su suma por $S^*$ y las sumas parciales de la serie (38.11) por $S^*_k$. Ante todo observemos que para cualquier suma $S^*_k$ se encuentran los números $m$ y $n$ tales que todos los términos de la serie (38.11), que se incluyen en la suma $S^*_k$, aparecen también en la suma $S^*_{mn}$, entonces

$$S^*_k \leqslant S^*_{mn} \leqslant S^*.$$

De aquí se deduce (véase el p. 35.4) la convergencia de la serie (38.11).

De la convergencia absoluta de la serie (38.10) se deduce que para otra serie cualquiera de multiplicidad uno, formada por los términos de la serie (38.2), también converge y su suma es igual a la suma de la serie (38.10) (véase el p. 35.10). Sea

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = S.$$

Mostremos ahora que cualquier serie doble

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u'_{mn} \tag{38.12}$$

obtenida por cierta renumeración de los índices dobles de los términos de la serie dada (38.3), converge absolutamente y que su suma también es igual a $S$.

La convergencia absoluta de la serie (38.12) fácilmente se deduce de la convergencia absoluta de la serie (38.3), es decir, de la convergencia de la serie (38.9), y se demuestra de la misma forma como fue demostrada la convergencia absoluta de la serie (38.10). Demostremos ahora que la suma de la serie (38.12) es igual a $S$. Denotemos sus sumas parciales por $S'_{mn}$, y las sumas parciales de la serie (38.10) por $S_k$. Sea dado el número $\varepsilon > 0$. Por la convergencia de la serie (38.11) existe el número $k_\varepsilon$ tal que

$$\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{38.13}$$

entonces, como antes

$$|S - S_{k_\varepsilon}| = \left| \sum_{n=k_\varepsilon+1}^{\infty} v_k \right| < \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{38.14}$$

Seleccionemos el número $N_\varepsilon$ tal que la suma parcial $S'_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ de la serie (38.12) contenga en calidad de sumandos todos los términos de la serie (38.10), que forman parte de la suma $S_{k_\varepsilon}$. Sea $m \geqslant N_\varepsilon$ y $n \geqslant N_\varepsilon$. Hagamos

$$S''_{mn} = S'_{mn} - S_{k_\varepsilon};$$

entonces, utilizando (38.13) y (38.14), obtendremos

$$|S - S'_{mn}| = |S - S_{k_\varepsilon}| + |S''_{mn}| < \varepsilon.$$

Así, $S$ es la suma de cualquier serie (38.12), en particular, la suma de la propia serie (38.3).

Mostremos por último, que $S$ es también la suma de las series reiteradas (38.8). En efecto, para cualquier $n$ dado

$$\sum_{m=1}^{m_0} |u_{mn}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| = S.$$

Por lo tanto, todas las series

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

convergen, y además, absolutamente.

Hagamos

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.15}$$

Fijemos de nuevo un número arbitrario $\varepsilon > 0$. Seleccionemos el número $k_\varepsilon$ de tal forma que se cumpla la condición (38.13), y por lo tanto, también la condición (38.14). Más adelante, de forma semejante a como fue hecho anteriormente, seleccionemos el número $N_\varepsilon$, tal que la suma parcial $S_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ de la serie (38.3) contenga en calidad de sumandos todos los términos de la serie (38.10), que forman parte de la suma $S_{k_\varepsilon}$. Entonces para todos los $m \geqslant N_\varepsilon$ y $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u_{ji} - S_{k_\varepsilon} \right| \leqslant \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pasando en esta desigualdad al límite cuando $m \to \infty$, obtendremos (véase (38.15)):

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S_{k_\varepsilon} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aquí, por (38.14) se deduce que para $n \geqslant N_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S_{k_\varepsilon} \right| + |S_{k_\varepsilon} - S| < \varepsilon.$$

Esto implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S. \ \square$$

Ejercicio 1. Generalícese el criterio de Cauchy sobre la convergencia de las sumas de multiplicidad uno al caso de las series múltiples.

### 38.2. SERIES DE FUNCIONES MÚLTIPLES

**Definición 7.** *La serie de la forma*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1} u_{n_1, \ldots, n_k}(x) \tag{38.16}$$

*donde las funciones* $u_{n_1, \ldots, n_k}(x)$ *están definidas sobre cierto conjunto* $X$, *se llama serie de funciones de multiplicidad* $k$, *y las sumas de la forma*

$$S_{m_1, \ldots m_k}(x) = \sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{m_1, \ldots, m_k} u_{n_1, \ldots n_k}(x),$$

*sus sumas parciales.*

**Definición 8.** *La serie* (38.16) *se llama convergente sobre cierto conjunto* $X$, *si para cada* $x_0 \in X$ *dado, converge la serie numérica múltiple*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1} u_{n_1, \ldots, n_k}(x_0).$$

*Si la serie* (38.16) *converge sobre* $X$, *entonces la función*

$$S(x) = \sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}(x), \quad x \in X$$

*se llama su suma.*

A las series de funciones múltiples fácilmente se extienden los conceptos de convergencia uniforme de la serie, el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de una serie, el criterio de Weierstrass sobre convergencia uniforme, etc. No nos detendremos en esto.

Ejercicio 2. Definiendo el concepto de convergencia uniforme de una serie doble, demuéstrese que si la serie (38.16) converge uniformemente y sus términos son funciones continuas sobre el conjunto $X \subset R^n$, entonces también la suma de la serie (38.16) es una función continua sobre el conjunto $X$.

**Definición 9.** *Las series de la forma*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 0}^{\infty} c_{n_1 \ldots n_k}(x_1 - x_1^{(0)})^{n_1} \ldots (x_n - x_n^{(0)})^{n_k},$$

*donde* $c_{n_1 \ldots n_k}$ *son números complejos, se llaman series de potencias múltiples.*

Aunque, como se ve de lo anterior, muchas afirmaciones que son válidas para las series de multiplicidad uno, se generalizan también para las series múltiples, las últimas tienen muchas particularidades específicas, que las diferencian esencialmente de las series de multiplicidad uno.

En calidad de ejemplo daremos uno serie de potencias doble con coeficientes reales, la que siendo analizada en el dominio real converge sólo en dos puntos del plano, precisamente en los puntos (0; 0) y (1; 1). De esta forma, el análogo del teorema de Abel para las series de potencias (véase el p. 37.1), en todo caso en el sentido directo, para las series dobles no existe. Este ejemplo muestra el peligro de utilizar las analogías que no estén reforzadas por demostraciones matemáticas.

Analicemos la serie

$$\sum_{m, n = 0}^{\infty} c_{mn} x^m y^n, \tag{38.17}$$

donde $c_{00} = 0$, $c_{0n} = c_{n0} = n!$, $n = 1, 2, \ldots$; $c_{1m} = c_{m1} = -m!$; $m = 1, 2, \ldots$, ; $c_{mn} = 0$, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$.

Sus sumas parciales tienen la forma

$$S_{mn}(x, y) = (1 - y)\sum_{k=1}^{m} k!x^k + y + (1 - x)\sum_{l=2}^{n} l!y^l. \tag{38.18}$$

Es evidente que $S_{mn}(0, 0) = 0$ y $S_{mn}(1; 1) = 1$, $m, n = 1, 2, \ldots$, y por esto la serie (38.17) converge en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Observemos ahora que el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!z^n$$

es igual a cero (véase el ejemplo 1 en el p. 37.1), además sus sumas parciales

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} k!z^k, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

para $z > 0$ reales, evidentemente tiende a $+\infty$.

Mostremos que para $z < 0$ sus sumas parciales pares $S_{2n}(z)$ también tienden a $+\infty$. En efecto, uniendo para $z < 0$ para a par los términos contiguos, obtendremos

$$S_{2n}(z) = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)!\,|z|^{2k-1}(2k|z| - 1).$$

Más adelante, observemos que para cualquier $z \neq 0$ dado, para los números $k > \dfrac{1}{|z|}$ se cumple la desigualdad

$$(2k - 1)!\,|z|^{2k-1}(2k|z| - 1) > (2k - 1)!\,|z|^{2k-1}$$

y que para $z \neq 0$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k - 1)!\,z^{2k-1}$$

diverge (esto, por ejemplo, se demuestra fácilmente de la misma forma como se demostró para $z \neq 0$ la divergencia de la serie en el ejemplo 1 del p. 37.1) y, por lo tanto, para $z > 0$ su suma es igual a $+\infty$, por esto también

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}(z) = +\infty, \quad z \neq 0.$$

De lo dicho y de la igualdad (38.18) se deduce que si $(x, y) \neq (0, 0)$ ó $(x, y) \neq (1, 1)$ entonces cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$, siempre se pueden escoger los números $m$ y $n$ tales que

$$|S_{mn}(x, y)| > \varepsilon.$$

Y esto implica que la serie (38.17) para los $(x, y)$ señalados diverge.

Observemos que aunque en el punto $(1, 1)$ la serie analizada converge, sus términos (es decir, en el caso dado coeficientes) no están acotados. Si los términos de la serie de potencias (38.17) en cierto punto $(x_0, y_0)$ forman un conjunto acotado (esto tiene lugar, por ejemplo, si la serie converge absolutamente, véase el p. 38.1), entonces para esta serie es válido el análogo bidimensional del teorema de Abel (véase el p. 37.1).

**Teorema 6.** *Si en el punto* $(x_0, y_0)$ *los términos de la serie* (38.17) *están acotados, entonces en cualquier punto* $(x, y)$ *tal que* $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$ *la serie* (38.17) *converge absolutamente.*

DEMOSTRACIÓN. Si existe $M > 0$ tal que para todos los naturales $m$ y $n$ se cumple la desigualdad

$$|c_{mn}x_0^m y_0^n| \leqslant M,$$

entonces para $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$ obtendremos

$$|c_{mn}x^m y^n| = |c_{mn}x_0^m y_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^m \left|\frac{y}{y_0}\right|^n \leqslant M\left|\frac{x}{x_0}\right|^m \left|\frac{y}{y_0}\right|^n.$$

De aquí, por el criterio de comparación (véase el teorema 3) y la convergencia de la serie de la forma $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} p^m q^n$, $|p| < 1$, $|q| < 1$ (véase el ejemplo en el p. 38.1), se deduce la afirmación del teorema. □

Ejercicios. 3. El número $S$ será llamado suma de la serie $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $N$ tal que para todos los números $m$ y $n$ que satisfacen la condición $m + n > N$, se cumple la desigualdad $|S_{mn} - S| < \varepsilon$. Aclárese si esta definición es equivalente o no a la definción 5 del p. 38.1.

4. El número $S$ será llamado suma de la serie $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $\mathfrak{N}_\varepsilon = \{(m, n)\}$ de pares de índices $m$, $n$ de los términos de la serie dada, tal que cualquiera que sea otro conjunto finito $\mathfrak{N}$ de pares de índices de los términos de esta serie, que contenga el conjunto $\mathfrak{N}_\varepsilon$: $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}_\varepsilon$, se cumple la desigualdad

$$\left|\sum_{(m,n)\in\mathfrak{N}} u_{mn} - S\right| < \varepsilon.$$

Aclárese si esta definición es equivalente o no a la definición 5 del p. 38.1 y a la definición enunciada en el ejercicio anterior.

# Indice alfabético de autores

# Indice alfabético de materias

## A NUESTROS LECTORES

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y de ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a: Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú I-110, GSP, URSS.

## MIR PUBLICA

**Bugrov Ya., Nikolski S.**

*Cálculo diferencial e integral*

Este es el segundo libro de la serie ¡Matemáticas superiores¿, que se compone además de otros dos volúmenes: ¡Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica¿ y ¡Ecuaciones diferenciales. Integrales múltiples. Series. Funciones de variable compleja¿.

En el presente volumen se exponen las siguientes partes: introducción al análisis matemático, cálculo diferencial e integral de funciones de una variable; cálculo diferencial e integral de funciones de varias variables; series.

Se estudian el concepto de límite de una sucesión, de función de su límite, de integral definida e indefinida, la aplicación de las mismas.

En el primer capítulo se dedican algunos parágrafos a los números reales, pese a que esta cuestón ha sido tratada en los últimos cursos de la escuela de enseñanza media.

En la presente obra se desarrollan todos los temas que integran los respectivos programos de los institutos técnicos de enseñanza superior.